This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY

363
M966m

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1994. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

München.
Verlag der K. Akademie.
1894.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

157063

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXIII Jahrgang 1893.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 134. Stiftungstages am 21. März 1893.

Seite

v. Pettenkofer: Einleitender Vortrag 111

v. Voit: Nekrologe 113

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinz-Regenten am 22. November 1893.

M. v. Pettenkofer: Einleitender Vortrag 285

Wahlen 292

Sitzung vom 7. Januar 1893.

*L. Sohncke: Bericht über den Verlauf der Galilei-Feier zu Padua 1

*M. v. Pettenkofer: Ueber Cholera und Trinkwasser . . . 1

*H. Seeliger: Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen, insbesondere des Saturnringes 1

Fr. v. Sandberger: Ueber die pleistocänen Kalktuffe der fränkischen Alb 3

*K. A. v. Zittel: Vorlage einer Abhandlung des Herrn Professors Dr. Hans Pohlig in Bonn: Eine Elephantenhöhle Siziliens 2

Sitzung vom 4. Februar 1893.

Seite

*C. v. Voit: Bericht über die in Leipzig am 29. Januar stattgefundene Versammlung 17

*W. v. Gümbel: Vorlage einer Untersuchung des Kreismedizinalrathes Dr. Egger in Landshut über die durch das deutsche Schiff „Gazelle" in den Jahren 1874—1876 gelotheten Foraminiferen 17

W. v. Gümbel: Geologische Mittheilungen über die Mineralquellen von St. Moritz im Oberengadin und ihre Nachbarschaft 19

*Ad. v. Baeyer: Ueber die künstliche Darstellung des Terpentinöls 17

Sitzung vom 4. März 1893.

*K. v. Orff: Telegraphische Längenbestimmungen für die k. Sternwarte zu Bogenhausen. II. Theil 102

*L. Sohncke: Vorlage einer Abhandlung des Hrn. Dr. Straubel in Jena: Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symmetrischer, nicht sphärischer Wellen . . 102

E. v. Lommel: Aequipotential- und Magnetkraftlinien . . . 103

Sitzung vom 6. Mai 1893.

L. Boltzmann: Ueber die Beziehung der Aequipotentiallinien und der magnetischen Kraftlinien 119

E. v. Lommel: a) Aequipotential- und Magnetkraftlinien; Nachtrag 129

b) Objektive Darstellung von Interferenzerscheinungen in Spectralfarben 133

K. A. v. Zittel: Die geologische Entwickelung, Herkunft und Verbreitung der Säugethiere 137

F. v. Sandberger: Das Erzvorkommen in Cinque valle bei Roncegno im Val Sugana ca. 30 km östlich von Trient 199

Sitzung vom 3. Juni 1893.

E. v. Lommel: Aequipotential- und Magnetkraftlinien. Zum Hall'schen Phänomen 217

L. Sohncke: Ueber ungewöhnliche mikroskopische Bilder . . 223

Sitzung vom 8. Juli 1893.

Seite

L. Graetz: Eine neue Methode zur Messung von Selbstpotentialen und Induktionscoefficienten 237

L. Graetz und L. Fomm: Ueber ein Instrument zur Messung der Spannung bei elektrischen Oscillationen 245

Sitzung vom 4. November 1893.

L. Graetz und L. Fomm: Ueber die Bewegung dielektrischer Körper im homogenen elektrostatischen Feld 275

*K. A. v. Zittel: Ueber ein Werk des Prof. Dr. Richard Lepsius in Darmstadt: Geologie von Attika 273

*Ad. v. Baeyer: Ueber die Terpene 273

*Paul Groth: Ueber seine Reise nach Nordamerika . . . 273

Sitzung vom 2. Dezember 1893.

W. v. Gümbel: Die Amberger Eisenerzformation 293

L. Boltzmann: Ueber den Begriff der absoluten Temperatur 321

*A. v. Baeyer: Ueber die geometrischen Isomerien in der Terpenreihe 293

Einsendungen von Druckschriften 251, 329

burg: „Ueber die pleistocänen Kalktuffe der fränkischen Alb.“

5. Herr K. A. v. ZITTEL bespricht eine Abhandlung des Herrn Professors Dr. HANS POHLIG in Bonn: „Eine Elephantenhöhle Siziliens“, welche in den Denkschriften veröffentlicht werden wird.

Ueber die pleistocänen Kalktuffe der fränkischen Alb nebst Vergleichungen mit analogen Ablagerungen.

Von F. v. Sandberger.

(*Eingelaufen 7. Januar.*)

Seitdem ich im Jahre 1875 eine Notiz[1]) über die wenigen, von dem inzwischen verstorbenen Hof-Apotheker Dufft aus Rudolstadt in dem Kalktuff des Langenthals bei Streitberg gesammelten fossilen Conchylien mitgetheilt hatte, welche auch in C. W. v. Gümbels Geognostische Beschreibung der fränkischen Alb[2]) übergegangen ist, haben neue Aufsammlungen meine damalige Ansicht von dieser Ablagerung wesentlich verändert. Einige Jahre nach meiner Mittheilung übersandte mir der damalige, jetzt auch verstorbene Besitzer der Kuranstalt Streitberg, Dr. Weber, Reste von Wirbelthieren, welche sich als von *Felis spelaea Goldf.* und *Rhinoceros sp.* herrührend herausstellten. Letztere Art glaube ich gegenwärtig zu *Rh. Merkii* ziehen zu müssen. Damit war entschieden, dass dem Tuff nicht ein alluviales, sondern ein pleistocänes Alter zukomme. Gleichzeitig hatte Herr v. Ihering[3]) sowohl von Streitberg als von Oberzaunsbach bei Gräfenberg eine grössere Anzahl von Conchylien angeführt, welche dieses Resultat bestätigten.

1) Land- u. Süsswasser-Conchylien der Vorwelt. 1875. S. 936 Anm.
2) S. 461.
3) Malakozool. Blätter N. F. Bd. III. S. 69 ff.

STANFORD LIBRARY

Die Tuffe sind offenbar aus hoch kalkhaltigen Quellsümpfen abgesetzt, deren Wasser auf der Grenze zwischen den Thonen des *Ammonites ornatus* und den tiefsten Kalken des weissen Juras hervordrang, wo auch heut zu Tage noch zahlreiche ebenso hoch kalkhaltige Quellen auftreten, welche Tuffe absetzen, denen aber pleistocäne Formen fehlen.

Hatten mich schon die Resultate v. Ihering's lebhaft interessirt, so wurde meine Aufmerksamkeit noch mehr durch neue und sehr gründliche Aufsammlungen in Anspruch genommen, welche Herr Eisenbahn-Inspektor Dietz in Streitberg vorgenommen und mir mitgetheilt hatte. Die Untersuchung derselben hat folgende Arten ergeben:

a) Streitberg.

Daudebardia rufa Fér. sp. s.
„ brevipes Fér. sp. ss.
Limax agrestis L. ss.
„ cinereo-niger Wolf ss.
Vitrina diaphana Drap. ss.
Hyalinia glabra Stud. sp. ss.
„ nitens Mich. ss.
„ nitidula Drap. h.
„ Hammonis Stroem. h.
„ diaphana Studer s.
„ fulva Müller s.
†Zonites subangulosus Sandb.[1]) h. (Z. verticillus olim non Fér.)
Arion empiricorum Fér. ss.
Patula rotundata Müll. sp. hh.
* „ solaria Menke sp. h.
„ pygmaea Drap. ss.
Helix aculeata Müll. s.
Helix pulchella Müll. h.
„ obvoluta Müll. h.
„ sericea Drap. ss.
„ strigella Drap. s.
„ fruticum Müll. s.
„ incarnata Müll. ss.
* „ vicina Rossm. ss. (carpathica Frivaldsky)
„ arbustorum L. var. major h.
„ hortensis Müll. s.
Buliminus obscurus Müll. s.
Cionella lubrica Müll. h.
Pupa doliolum Brug. sp. s.
* „ pagodula Desmoul. h.
Isthmia minutissima Hartm. h.
* „ costulata Nilsson ss.
Vertigo edentula Drap. h.
„ pygmaea Drap. ss.

1) Ist constant flacher als Z. verticillus mit bis in das höchste Alter deutlich bleibender Kante der Umgänge und nähert sich dem kleinasiatischen Z. smyrnensis (Höhe bei 5½ Windungen 16, Breite 27 mm).

Vertigo pusilla Müll. h.
„ angustior Jeffr. h.
Clausilia laminata Mont. s.
„ biplicata Mont. s.
„ festiva Küster s.
„ pumila Ziegl. s.
„ dubia Drap. ss.
„ plicatula Drap. h.
„ densestriata Rossm. ss.
„ filograna Ziegl. h.
Succinea Pfeifferi Rossm. h.
* „ hungarica Hazay ss.
„ oblonga Drap. ss.
Carychium minimum Müll. h.
Limneus truncatulus Müll. s.
Planorbis umbilicatus Müll. ss.
„ complanatus L. ss.
Acicula polita Hartm. hh.
†Rhinoceros Merkii Jaeg.
†Felis spelaea Goldf.[1])

b) Oberzaunsbach (nach v. Ihering).

Daudebardia rufa Fér. sp.
Vitrina diaphana Drap.
Hyalinia nitens Mich.
„ cellaria Müll.
„ pura Ald.
„ Hammonis Stroem.
„ crystallina Müll.
†Zonites subangulosus Sandb.
Patula rotundata Müll. sp.
Helix pulchella Müll.
„ costata Müll.
„ obvoluta Müll.
„ personata Lam.
„ sericea Drap.
„ fruticum Müll.
„ incarnata Müll.
„ lapicida L.
„ arbustorum L.
Helix nemoralis L.
„ hortensis Müll.
„ pomatia L.
Buliminus montanus Drap.
Chondrula tridens Müll. sp.
Cionella lubrica Müll.
Pupa doliolum Brug. sp.
Clausilia laminata Mont.
„ ventricosa Drap.
„ plicatula Drap.
„ dubia Drap.
„ parvula Stud.
„ biplicata Mont.
Succinea putris L.
„ oblonga Drap.
Carychium minimum Müll.
Limneus auricularius L.

Gänzlich ausgestorben sind die mit † bezeichneten Arten, die mit * bezeichneten kommen in der fränkischen Alb nicht mehr lebend vor, alle anderen sind dort noch zu treffen. Sehr bemerkenswerth ist die Häufigkeit der seither in keiner

1) Kleinere Wirbelthiere, namentlich Nager, wurden nicht gefunden, obwohl Herr Dietz seine Aufmerksamkeit besonders auf sie gerichtet hat.

analogen Bildung beobachteten rein alpinen Pupa pagodula[1]), dann der Clausilien, worunter auch die noch jetzt der fränkischen Alb eigenthümliche Varietät festiva Küst.[2]) der Clausilia vetusta, welche sich ja gern an stets feuchten Felswänden aufhalten, die reichliche Vertretung der ebenfalls Feuchtigkeit liebenden Hyalinien neben Daudebardia rufa, Helix arbustorum, fruticum, incarnata und pulchella, sowie der Succinea Pfeifferi. Die Seltenheit von Planorben und Limneen spricht für ächte, mit fliessendem Wasser nicht in unmittelbarer Verbindung gestandene Quellsümpfe.

Streitberg zählt 52 Arten Conchylien, vielleicht einige mehr, wenn man die mir früher vorgelegenen Pupa frumentum, Chondrula tridens und Helix hispida hinzurechnet, die ich aber aus der Liste weggelassen habe, weil sie von Herrn Dietz nicht wieder gefunden worden sind. In Zaunsbach hat Herr v. Ihering auch noch Helix pomatia, personata, nemoralis und pulchella, Chondrula tridens, Buliminus montanus, Clausilia ventricosa, Succinea putris und Limneus auricularius gefunden, welche nicht in Streitberg vorkommen, aber das Faunenbild nicht wesentlich verändern.

Was das Klima der fränkischen Alb in damaliger Zeit betrifft, so wird man es wohl kaum als viel kälter als das jetzige bezeichnen dürfen, da die Zahl der jetzt alpinen, ost- und nordeuropäischen Conchylien, Patula solaria, Clausilia densestriata und filograna, Helix vicina, Succinea hungarica, dann der jetzt rein alpinen Pupa pagodula und der rein nordischen Isthmia costulata gegenüber der der jetzt noch dort lebenden doch nur klein ist und sich wie 7 : 45 verhält. Es wird sich wohl um ein Klima handeln, wie es jetzt den Voralpen, z. B. der Gegend von Miesbach und Tölz eigen-

1) Dieselbe fehlt auffallender Weise in den Schweizer Alpen, östlich und westlich von denselben ist sie häufig.

2) Clausilia in Martini und Chemnitz Syst. Conchylien-Cabinet Taf. XXVII. Fig. 23—25.

thümlich ist. Der ausgestorbene Zonites und die ebenfalls ausgestorbenen Wirbelthiere können natürlich nicht zu klimatischen Schlüssen verwandt werden, sind aber für anderweitige Vergleichungen von hohem Werthe.

Sucht man sich die Stellung klar zu machen, welche den fränkischen Tuffen unter jenen des übrigen Deutschlands zukommt, so fordern zunächst die von Weimar[1]) zum Vergleiche auf, in welchen Zonites subangulosus, Clausilia filograna, vetusta und densestriata[2]) ganz wie in Franken auftreten, und welche auch Felis spelaea, Rhinoceros Merkii sowie andere pleistocäne Wirbelthiere enthalten, deren oft gespaltene und angebrannte Knochen beweisen, dass sie zu der Jagdbeute prähistorischer Menschen aus der Steinzeit gehört haben.[3])

Sonst aber sind wesentliche Unterschiede vorhanden. Patula solaria fehlt in Weimar wie überhaupt in allen norddeutschen Tuffen, ebenso Pupa pagodula, während hier zuerst die merkwürdigen Formen der osteuropäischen Helix banatica Partsch (canthensis Beyr.)[4]) und vindobonensis C. Pfeiff. auftreten, die bis in die weit nach Westen gelegenen Tuffe der Gegend von Halberstadt aushalten. Eine weitere Merkwürdigkeit der thüringischen Tuffe, welcher eine ebenso weite Verbreitung zukommt, Belgrandia germanica[5]), gehört aber

---

1) Sandberger, Land- und Süsswasser-Conchylien der Vorwelt S. 913 ff.

2) Neuerdings von mir dort entdeckt.

3) A. Portis Palaeontographica Bd. XXV. S. 141.

4) Sandberger, Land- und Süsswasser-Conchylien der Vorwelt S. 926 Taf. XXXIV. Fig. 3. Eine grössere Anzahl von Herrn F. v. Kimakowicz in Hermannstadt mitgetheilter Stücke beweist, dass die s. Z. von mir angegebenen Merkmale der fossilen Form auch bei Varietäten der lebenden auftreten, der Name „canthensis" ist daher für immer zu beseitigen.

5) Malakozool. Bl. XXV. S. 101. B. marginata Sandb. Land- u. Süsswasser-Conchylien d. Vorw. S. 915. Taf XXXV. Fig. 2 von Michaud.

nicht zu den osteuropäischen Formen, da alle anderen Arten der Gattung in Gebirgsquellen Frankreichs leben. Beispiele für von dem jetzigen gänzlich verschiedene Verbreitungsgebiete einzelner Gattungen und Arten sind in der Pleistocän-Zeit auch sonst durchaus nicht selten, wie z. B. für Unio littoralis, Helix bidens, Pomatias septemspiralis, Valvata naticina u. a. und bilden einstweilen noch ungelöste Räthsel.

Der Tuff von Tonna (nördlich von Gotha und südöstlich von Langensalza) hat mit jenem von Streitberg nur die seltenen Succinea hungarica und Helix vicina Rossm. (carpathica Friv.) gemein und enthält von osteuropäischen Arten wie Weimar ausser letzterer auch Helix banatica und vindobonensis, aber auch eine ausgestorbene Art von südöstlichem (caspischem) Habitus, Helix tonnensis Sandb.[1]), und ausser Pupa Sempronii Charp. keine jetzt ausschliesslich alpine Art, wohl aber auch die jetzt rein nordische Isthmia costulata. Clausilien sind sehr schwach vertreten, vermuthlich, weil in der Nähe felsige Abhänge fehlten. Das Gesammtbild der Fauna, welche durch die letzten Aufsammlungen des Herrn Dietz auf 52 Arten angewachsen ist, gibt die folgende Liste:

Daudebardia rufa Fér. s.
Limax agrestis L. s.
Vitrina pellucida Müll. s.
Hyalinia cellaria Müll. s.
„ nitidula Drap. s.
„ crystallina Müll. s.
„ nitida Müll. h.
†Zonites subangulosus Sandb. h.
Patula rotundata Müll. sp. h.
„ pygmaea Drap. ss.
Helix aculeata Müll. s.
„ pulchella Müll. h.
„ costata Müll. s.
Helix obvoluta Müll.
„ personata Lam. ss.
„ strigella Drap.
var. semirugosa Sandb. h.
„ fruticum Müll. h.
„ incarnata Müll. s.
* „ vicina Rossm.
(carpathica Friv.) s.
* „ banatica Partsch
(canthensis Beyr.) h.
„ lapicida L. s.
„ arbustorum L. hh.
„ nemoralis L. s.

1) Land- u. Süsswasser-Conchylien d. Vorwelt S. 927. Taf. XXXV. Fig. 38.

Helix hortensis Müll. hh.
* „ vindobonensis C. Pfeiff. s.
† „ tonnensis Sandb. h.[1])
„ pomatia L. s.[2])
Cionella lubrica Müll.
var. major ss.
Pupa doliolum Drap. s.
* „ Sempronii Charp. ss.
*Isthmia costulata Nilss. ss.
Vertigo antivertigo Drap. h.
„ Moulinsiana Dupuy (laevigata Kokeil) ss.
„ substriata Jeffr. ss.
„ alpestris Ald. s.
„ pygmaea Drap. ss.
„ pusilla Müll. s.
Vertigo angustior Jeffr. s.
Clausilia dubia Drap. ss.
Succinea Pfeifferi Rossm. h.
* „ hungarica Hazay ss.
Carychium minimum Müll. h.
Limneus stagnalis L. ss.
„ fragilis L. sp. hh.
„ ovatus Drap. hh.
Physa fontinalis L. sp. ss.
Planorbis umbilicatus L. ss.
„ nautileus L. sp. s.
Acicula polita Hartm. h.
Belgrandia germanica Cless. hh.
Bithynia tentaculata L. sp. h.
Pisidium pusillum Gmel. h.

Es ist immer merkwürdig genug, zu sehen, wie hier osteuropäische Arten, welche jetzt auf die Carpathen beschränkt sind, wie Helix vicina und H. banatica, sowie die jetzt westlich nur noch bis in das Königreich Sachsen verbreitete H. vindobonensis neben den noch in ganz Deutschland gemeinen H. nemoralis, hortensis und pomatia vorkommen.

Ueber die Wirbelthiere aus dem Tuff von Tonna, namentlich dessen Hirschformen und den Elephas antiquus sind von Pohlig[3]) weitere Mittheilungen gemacht worden. Bisher wurden angeführt: Elephas antiquus, Rhinoceros Merkii, Sus scrofa, Cervus elaphus und capreolus, Bos primigenius, Equus caballus, Ursus spelaeus, Meles vulgaris und Hyaena spelaea.

Von Pflanzen haben Hellmann[4]) u. A. angegeben: Chara hispida, Ch. foetida, Cladonia squamosa, Encalypta

1) Grösstes Exemplar 24 mm hoch, 32 breit.

2) Grösstes Exemplar 50 mm hoch, 48 breit.

3) Dentition und Kraniologie des Elephas antiquus Falc. Nova Acta der Kais. Leop. Carol. Deutsch. Acad. d. Naturf. Bd. LVII. Nr. 5. Halle 1891.

4) Palaeontograph. von v. Meyer u. Dunker Suppl. Bd. S. 2 ff.

vulgaris, Barbula muralis, Hypnum abietinum, Scolopendrium officinarum, Phragmites communis, Glyceria spectabilis, Fagus sylvatica, Corylus avellana, Quercus pedunculata, Salix cinerea, Alnus glutinosa, Tilia grandifolia und Rhamnus catharticus, welche sämmtlich noch in der gleichen Gegend leben. Merkwürdiger Weise findet sich also unter ihnen keine osteuropäische oder kaukasische Form, während eine sehr ausgezeichnete, Rhododendron ponticum L., damals bei Hötting unweit Innsbruck häufig war. (Wettstein, Sitzungsber. d. K. Acad. d. Wiss. zu Wien, math. naturw. Cl. XCVII Nr. 1.)

Ganz so wie Weimar und Burgtonna verhalten sich auch die Tuffe von Mühlhausen, wie ich bereits in meiner Monographie nach Bornemann[1]) und den mir von A. Braun u. A. mitgetheilten Originalen nachgewiesen habe und wohl auch der Tuff aus der Gegend von Halberstadt.

Soweit man die Lagerungs-Verhältnisse in Thüringen kennt, sind die Tuffe den älteren Geschieben mit Geröllen nordischer Felsarten und solchen des Thüringer Waldes aufgelagert und werden auch hier und da von solchen bedeckt, man darf sie daher mit Recht interglacial nennen, während eine derartige Bezeichnung in Franken, wo Reste alter Gletscher fehlen, nur der Analogie nach gebraucht werden darf. Meine frühere Ansicht (Land- und Süsswasser-Conchylien d. Vorwelt S. 915), dass sie postglacial seien, habe ich in Folge der neueren Forschungen über dieselben längst aufgegeben.

Geht man nun in umgekehrter Richtung, d. h. östlich von Thüringen weiter, so trifft man auf das merkwürdige Tufflager von Paschwitz bei Canth in Niederschlesien, welches von Herrn Bergrath Schütze in Waldenburg entdeckt wurde.[2]) Es enthält vor Allem Helix banatica, welche

1) Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellschaft VIII. S. 89 ff.
2) Beyrich Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellschaft VI. S. 254.

aber von Albers nicht erkannt, sondern als selbstständige Art betrachtet und unbegreiflicher Weise mit gewissen nordafrikanischen Leucochroen verglichen wurde, Zonites subangulosus (verticillus), Hyalinia nitida, Patula rotundata, Helix obvoluta, pulchella, vindobonensis, nemoralis und hortensis, Clausilia plicatula[1]), Pupa pusilla, Carychium minimum, Planorbis fontanus und Acicula polita, also alle charakteristischen Arten der thüringischen Tuffe mit Ausnahme der Belgrandien.

Das mir interessanteste Vorkommen analoger Art ist aber das von Lomnicki[2]) entdeckte von Jazlowiec (Bezirks-Hauptmannschaft Buczacz) in Galizien, an einem Nebenflüsschen der Strypa, linksseitigem Zuflusse des Dniester (272 m ü. d. M.). Die prachtvolle Erhaltung der mir von Herrn Professor Lomnicki in Lemberg gütigst mitgetheilten Fossilien hat mir genaue Vergleichungen ermöglicht, aus denen sich folgende Arten ergaben:

Hyalinia nitens Mich.	Helix lutescens Ziegl.
„ diaphana Stud.	Buliminus? Hohenackeri Kryn.
„ nitida Müll.	Pupa doliolum Brug.
Patula solaria Menke	Clausilia laminata Mont.
Helix banatica Partsch	„ turgida Ziegl.
„ personata Lam.	„ plicata Drap.
„ bidens Chemn.	„ cana Held
„ vindobonensis C. Pfeiff.	„ filograna Ziegl.
„ fruticum Müll.	Succinea hungarica Hazay
„ strigella Drap.	Carychium minimum Müll.
„ pomatia L.	Acicula polita Hartm.

Im Wesentlichen ist das wieder die Fauna der Thüringer Tuffe, doch fehlen, wie in Schlesien, Belgrandien, aber auch

1) Möglicher Weise die öfter mit ihr verwechselte densestriata Rossm.

2) Mieczaki znane dotychczas Z. pleistocenu galicyiskiego (Die aus dem galizischen Pleistocän bisher bekannten Mollusken) Lwow (Lemberg) 1886.

Zonites subangulosus. Die osteuropäischen Elemente erscheinen durch Helix lutescens und Clausilia turgida verstärkt; auch das Vorkommen von Patula solaria und Helix bidens, welche den Thüringer Tuffen fehlen, ist bemerkenswerth, noch mehr aber das erste Auftreten einer Art aus der Gruppe des Buliminus detritus. Meine Stücke der letzteren genügen nicht, um bestimmt zu entscheiden, ob dieselbe zu Buliminus detritus selbst oder zu Hohenackeri Kryn., einer kaukasischen Form, zu zählen ist.[1]) Doch scheint es mir richtiger, die fossile Form zu B. detritus zu ziehen. In jedem Falle tritt in dem galizischen Tuffe die Gruppe, welche jetzt in West-Europa nur durch B. detritus, im Osten aber durch eine grössere Anzahl anderer Arten vertreten ist, zum erstenmale auf. Ist Galizien, was ja sehr möglich wäre, das Stammland des B. detritus, so könnte man denken, dass er sich mit den mit ihm vorkommenden osteuropäischen Arten nach Westen verbreitet habe und erhalten geblieben sei, während die letzteren dort wieder erloschen sind.

Nachdem im Vorhergehenden die Beziehungen der thüringischen, schlesischen und galizischen Tuffe zu den fränkischen genügend erörtert worden sind, erscheint es geboten, auch jene zu besprechen, welche zu dem süddeutschen Tuffe (Sauerwasserkalk) von Cannstatt bei Stuttgart bestehen. Diese Ablagerung habe ich der Hauptsache nach bereits in meiner Monographie[2]) geschildert und darauf aufmerksam gemacht, dass sich die 17 jetzt nicht mehr im Neckarthale lebenden Arten derselben vorzugsweise in den tieferen Bänken finden. Der Zonites ist aber nicht mit jenem der fränkischen

1) Letztere halte ich nach vorliegenden Exemplaren mit Mousson (Journal de conchyliologie 1873 (Juli) S. 204), um so mehr für eine selbstständige Art, als dieselbe regelmässig 1—1½ Umgang mehr besitzen, als gleichalte Stücke des B. detritus (6½—7 statt 4—5½).

2) Land- und Süsswasser-Conchylien der Vorwelt. S. 840 ff.

und thüringischen Tuffe identisch, steht vielmehr merkwürdiger Weise nicht dem alpinen Z. verticillus, sondern dem in Kroatien lebenden Z. acies Partsch nahe; Patula solaria, welche oben aus dem fränkischen und galizischen Tuffe vorgeführt wurde, gehört jetzt bekanntlich den östlichen Alpen, Karpathen und Sudeten an. Diese beiden Formen zeigen also einen ausgeprägt osteuropäischen Charakter, der durch keine weitere Art vertreten ist. Helix sylvatica findet sich dagegen in keiner thüringischen oder fränkischen Ablagerung und lebt zur Zeit ausschliesslich in den westlichen Alpen und dem schweizerischen Jura, aus denen sie verschwemmt im Oberrheinthale bis Karlsruhe herabgelangt und hier längst fest angesiedelt ist, während Pomatias septemspiralis, welcher gleiche Wohnsitze hat, aber Felsen liebt, von mir bisher nur bei Kleinkems zwischen Basel und Müllheim getroffen wurde. Ebensowenig als diese sind auch die erloschene, der lebenden Succinea altaica v. Mart. ähnliche S. paludiniformis oder Helix costellata anderswo gefunden worden. Die jetzt auf Westdeutschland beschränkte Helix rufescens fehlt in den thüringischen und fränkischen Tuffen gänzlich, obwohl sie jetzt bei Bamberg lebt, sohin nahe an die fränkische Alb herantritt. Helix bidens, welche jetzt ebenfalls dort und in der Nachbarschaft (Schweinfurt, Kissingen) vorkommt, muss in der Pleistocän-Zeit in der schwäbischen Alb, in den West-Alpen und den französischen Gebirgen gelebt haben, wie ihr Vorkommen in den pleistocänen Sanden des Oberrheinthals und der Gegend von Paris klar genug erkennen lässt, zur Zeit ist sie von den Karpathen bis Schlesien und von Norddeutschland bis tief nach Scandinavien und Russland verbreitet und findet sich an einzelnen Orten von Ost- und Norddeutschland bis zum oberen Mainthale. Aehnlich verhält sich Bythinia inflata Hans.

Die Conchylien des Cannstatter Tuffs, soweit sie nicht noch im Neckarthale leben, finden sich z. Th. auch in den

Sanden von Mosbach bei Wiesbaden, Mauer bei Heidelberg und Hangenbieten im Elsass.

Auch die Wirbelthierfauna hat mit jener der letzteren Fundorte mehr Aehnlichkeit, als mit jener der bisher besprochenen Tuffe. Da seit längerer Zeit keine Mittheilungen über dieselben erfolgt sind, die Funde, welche bisher gemacht wurden, aber gewiss am vollständigsten in dem k. Naturalien-Cabinete zu Stuttgart vertreten sind, so erbat ich mir über den jetzigen Stand derselben Auskunft, welche mir mit grösster Zuvorkommenheit von Herrn Dr. E. Fraas ertheilt wurde. Es sind dort vorhanden:

Elephas primigenius Blumenb.	Bos primigenius Boj.
Rhinoceros tichorhinus Cuv.	„ priscus Boj.
„ Merkii Jaeg.	Cervus megaceros Boj.
Ursus spelaeus Rosenm.	„ elaphus L.
Hyaena spelaea Goldf.	Castor fiber L.
Felis spelaea Goldf.	Mus sylvaticus L.
Canis lupus L.	Arvicola glareolus Schreb.
„ vulpes L.	„ (Hypudaeus) amphibius L.
Equus caballus L. var. fossilis	Emys europaea Schn.
„ „ var. adamiticus	

Man könnte versucht sein, den Cannstatter Tuff auf Grund dieser Fauna, namentlich wegen des reichlichen Vorkommens von Elephas primigenius, Rhinoceros tichorhinus, Ursus spelaeus und Hyaena spelaea für jünger als die thüringischen und fränkischen zu halten. Dieser Ansicht würden aber die Pflanzen widersprechen, da sich unter diesen noch solche befinden, welche einen älteren, d. h. pliocänen Typus tragen, wie Populus Fraasi und Quercus Mammuthi, vor Allem aber eine Juglans aus der Verwandtschaft der amerikanischen nigra und cinerea. Von den übrigen 26 Arten leben noch 22 im Neckarthale, nämlich Pinus abies, P. excelsa, Betula alba, Corylus avellana, Populus tremula, P. alba, Quercus pedunculata, Carpinus betulus, Ulmus cam-

pestris, Tilia parvifolia, Evonymus europaeus, Salix monadran, S. fragilis, S. aurita, S. viminalis, S. cinerea, Cornus sanguinea, Rhamnus frangula, Rh. catharticus, Glyceria spectabilis, Phragmites communis und Scolopendrium officinarum. Pinus excelsa, Acer pseudoplatanus und Vaccinium uliginosum finden sich nicht mehr in der Gegend von Cannstatt, sondern nur in höheren Gebirgslagen Württembergs, während Buxus sempervirens in ganz Württemberg nicht mehr vorhanden ist. Hiernach scheint die Cannstatter Ablagerung doch wohl vorläufig um so mehr als gleichalterig mit den bisher besprochenen angesehen werden zu müssen, als sie, wie auch manche von diesen, von Löss überlagert erscheint, der ja allgemein als oberpleistocän angesehen wird.

Einigermassen nahe steht dem Cannstatter, wie ich bereits bei einer anderen Gelegenheit[1]) bemerkt habe, der Tuff von La Celle bei Moret (Seine et Marne), in welchem auch Helix bidens und Pomatias septemspiralis sowie ein von Mortillet für identisch mit dem in Friaul und Krain lebenden Z. gemonensis gehaltener Zonites auftritt. Diese drei Conchylien beweisen jedenfalls ein pleistocänes Alter des Tuffs. Die Bestimmungen der übrigen scheinen unsicher zu sein und ich kann daher auf dieselben nicht weiter eingehen. Die Wirbelthiere, Biber, Dachs, Schwein und Edelhirsch, sind nicht für Schlüsse auf das geologische Alter verwendbar. Unter den von v. Saporta bestimmten Pflanzen ist neben den in fast allen pleistocänen, aber auch in alluvialen Tuffen vorkommenden Scolopendrium officinarum, Salix cinerea, S. fragilis, Corylus avellana auch Buxus sempervirens und Evonymus europaeus gefunden worden, wie zu Cannstatt, aber auch Ficus carica und Cercis siliquastrum, welche Cannstatt fehlen. Letztere deuten mit Bestimmtheit auf ein wärmeres Klima, als es zu damaliger Zeit im Neckarthale existirt hat.

---

1) Land- und Süsswasser-Conchylien der Vorwelt. S. 865 f.

Wie aus dem Vorstehenden erhellt, besitzen die pleistocänen Kalktuffe ein hohes Interesse und die Fauna zeigt im Osten und Nordosten deutlich ausgeprägten osteuropäischen Charakter, welchen auch noch die fränkischen, wenngleich in geringerem Grade bemerken lassen, während im Süden und Westen der westeuropäische vorherrscht. Ueberall aber weisen jetzt rein alpine Arten deutlich auf ein etwas kälteres Klima hin, als es jetzt den Gegenden eigenthümlich ist, in welchen die mittelpleistocänen Tuffe abgelagert sind.

Sitzung vom 4. Februar 1893.

1. Der Classensekretär C. v. Voit berichtet über die in Leipzig am 29. Januar stattgefundene Versammlung von Delegirten der Akademien Berlin, München und Wien und der k. Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen und Leipzig zur Berathung des Entwurfes von Statuten eines Verbandes wissenschaftlicher Körperschaften. Die Classe nimmt einstimmig die 7 Paragraphen des von der Versammlung genehmigten Entwurfes an.

2. Herr W. v. Gümbel legt eine Untersuchung des Kreismedizinalrathes Dr. Egger in Landshut über die durch das deutsche Schiff „Gazelle" in den Jahren 1874 bis 1876 gelotheten Foraminiferen vor. Dieselbe wird in den Denkschriften erscheinen.

3. Herr W. v. Gümbel bespricht eine Abhandlung: „Geologische Mittheilungen über die Mineralquellen von St. Moritz im Oberengadin und ihre Nachbarschaft."

4. Herr Ad. v. Baeyer hält einen Vortrag: „Ueber die künstliche Darstellung des Terpentinöls." Die Abhandlung wird anderweit veröffentlicht werden.

Geologische Mittheilungen
über
die Mineralquellen von St. Moritz im Oberengadin und ihre Nachbarschaft
nebst Bemerkungen über das Gebirge bei Bergün und die Therme von Pfäfers.

Von W. v. Gümbel.

(*Eingelaufen 4. Februar.*)

Die Absicht, welche ich in den nachfolgenden Mittheilungen im Auge habe, besteht darin, im Anschlusse an meine geologischen Bemerkungen über die Thermen von Bormio (Sitz.-Ber. d. k. Ak. d. Wiss. in München, math.-phys. Cl. 1891 Bd. XXI S. 79), über die Mineralquellen von Tarasp (Jahresber. d. naturforsch. Ges. v. Graubünden, Jahrgang XXXI S. 1—71) und über die Brennerbadquelle (Sitz.-Ber. d. k. Ak. d. Wiss. etc. Bd .XXII, 1892, S. 139) einige weitere Beobachtungen über die geologischen Verhältnisse der berühmten Mineralquellen von St. Moritz im Oberengadin jenen früheren Schilderungen anzureihen.

Bekanntlich treten in der Umgegend von St. Moritz neben den ausgebreiteten Granitmassen des Bernina- und Juliergebirgs sowie neben weit ausgedehnten Gneissbildungen auch Glieder jenes inneralpinen, jüngeren Kalkzugs auf, welche vom Ortlerstock her westwärts tief in die Schweizer

Centralkette hinein reichen. Sie finden sich auch in ziemlich beträchtlicher Ausdehnung bei St. Moritz entwickelt und man könnte geneigt sein, daraus zu schliessen, dass sie mit dem Auftreten der dortigen Mineralquellen in einem näheren Zusammenhang ständen. Es scheint daher zweckentsprechend, um den Zusammenhang dieser Kalkgebilde im Oberengadin mit jenen in der Ortlergruppe und mit den noch weiter ostwärts im Centralstock vorfindlichen analogen Vorkommnissen nachzuweisen, zunächst einige Angaben über die zwischenliegenden Gebirgstheile westlich vom Stilfser Joch bis zum Innthale vorauszuschicken.

Diese Bemerkungen beziehen sich insbesondere auf die Gebiete, welche zunächst an die Gebirgsgruppe des Ortler's westwärts sich anschliessen, nämlich auf den Stock des Piz Umbrail, das Münsterthal, das Ofengebirge, die Umgegend von Livigno bis Scanfs und können als theilweise Ergänzung zu den vortrefflichen und ausführlichen Beschreibungen gelten, welche der rastlose Erforscher dieser Gegenden, Professor Theobald[1]), uns geliefert hat.

Piz Umbrail.

Der wegen seiner prächtigen und umfassenden Aussicht namentlich über den unmittelbar benachbarten Ortlerstock berühmte und leicht zugängliche Piz Umbrail (3007 m) besteht neben dem Mt. Braulio und Piz Lat aus einer dem älteren krystallinischen Schiefergebirge aufgesetzten Kalkgruppe, welche eine in jetzigem Zustande abgetrennte nächste westliche Fortsetzung der Kalkbildungen[2]) des Ortlergebirgs darstellt.

---

1) Geolog. Beschreibung von Graubünden (Blatt X und XV des Schweiz. geol. Atlasses) 1864 und Beiträge zur geolog. Karte der Schweiz. III. Bd. 1866 sammt Karten.

2) Bei der wechselnden bald mehr kalkigen, bald mehr dolomitischen Beschaffenheit der betheiligten Gesteine mag es in der fol-

Die krystallinischen Untergrundsgesteine gehören jenen mannigfach zusammengesetzten, in der Hauptsache den sericitisch-chloritischen gneissartigen Schiefern an, welche auch dem Gebirgsstock des Ortler's sowohl auf der Nord- wie Südseite zur Unterlage dienen und für welche Theobald im Allgemeinen die Bezeichnung Casanaschiefer in Anwendung gebracht hat. Es sind bald Gneisse von typischer Zusammensetzung, bald mehr glimmerreiche Quarzitschiefer und Glimmerschiefer, bald graue Phyllite, wie solche z. B. auf dem höchsten Punkt des Stilfser Jochs unmittelbar neben dem Ortler Kalke zu Tage treten.

In denselben kommen nicht selten in grösserer Menge chloritische Mineralien oder Sericitausscheidungen entweder neben Glimmer oder denselben vollständig vertretend als Gemengtheile vor und verleihen den Schiefern eine oft als „talkig" bezeichnete Beschaffenheit. Es sind ganz allgemein sericitreiche Gesteine, welche Theobald als Ausgangspunkt für die Bezeichnung Casanaschiefer genommen hat, ohne dieselben aber petrographisch bestimmter abzugrenzen. Daher herrscht in Bezug auf die Anwendung dieser Bezeichnung um so grössere Unsicherheit, als Theobald selbst und Andere nach ihm diesen Namen auch auf schiefrige Gesteine jüngerer Entstehung von klastischer Zusammensetzung ausgedehnt haben. Es scheint nicht räthlich, die Benennung Casanaschiefer weiter auch auf solche nicht wirklich krystallinische Schiefer auszudehnen, in welchen statt Glimmer vorwaltend Sericit sich vorfindet.

Die in Nordtirol so mächtig entwickelten sog. Kalkphyllite, welche uns von Landeck bis nahe Reschen-Scheideck begleiten und im Unterengadin bis über Tarasp hinauf-

---

genden Darstellung gestattet sein, ohne schärfere Unterscheidung der chemischen Zusammensetzung die allgemeinere Bezeichnung „Kalkgesteine" u. s. w. zu gebrauchen.

reichen, haben mit den in dem bezeichneten Gebiete auftretenden, offenbar älteren phyllitischen Schiefern Nichts gemein, wenn sie auch vielfach von chloritischen, hornblendeführenden und selbst feldspathhaltigen krystallinischen Einlagerungen begleitet werden. Für diese Schieferreihe sind graue krystallinische Kalke als Einlagerungen besonders charakteristisch. Sie umschliessen häufig aus reinerem weissem Kalkspath bestehende Ausscheidungen, welche ihrem Umrisse nach als organische Ueberreste gedeutet werden könnten. Solche Ausscheidungen finden sich besonders häufig z. B. in Kalkbänken nahe unterhalb der Festung Nauders. In Dünnschliffen lässt sich jedoch keine Spur organischer Textur in denselben wahrnehmen.

Mit diesen phyllitischen Schichten sind häufig mächtige Zonen grüner Schiefer als Einlagerungen verbunden. Sie gleichen vollständig den auch am Brennerstock[1]) entwickelten Zwischenlagerungen, welche durch Beimengung einer chloritischen Substanz und z. Th. von strahliger Hornblende gefärbt erscheinen. Sie gehen selbst, wie z. B. auf der westlichen Innseite oberhalb Landeck in deutliche Strahlsteinschiefer über. Ausserdem sind sie reich an Epidot, welcher häufig auf Adern angesiedelt sich zeigt und oft mit Quarz verwachsen in quer zu der Richtung der Adern verlaufenden stänglig fasrigen Ausscheidungen auftritt.

Der grüne chloritische Bestandtheil gehört zu jener Eisenoxydul-reichen Gruppe der Chlorite, welche durch Chlorwasserstoffsäure zersetzt werden. In Dünnschliffen zeigt sich diese Beimengung auf bald heller, bald dunkler gefärbte, nicht scharf umgrenzte Streifen und Flecke vertheilt, welche, wenn die Schliffe senkrecht zu der Schichtung hergestellt sind, als dünne wellige, parallel gelagerte Streifchen sich

1) Sitz.-Ber. d. Ak. d. Wiss. in München, math.-phys. Cl. 1892, Bd. XXII, S. 154.

darstellen. Die Streifchen sind wechselnd krystallinisch körnig, mehr oder weniger wasserhell, von quarziger Beschaffenheit oder schuppig blättrig, grün gefärbt, dem chloritischen Gemengtheil angehörig. Dazwischen finden sich kleine linsenförmige Ausscheidungen von Quarz mit einzelnen Epidotnädelchen und feldspathigen Theilchen, ebenso auch chloritische Butzen mit dunkleren, stark dichroitischen Flecken und schwarzem Eisenerz. Es gelang nicht, die grüne Substanz von der Hauptmasse der Schiefer zu isoliren. Mit Salzsäure behandelt, entfärben sich die grünen Schiefer nach längerem Kochen vollständig. Im Rückstande, der hauptsächlich aus Quarz besteht, bemerkte man Blättchen von weissem und grünlichem Glimmer oder Chlorit, dann Epidot, Hornblende, schwarzes magnetisches Eisenerz, Schwefelkies, Feldspath-Theilchen, spärlich Turmalin, sehr selten Zirkon. Rutilnädelchen wurden nicht beobachtet.

Mit verdünnter 5 % Salzsäure behandelt, giebt das Pulver ein schwaches Aufbrausen zu erkennen und es werden dabei durchschnittlich 2 % Carbonate aufgelöst, welche aus 1,05 % Kalkcarbonat, 0,91 % Eisenoxydulcarbonat und 0,04 % Bittererdecarbonat bestehen.

Kochende concentrirte Salzsäure bewirkt eine weitere Zersetzung zu 59,5 % des Schiefers. Man erhält dadurch eine Eisenoxydul-reiche Theillösung, welche sich zusammengesetzt erweist, nach Procenten berechnet, aus

$$SiO_2 = 27{,}73;\ Al_2O_3 = 20{,}60;\ Fe_2O_3 = 5{,}14$$
$$FeO = 33{,}24;\ CaO = 4{,}72;\ MgO = 1{,}85 \text{ und}$$
$$H_2O = 6{,}72, \text{ zusammen } 100{,}000.$$

Das Gestein im Ganzen nach Entfernung der leicht zersetzbaren Carbonate besteht aus:

	I	II	III	IV
Kieselsäure . .	51,69	51,38	47,14	63,30
Titansäure . .	0,05	—	—	0,96
Thonerde . . .	12,36	13,29	14,78	19,77
Eisenoxyd . . .	16,78	15,44	18,91	0,57
Eisenoxydul . .	8,22[1])	—	—	2,82
Manganoxydul .	Spuren	—	—	—
Kalkerde . . .	1,40	8,94	2,88	0,40
Bittererde . . .	4,00	6,61	9,59	5,40
Kali	0,01	1,05	6,16	2,11
Natron	2,19	3,99	0,16	0,34
Wasser	3,85	—	—	4,04[2])
Summe	100,55	100,70	99,61	99,70

I. Grüner Schiefer aus dem Steinbruche zwischen Dorf und Festung Nauders.

Des Vergleichs wegen sind angefügt:

II. Grüner Schiefer von Molins in Oberhalbstein nach vom Rath.

III. Grüner Schiefer am Wege zwischen Molins und Marmels und Oberhalbstein nach vom Rath.

IV. Sog. „Grüner" von dem Mitterberg bei Bischofshofen aus den Werfener Schiefern im Mittel nach Groddeck.

Was das die grüne Färbung hauptsächlich bedingende Mineral anbelangt, das durch Salzsäure grossen Theils zersetzt wird, so gehört dasselbe der weiten Gruppe der Chlorite an, welche in sehr vielfachen Abänderungen als färbendes Princip in phyllitähnlichen Schiefern sich vorfinden, ohne eine vollständig übereinstimmende chemische Zusammensetzung erkennen zu lassen. Am nächsten dürfte unser Mineral dem

1) Dazu gehört ein Theil des Eisenoxyds, welches sich bei längerer Behandlung des Pulvers mit ClH in grösserer Menge oxydirt hat.

2) Dazu 0,11 Phosphorsäure.

sog. Thuringit und Phyllochlorit[1]) stehen. Der grüne Schiefer im Ganzen bildet eine Fortsetzung der zahlreichen Einlagerungen ähnlicher Gesteinsabänderungen, welchen wir im ganzen Zug der sog. Kalkphyllite an der Nordabdachung der Alpen begegnen und welche auch in den Westalpen eine gleiche Verbreitung zu besitzen scheinen[2]), dürfen aber nicht mit den sog. „Grünen"[3]) vereinigt werden, welche in Vergesellschaftung des sog. Verrucano aufzutreten pflegen.

Derartige grüne Schiefer, wie sie in den Nordtiroler Alpen so vielfach mit den Kalkphylliten auftreten, für sekundäre, durch Druckmetamorphose etwa aus diabasartigen Massengesteinen hervorgegangene Gebilde zu erklären, muss ich angesichts ihrer Lagerungsverhältnisse, ihres innigsten Verbandes und Uebergangs in gewöhnliche Kalkphyllite und bei dem gänzlichen Mangel an wirklichen Diabasgesteinen geradezu für abenteuerlich erklären.

Ich betrachte sie vielmehr, wie die übrigen bald mehr sericitischen, bald mehr quarzitischen oder kalkigen phyllitartigen Schiefer und die ihnen zwischengelagerten krystallinischen Kalke, als durch diagenetische Prozesse aus ursprünglichem Niederschlagsmaterial ausgebildete primäre Schichtgesteine.

Solche eingelagerte Kalke bestehen aus 87,5 % Carbonaten und 12,5 % in Säuren unlöslichem Rückstande. Die

---

1) Vergleiche Tschermak, D. Chloritgruppe, II. Th. in Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. Bd. 100. 1891 und Min.-petrogr. Mitth. Bd. XII. 1891, S. 32; Gümbel, Geogr. Beschreib. v. Bayern, Bd. II, S. 397 und Bd. III, S. 236; C. Schmidt in Beit. z. Geol. der Schweiz, Lief. XXV, S. 68.

2) Vom Rath, in Z. d. d. geol. Ges. Bd. IX, 1857, S. 241; Rolle, Mikropetrogr. Beit. 1879; C. Schmidt, a. a. O. Anh. S. 60; A. Cathrein, Ueber Chloritoidschiefer v. Grossarl in Tschermaks Miner. Mittheil. Bd. 8, S. 331.

3) v. Groddeck im Jahrb. 89 d. geol. Reichsamt. Bd. 33, 1883, S. 397; v. Gümbel, im Sitz.-Ber. d. Münch. Ak. d. Wiss., math.-phys. Cl., 1890, S. 386.

ersteren setzen sich zusammen aus 83,65 % Kalkcarbonat, 0,95 Bittererdecarbonat und 2,90 Eisenoxydulcarbonat. In dem Rückstande findet man klastische Quarzkörnchen, Glimmer- oder Sericitschüppchen und schwarze kohlige, nicht graphitische Theilchen mit schmutzig bräunlich schwarzem Strich, welche leicht verbrennen und keine organische Textur erkennen lassen.

Von Reschen-Scheideck an herrschen südwärts Gneiss und gneissähnliche Schiefer bis tief in das Münsterthal hinein und ebenso von St. Maria an durch das Muranza-Thal aufwärts bis zum Stilfser Joch. Es sind vorwaltend glimmerreiche grobkörnige Gneisse, welche stellenweise in Augengneisse übergehen, oft chloritische Bestandtheile aufnehmen und vielfach mit chloritischen Quarziten wechsellagern.

Dieser Schiefercomplex, welcher sich mit dem von Trafoi her streichenden Grundgebirge des Ortler Kalkstocks vereinigt und abwärts bis zur III. Cantoniera reichend hier an den querüber durch das Braulio-Thal setzenden Kalkschichten abbricht, bildet auch ringsum das Fundament des Piz Umbrail. Am Südost-Fuss der Kalkkuppe dieses Bergs gehen die krystallinischen Gesteine in grünlich gefärbte, sericitisch-chloritische Schiefer über, die leicht verwitternd milde Gehänge bilden, so dass man über reichberasten, weichen Boden ohne besondere Anstrengung bis hoch hinauf zu den dann plötzlich schroff aufragenden Kalkwänden und zur Spitze des Bergs emporsteigen kann. Nur gegen den Passübergang zum Rimssee breiten sich, zackige Felsriffe bildend, quarzitische Gesteine mächtig aus, welche das Material zu einem Haufen wild durcheinander liegender Blöcke liefern. Unmittelbar daneben sind in tiefen Gräben gypsreiche Schichten in Begleitung von mächtigen Rauhwackemassen aufgeschlossen, aber derartig von Schutt und Gesteinstrümmer überdeckt, dass man einen direkten Anschluss an die zunächst benachbarten Gebilde nicht beobachten kann. Das Ganze macht

genau denselben Eindruck, wie die Gypsablagerungen im Uzza-Thal und oberhalb Premadio bei Bormio oder wie in der verstürzten Scholle oberhalb der benachbarten Margumalpe. Von dieser Stelle der anstehenden Gypsschichten lässt sich eine muldenförmige Einbuchtung in NO.-Richtung am Fusse der Kalkwände verfolgen, in welcher zahlreiche grosse, trichterartige oder kesselförmige, abflusslose Vertiefungen die Fortsetzung des Gypslagers verrathen. Sie sind offenbar durch Auswaschungen und Zusammenbrüche der den Gyps begleitenden, hauptsächlich aus Rauhwacke bestehenden Schichten entstanden. Erst auf der Sattelhöhe, welche vom Stilfser Joch her zieht und die Eintiefung des Braulio-Thales von der des Muranza-Thales scheidet, auf welcher auch der gewöhnliche Weg von der IV. Cantoniera zum Piz Umbrail emporführt, begegnet man zwar verwitterten, aber von Gehängeschutt freien, dünngeschichteten, quarzitischen Schiefern, welche zwischen dem krystallinischen Grundgebirge und dem Kalkstock des Piz Umbrail lagern, ohne dass hier Gyps führende Schichten entwickelt sind. Es lässt sich auf diesem Gebirgsvorsprung die Gesteinsaufeinanderfolge von den unten lagernden, z. Th. phyllitartigen krystallinischen Schiefern bis zu den unmittelbar aufgesetzten Dolomitbänken ziemlich gut beobachten. Zunächst ist zu bemerken, dass an dieser Stelle jede Spur von sog. Verrucano-ähnlichen Gesteinen, die doch schon in dem benachbarten Münsterthale bei Fuldera und Cierfs so mächtig auftreten, fehlt. Es folgen hier, wie bei Bormio und im Sulden-Thale, in kaum bemerkbar abweichender Lagerung auf die krystallinischen Schiefer jene sericitisch-quarzitischen dünnbankigen Schichten, welche Theobald auch zu dem Casanaschiefer zieht, die sich jedoch durch ihre theilweise klastische Zusammensetzung von den krystallinischen älteren Schiefern unterscheiden. Nach oben stellen sich graue thonige Zwischenlagen ein; auch fehlen hier jene intensiv gelb verwitternden, selbst in eine Art Brauneisen-

stein zersetzten Einschlüsse nicht, welche für die tiefste Region der Triasbildungen als charakteristisch gelten können. Der nächste Aufschluss nach oben zeigt uns schon die ersten Lagen der nunmehr in steilen, stark zerklüfteten und zu wildzackigen Felsen ausgewitterten Wänden ansteigenden Kuppe des Piz Umbrail. Es sind dunkelgrau gefärbte, weissadrige Dolomitbänke, über deren spitze Felszacken und abgewitterte Trümmerhalden wir weiter emporsteigen. Diese Gesteinsschichten tragen ganz das Gepräge der tieferen Triasregion, welche man dem Muschelkalk nach Art der Guttensteiner Schichten gleichzustellen pflegt. Neben den zahlreichen, das Gestein durchschwärmenden Kalkspathadern bemerkt man viele cylindrische Kalkspathausscheidungen, welche ihrer Form nach als *Crinoideen*-Reste zu deuten sind, obwohl sich in Dünnschliffen eine organische Textur nicht zu erkennen gibt. Daneben finden sich auch Lagen voll von kleinen, etwa Hirsekorn-grossen, kugeligen Körnchen, welche durch ihre weisse Farbe des Kalkspaths von der dunklen Färbung des Gesteins sich grell abheben. Damit sind häufig dünnplattige, selbst schiefrige, z. Th. thonreiche Schichten in Wechsellagerung vergesellschaftet. Höher folgen dann etwas weniger dunkel gefärbte Dolomite mit weissen Streifchen und Flecken, welche gleichfalls an organische Einschlüsse erinnern und in gleicher Weise auch in den entsprechenden Gesteinen des Ortlerstocks und den Radstädter Tauern sich wiederholen. Am bemerkenswerthesten jedoch sind jene breccienartig zusammengesetzten Dolomite, welche z. Th. die höchsten Spitzen des Piz Umbrail ausmachen und dem ganzen Zug der inneralpinen Kalkzone von den Radstädter Tauern an bis zu den westlichsten Graubündener Kalkbergen eigen zu sein scheinen. Diese Trümmergebilde bestehen aus durchweg scharfkantigen bis faustgrossen Stückchen von schwärzlichem, z. Th. hellgestreiftem Dolomit, welche durch eine etwas lichter gefärbte, breccienartige Masse zu einem voll-

ständig compakten Gestein verkittet sind und regelmässig geschichtete Bänke bilden.

Höhere Gesteinslagen habe ich am Piz Umbrail nicht unterscheiden können; es fehlen hier, soweit meine Beobachtungen reichen, alle thonigen oder sandigen Zwischenschichten, welche sich als Stellvertreter der Partnach- oder Raibler Schichten deuten liessen. Ich kann mich daher der Auffassung Theobald's[1]) nicht anschliessen, welcher die Gesteine der Bergkuppe als Hauptdolomit bezeichnet hat. Es fehlen hier allerdings alle bestimmter orientirenden Versteinerungen, aber Lagerung und der allgemeine Charakter des Gesteins spricht mehr zu Gunsten einer Zuweisung in die dem Muschelkalk gleichzustellende Region der unteren Trias.

Diese ältere Dolomitfelsmasse zeichnet sich, selbst aus der Ferne gesehen, dadurch aus, dass der bleigraue Ton ihrer Verwitterungsfarbe ins Röthlichgraue überspielt, wodurch sie gegen die hellgraue Färbung der jüngeren Kalk- und Dolomitschichten und das dunkle Grau der Liasschiefer sehr bestimmt sich unterscheiden lässt.

Auch an der Nordseite der Kuppe des Piz Umbrail tauchen auf dem Grat gegen den Piz Lat wieder krystallinische Schiefer unter dem Dolomit auf wie am Sattel gegen den Rims-See und tiefer hinab im Klosteralp-Thal gegen Val cava. Die am See aufgehäuften kalkigen Gesteine scheinen nicht einem hier durchstreichenden Kalkzug anzugehören, sondern dem Zusammenbruch eines unterwaschenen und verstürzten, ursprünglich höher gelagerten Gebirgsstocks zu entstammen.

---

1) Theobald, Geolog. Beschreib. d. NO.-Geb. v. Graubünden, 1863, S. 329 und Beiträge z. Geol. Karte der Schweiz. 3. Lief. 1866, S. 340.

Der nördlichste Gebietstheil Italiens in den Gebirgen bei Livigno.

Das zu Italien gehörige nördlichste Alpengebiet schneidet mit einer spitz zulaufenden Ecke bei Livigno tief in das Schweizer Hochgebirge hinein. Fast ringsum durch hohe Pässe von dem übrigen italienischen Alpenland abgeschlossen ist der weite, grasreiche und stark bevölkerte Thalkessel von Livigno nur durch das von hier aus zum Inn bei Zernetz ausmündende schluchtenartige Spölthal gegen die Schweiz geöffnet und mit ihr in engeren Verkehr gesetzt. Wegen dieses Abschlusses vom übrigen italienischen Gebiet sind auch der Livigno-Gemeinde besondere Freiheiten und Privilegien in Bezug auf Zoll, Steuern und Verwaltung verliehen, welche die Verbindung mit der Schweiz erleichtern sollen.

Man erreicht diese in vielen Beziehungen eigenartige Landschaft am leichtesten auf einem allerdings nur dürftig hergestellten und unterhaltenen, von der Ofen-Poststrasse sich abzweigenden Fahrwege durch das Spölthal vom Ofenwirthhaus (Ilg Fuorn), einem früheren, jetzt verfallenen Eisenhüttenwerk, aus, das seine Erze z. Th. aus den Bergwerken bei Buffalora, z. Th. aus der Umgegend von Livigno bezogen hat.

Die Gebirgsverhältnisse zwischen diesem einsamen Hause und St. Maria im Münsterthale, das wir bereits auf dem Wege zum Piz Umbrail berührt haben, sind schon in einer früheren Abhandlung[1]) geschildert. Wir ergänzen dieselben nach neueren Beobachtungen durch einige Nachträge. Im auffallenden Gegensatz zu der spärlichen Entwicklung der sericitisch-quarzitischen Schiefer unmittelbar unter den Gypsschichten und den schwarzen Dolomiten am Fusse des Piz Umbrail begegnen wir im Münsterthal zwischen Fuldera und

1) v. Gümbel, Geolog. a. d. Engadin in die Jahresber. d. naturforsch. Gesellsch. Graubündens XXXI, S. 30 und ff.

Cierfs neben der Strasse liegenden grossen Felsblöcken einer Verrucano-artigen Breccie, welche aus nicht oder wenig abgerollten, grünen, rothen und bunt gefleckten Trümmern eines sericitischen Gesteins und glimmerreichen Gneisses oft mit grossen Orthoklasausscheidungen zusammengesetzt ist. Eine thonig sericitische Zwischenmasse verbindet diese Bruchstücke zu einer festen, deutlich geschichteten Masse, die an den Gehängen stellenweise aus dem Schutt in riffartigen Felsen aufragt, während auf beiden Thalseiten hohe, zackige Kalkberge im Süden Durettas, Piz d'Ora, Piz Daint, im Norden die weissen Spitzen der Berge des oberen Scarl-Thales, Munt da Lü und Mt. della Bescha sich darüber erheben und die Verbindung des Kalkzugs der Ortlergruppe mit jenem des Engadins vermitteln. Am Ofenpass Sur Som stehen die nördlichen und südlichen Kalkbildungen unmittelbar in Zusammenhang und breiten sich dann in westlicher Richtung bis zum Innthal zwischen Zernetz und Scanfs zu einer der ausgedehntesten, wildesten, unwegsamsten und auch am wenigsten begangenen Berggruppe des inneralpinen Kalkzugs aus. Hier reihen sich an Piz Umbrail und Ciumbraida (3123 m) die meist stark vergletscherten Kalkberge, P. Murtaröl (3177), Pizzo del Ferro (3044), Piz del Diavel (3072), P. Quater Vals (3157), P. Casana (3072), P. d'Esen (3130) u. A. an.

Diese grossartige Kalkmasse wird in fast rein N.-S. Richtung von der Thalschlucht des Spölflusses zwischen Ofenstrasse und Livigno quer durchschnitten. Livigno liegt am Südende dieses tiefen, felsigen Querbruchs an der Grenze zwischen Kalk- und Schiefergebirge auf einem grossartig erweiterten, durch Gesteinsschutt ausgefüllten und verebneten, alten Seeboden. Die unterhalb dieser Thalerweiterung quer vorgelagerten festeren Kalkbänke bildeten vordem einen Damm, hinter welchem die zahlreichen Berggewässer sich zu einem Wasserbecken sammelten und anstauten, bis endlich die Ausnagung des Wasserabflusses tief genug und die Ein-

schwemmungen in den Seekessel hoch genug geworden waren, um letzteren bis auf einzelne sumpfige Strecken trocken zu legen.

Das durch diesen Einbruch des Spölthales blossgelegte Schichtenprofil des ganzen Kalkstocks von seiner Nord- bis zu seiner Südbasis gehört zu den grossartigsten und am leichtesten zugänglichen Entblössungen, welche ich im Gebiete des inneralpinen Kalkzugs kennen gelernt habe und verdient eine eingehendere Beschreibung.

Gehen wir vom Ofenwirthshaus aus, so sehen wir zunächst an der Poststrasse nach Zernetz abwärts die mit den sog. Verrucano-Conglomeraten eng verbundenen, theils sandigen, theils kieselig-sericitischen Schichten in vielfachen Entblössungen zu Tag treten. Die rothen Sandsteine und thonig-sandigen Schiefer gleichen bereits vollständig den sog. Werfener Schichten und den Gesteinen dieser Region in den Bergamasker Alpen z. B. bei Collio.

Da, wo in der Nähe der Brücke über den Ofenbach der Weg nach Livigno von der Poststrasse sich südwärts abzweigt und über einen Bergrücken dann zum Spölthal niederzieht, zeigen sich zunächst über den Sandsteinlagen in dünngeschichteten Bänken anstehend tief schwarze Dolomite mit Kieselausscheidungen und kleinen weissen Kalkknöllchen von derselben Beschaffenheit, wie solche Gesteine in der Gegend von Sulten und bei Bormio im Ortlerstock, auch im Piz Umbrail als zweite, dem Muschelkalk entsprechende Stufe der Trias sich einzustellen pflegen. Die Schichten sind vielfach, namentlich auf der Sattelhöhe von Glacialschutt bedeckt. Doch treten am tieferen Gehänge, ehe man in die Thalsohle des Spölbachs gelangt, die gleichen schwarzen Dolomite und Kalke wieder zu Tag und bilden auch hier das Hangende der rothen Sandsteine, welche von da an in beträchtlicher Mächtigkeit im Spölthale aufwärts durch den Wegbau reichlich blossgelegt sind. Die Schichten

fallen hier nach NO. ein und bestehen zunächst unter dem dünnplattigen, schwarzen Dolomit aus eigenthümlichen, hellfarbigen, weisslichen und schwach röthlich gefärbten flasrigen Kalken, unter denen sich sofort gelbliche, röthliche und grünliche Sandsteine und quarzige Schiefer herausheben. Ihre Beschaffenheit erinnert lebhaft an die Seisser- und Campilerschichten. Oberhalb eines Seitengraben biegen sich diese Lagen um und neigen sich nunmehr nach SW. Von hier an herrschen grünlich gefärbte, thonige Schiefer, die den grünen Schichten am Mitterberg bei Bischofshofen gleichen, vor und es folgen dann rothe plattige Sandsteine. Auf den Schichtflächen der letzteren machen sich sehr häufig ausgezeichnete Wellenfurchen und wulstige Rippen bemerkbar, wie solche auch sonst im Buntsandstein vorzukommen pflegen. Eine Zwischenschicht, deren intensiv eisenrostige Färbung einen hohen Gehalt an Eisen verräth, enthält linsenförmige Ausscheidungen von unreinem Spatheisenstein, ähnlich jenen in der Gegend von Werfen. Ueberhaupt gewinnt die ganze Schichtenreihe vollständig das Aussehen der Buntsandsteinschichten im Salzachgebiet der Ostalpen.

Weiter thalaufwärts folgen darüber regelrecht wieder die oben erwähnten hellfarbigen Flaserkalke in geringer Mächtigkeit und über diesen dann schwarze plattige Dolomite, in welchen hier und da auf den abgewitterten Flächen die weissen Ringe der *Gyroporella pauciforata* zum Vorschein kommen. Es stellen sich weiter im Hangenden jene weiss gefleckten dünnen Platten mit eingestreuten kleinen weissen Kügelchen ein, welche für die tiefere Dolomitstufe der inneralpinen Zone charakteristisch sind. Noch weiter aufwärts stehen plattige, dunkle Mergelkalke mit uneben wulstigen Schichtflächen an und gewinnen dadurch eine grosse Aehnlichkeit mit dem Virgloriakalke.

Bis zum tiefen Einschnitt des von SO. kommenden Val del Gallo an der italienischen Grenze herrschen mit etwas

abweichender, im Allgemeinen südwestlicher Fallrichtung sehr mächtige Bänke von gleichfalls schwarzen Dolomiten und Kalken, welche stark splittrig sind und von ungemein zahlreichen weissen Kalkspathäderchen durchzogen werden. Ihnen gesellen sich heller gestreifte Lagen und jene höchst eigenthümliche, breccienartig zusammengesetzte Dolomite bei, welche auch am Ortlerstock, am Piz Umbrail u. s. w. angetroffen werden und in den Radstädter Tauern eine so grosse Rolle spielen. Jenseits d. h. südlich der Einmündung des Val del Gallo stellen sich zunächst gleichfalls tief schwarz gefärbte Dolomite und Kalke mit SW. Einfallen in dicken Bänken geschichtet ein. Ihnen auflagernd folgen dann auffallend dünnplattige, ebenflächige, dunkelschwarze Kalkschiefer, welche den Fischschuppen einschliessenden Lagen bei Bormio gleichen. Sie lassen sich so dünn spalten, dass man sie wohl als Dachdeckmaterial verwenden könnte.

Die Schichtenfolge ist sodann unterbrochen. Denn von hier an beginnen weiter thalaufwärts die Schichten wieder ein nördliches Einfallen anzunehmen und im Thal selbst begegnet man, einzelne Stellen ausgenommen, aufwärts nur mächtigem Gesteinsschutt, den die zahlreichen seitlichen Wasserrinnen von den hohen Berggehängen herabbringen. Es sind durchweg kalkige und dolomitische Gesteine, wie wir solche zuletzt im oberen Theile des Thales anstehend beobachtet haben.

Das nördliche Einfallen der Schichten herrscht auch, so weit sich dies aus der Ferne beurtheilen lässt, an den kahlen Felswänden, welche rechts und links bis zu den über 3000 m hoch aufragenden Kalkbergen empor steigen. Es scheint, dass in Folge dieser muldenförmigen Umbiegung die höheren d. h. jüngeren Schichten hier nicht bis zur Thalsohle herabreichen, sondern auf die höheren Gebirgstheile sich beschränken.

Das durch Wasserrisse herabgeführte Gestein erscheint im Allgemeinen hellfarbiger, als das der in der Thalsohle

aufgehäuften Trümmerhalden; es kann dies aber wohl auch nur Folge der oberflächlichen Verwitterung sein. Ein sehr deutlicher Unterschied in der petrographischen Beschaffenheit — organische Einschlüsse fehlen — lässt sich kaum feststellen. Nur fleckweise zeigen sich auf den höchsten Spitzen rothe Färbungen, z. B. am Dosso del Ferro und die von diesen Höhen herabgeschwemmten Gesteinstrümmer bestehen z. Th. aus röthlichem Kalk, welcher dem Lias anzugehören scheint. Ein Haufen von derbem Rotheisenstein, welcher aus früherer Zeit stammend in der Nähe der Mündung des Val di Trepalle an einer offenbar als Sturzplatz dienenden Stelle angetroffen wurde, scheint aus den benachbarten Bergen gekommen zu sein, welche die darauf hindeutende Bezeichnung „Dosso del Ferro" und „Pizzo del Ferro" wohl von diesem Erzvorkommen erhalten haben. Ganz gleiche Erze werden wir später im Lias des Piz Patella bei St. Moritz näher kennen lernen.

Erst an der Mündung des Val di Trepalle zeigt sich im Thale selbst eine deutliche Aenderung in der Gesteinsbeschaffenheit, indem hier riffartig ausgewitterte Bänke von grauen, mergeligen Kalken mit zwischenlagernden aschgrauen Mergelschiefern dem Seitenthal entlang ausstreichen. Diese Schichten umschliessen zahlreiche, aber auffallend dicht mit dem Gestein verwachsene, daher schwierig zu gewinnende Versteinerungen. Doch lässt sich soviel erkennen, dass diese Lagen der rhätischen Stufe angehören, wie sie auch Theobald richtig auf die Karte eingezeichnet und wie ich sie weiter östlich im Valle di Fraele bei Campaccio und Raspodino (U. d. Thermen von Bormio S. 109) an mehreren Stellen angetroffen habe. Im Spölthale wird dieser Schichtenzug durch eine streichende Verwerfung sofort wieder abgeschnitten. Denn es stehen hier gleich N. von der Mündung des Val di Trepalle wieder schwarze plattige Kalke am Gebirgsfuss an, welche, wie wir gleich nachweisen wer-

den, sicher der tieferen Triasstufe zugerechnet werden müssen.

Wir sind damit an dem unteren Ende der weiten Fläche des Thalkessels von Livigno angelangt, welcher südwärts von weit milder geformten Schieferbergen umschlossen ist als das enge, in wildzackigen Kalkfelsen eingeschnittene untere Spölthal. Die quer durch das Thal streichenden Bänke dieses Kalkgebirgs bildeten einst den früher erwähnten Damm, hinter welchem die Gewässer zu dem See von Livigno angesammelt waren. Auf beiden Seiten dieses jetzt ausgefüllten alten Seebeckens heben sich von der Mündung des Frederia-Thales an die krystallinischen Schiefer aus der Thalsohle hervor und dienen dem nördlich auf- und angelagerten Kalkgebirge zum Fundamente, wie die ähnlichen Schiefer am Südfusse des Ortlerstocks. Im Grossen und Ganzen haben wir auch hier das Kalkgebirge als eine Muldenbildung zwischen älteren Schieferschichten aufzufassen.

Diese krystallinischen Schiefer rechnet Theobald[1]) zu seinem sog. Casanaschiefer, für welchen diese Bezeichnung nach dem Vorkommen des Gesteins in nächster Nähe von Livigno, nämlich vom Casanapass, dem Sattel und Uebergangspunkt von Livigno nach Scanfs im Innthal, gewählt wurde. Theobald fasst unter dieser Benennung Mittel- oder Uebergangsformen zwischen Gneiss-artigen, Glimmerschiefer-ähnlichen und Thonschiefer-gleichen, krystallinischen Schiefergesteinen zusammen, welche die unmittelbare Unterlage des sog. Verrucano oder der diesen vertretenden unteren Triasablagerungen ausmachen und in den obersten Lagen in sog. Verrucano übergehen. Nach den von ihm selbst gesammelten

1) Theobald in: Geol. Beschreibung v. Graubünden 1863 S. 45 und ff. schreibt Casannaschiefer. Doch findet sich auf den Karten durchweg die Schreibart Casana (Casanapass, Piz Casana, Alpe Casana, Piz Casanella u. s. w.), wesshalb man wohl dem entsprechend Casanaschiefer zu schreiben hat.

und unter dieser Bezeichnung in der Churer Sammlung niedergelegten Handstücken, die ich genau verglichen habe, sind darunter sehr verschiedenartige Gesteine vereinigt nämlich von typischem Gneiss und wechselnd zusammengesetztem Sericitschiefer bis zu deutlich klastischen, schiefrigen Schichten, welche allerdings sehr Sericitschiefer-ähnlich sind, die ich aber nur als sekundäre, aus aufgewühltem Untergrund entstandene Bildungen ansehe. Es lag mir daher besonders viel daran, das Gestein von dem Fundpunkte, dem Casanapass selbst, näher kennen zu lernen, von dem der Name herstammt.

In der That finden sich in der nächsten Umgebung von Lavigno und des Casanapasses krystallinische Schiefer weit verbreitet, auf welche die Theobald'sche Beschreibung passt. Es sind meist typische Gneisse aus Glimmer, Quarz und Orthoklas — letzterer selbst nicht selten in grösseren Ausscheiden (Augengneiss) — zusammengesetzt, welchen jedoch an manchen Stellen durch chloritische und sericitische Beimengungen eine gewisse Eigenartigkeit aufgedrückt ist.

Oft zeigen sich auch Hornblende-haltige Gneisse, denen hornblendige, dioritische und Chloritschiefer in untergeordneten Zwischenlagen beigesellt sind. Glimmerreiche, quarzitische Schichten vermitteln einen Uebergang in Glimmerschieferartige Gebilde, welche jedoch weder dem Charakter, noch der Mächtigkeit nach die Bedeutung einer ausgeprägten Glimmerschieferstufe gewinnen. Sie nehmen meist sehr rasch die Beschaffenheit schuppiger Phyllite an oder verlaufen in sericitische Quarzitschiefer. Solche phyllitische, sericitische und quarzitische Schiefer treten sehr häufig in der Nähe der auflagernden jüngeren Sedimentgesteine auf. Da letztere in manchen Gegenden in den tiefsten Lagen durch sericitisch-quarzitische Schichten vertreten werden oder der in dieser Region entwickelte sog. Verrucano auf das Engste mit derartigen Schiefern verbunden ist, sich sogar öfter daraus entwickelt und durch Wechsellagerung mit demselben sich ver-

gesellschaftet zeigt, so ist es in der That in vielen Gebirgsstrichen namentlich da, wo keine Ungleichförmigkeit der Lagerung besteht oder wenigstens nicht deutlich sich beobachten lässt, sehr schwierig, zwischen den krystallinischen und den dem sog. Verrucano angeschlossenen Schiefern eine scharfe Grenze zu ziehen.

Doch zeigt es sich, dass die letzteren überwiegend eine klastische Zusammensetzung, wie sich in zweifelhaften Fällen in Dünnschliffen mikroskopisch nachweisen lässt, besitzen und darnach sich unterscheiden lassen.

So verhält es sich auch in der Umgegend von Livigno und in der Nähe des Casanapasses, von wo Theobald den Typus seines Casanaschiefers genommen hat. Es scheint daher räthlich, diese sehr unbestimmte Bezeichnung auf diejenigen sericitisch-quarzitischen Schiefer von klastischer Zusammensetzung, welche ihr Material grösstentheils den aufgewühlten Untergrundsgesteinen, den krystallinischen Schiefern, entnommen haben und den Verrucano ersetzen oder in denselben verlaufen, zu beschränken und die ächten krystallinischen Schiefer je nach ihrer Mineral-Zusammensetzung als sericitische, chloritische Gneisse, Glimmerschiefer, Phyllite und Quarzite zu bezeichnen, bei welchen es früher oder später wohl auch gelingen wird, sie in geordnete Systeme zu gliedern und zu sondern.

Fast nicht weniger schlimm verhält es sich mit der Bezeichnung Verrucano[1]), wie dies neuerlich in so ausführlicher Weise Dr. Milch dargelegt hat. Gehen wir auf das Vorkommen an der den Namen gebenden Stelle (Verruca in Italien) zurück, so ist die Zugehörigkeit dieses Verrucano in Italien zum Karbon[2]) wohl als sicher festgestellt

1) L. Milch, Beiträge z. Kenntniss des Verrucano 1892.

2) Unglücklicher Weise wurde die mittelitalienische Bezeichnung von Studer auf alpine Conglomerate übertragen, ohne dass die Identität nachgewiesen wurde.

anzunehmen. Manche der in den Westalpen mit diesem Namen bezeichneten Conglomerat- und Sandsteinbildungen dürften wohl dem Gestein von Verruca im Alter gleich stehen, z. B. das Conglomerat von Mano unfern Lugano, am Monte Columbano u. s. w. Bei weitem die meisten Vorkommnisse des sog. Verrucanos jedoch nehmen hier sicher eine höhere Stellung ein und entsprechen entweder dem ausseralpinen Rothliegenden oder einer tiefsten Stufe des Buntsandsteins und der Werfener Schichtenreihe. Ueber diese Zutheilung oder vielleicht Trennung in zwei verschiedenaltrige Glieder herrschen bis jetzt noch sehr abweichende Ansichten. So lang dies sich nicht geklärt hat, oder wenn die Entscheidung hierüber nach der Natur der Verhältnisse eben nicht zu treffen ist, möchte es im Allgemeinen wohl räthlich erscheinen, für diese Zwischenbildung über dem Karbon und unterhalb der dem Muschelkalk im Alter gleichstehenden Schichten die vieldeutige Bezeichnung Verrucano ganz aufzugeben und dafür den schon von Reich und Tröger[1]) 1860 in Anwendung gebrachten Namen „Sernf-Conglomerat" oder Sernfit[2]) (nicht Sernifit) in Gebrauch zu nehmen. Die damit namentlich im Hangenden vielfach verbundenen vorherrschend rothen Sandsteine könnte man als bunte Sernfsandsteine und die meist noch höher liegenden buntfarbigen, sandig kieseligen Schiefer, obgleich sie meiner Meinung nach sicher dem Werfener Schiefer entsprechen, als bunte Sernf-Schiefer bezeichnen.

In diesem Sinn sollen im Nachfolgenden die eben erwähnten Bezeichnungsweisen in Anwendung kommen.

Kehren wir zur näheren Betrachtung der Gebirgsverhältnisse der Umgegend von Livigno zurück, so ist zu-

1) Ueber Kupfer- und Silberbergb. an d. Mürtschenalp in Berg- und Hüttenm.-Zeitung 1857, S. 168 und 1860, S. 305.

2) Nach dem Sernf-Thal, demgemäss nicht Sernifit, wie Heer schreibt, und nicht, ins Italienische übertragen, Servino.

nächst zu bemerken, dass an den gegen Süden gelegenen Thalgehängen des langgezogenen Beckens beiderseits deutlich ausgebildete Gneissschichten anstehen. Schlägt man von Livigno aus den nach Trepalle führenden Weg ein, so zeigen sich zunächst über der Thalsohle einzelne aus dem mächtigen Glacialschutt hervorragende Felsen von chloritischem Glimmerschiefer mit Zwischenlagen Feldspath führender quarzitischer Schichten. Gegen die Höhe und nordwärts gegen die Kalkwände des Mt. Trepalle gehen diese Schiefer in chloritischen Phyllit über, der in einem hoch aufragenden Felsenriff eine stark quarzige Beschaffenheit annimmt und Quarzlinsen mit ausgeschiedenem Chlorit neben Orthoklas umschliesst. Zahlreiche wilde Gräben, welche sich gegen das Spölthal hinabziehen, entblössen in beträchtlicher Mächtigkeit milde, z. Th. graphitische Phyllitschichten mit vorherrschend N. Einfallen. Sie bilden die Unterlage des rothen Sernfconglomerats, das sich in etwa 2250 m Höhe ziemlich gleichförmig darüber anlegt und mit quarzigem Casanaschiefer wechsellagert. Nach oben folgen dann grüne und rothe quarzitische Sandsteine und Schiefer, über welchen unmittelbar Bänke eines tiefschwarzen Dolomits mit Hornsteinausscheidungen lagern, wie im Eingang ins Spölthal. Eine zweite höhere Stufe zeichnet sich durch eine rostige Verwitterungsfärbung des an sich dunklen Gesteins aus. Darüber breiten sich bankartig geschichtete, schwarze Dolomite mit ziemlich zahlreichen Versteinerungen, namentlich *Crinoideen*-Stielen (*Encrinus* spec.) und *Brachiopoden* des alpinen Muschelkalks, bis gegen die Kuppe des Bergs aus, wo jene splittrig schwarzen, wohlgeschichteten, oft schiefrigen Dolomite oder Kalke ausstreichen, welche wir bereits südwärts von der Mündung des Val di Trepalle am Fusse des Gebirgs kennen gelernt haben.

Auf der anderen westlichen Thalseite führt der Weg ins Val Frederia zuerst über gneissartige Schichten zu ihnen

auflagernden, chloritischen Phylliten mit vielen Quarzlinsen. In der Nähe einer Kapelle streichen chloritische Quarzite zu Tag aus; dann tauchen aufs Neue gneissartige Schiefer und bei der ersten Alphütte sehr deutlich ausgebildete Augengneisse auf. Im Aufsteigen zum Casanapass herrschen dann wieder Glimmer-reiche Schiefer und zu oberst chloritische Phyllite, welche die Unterlage der klastisch zusammengesetzten sericitischen Quarzite, der typischen Casanaschiefer Theobald's, ausmachen und, soweit der mächtig aufgehäufte Gesteinsschutt es beobachten lässt, in das rothe Sernfconglomerat verlaufen. Weit vollständiger ist der Aufschluss in einem Seitenthal von Val Frederia, im Val Saliens. Man beobachtet hier in dem tief eingeschnittenen Bachrinnsal über den weichen phyllitischen Schichten eine Reihe grüner quarzitischer Schiefer von klastischer Zusammensetzung mit Quarzadern und mit reichlich in denselben vorkommenden Epidotansiedelungen. Darüber folgt bei etwa 2100 m Meereshöhe dasselbe rothe Sernfconglomerat, wie auf der östlichen Thalseite. Es ist ungefähr 10 m mächtig und wird 20 m hoch bedeckt von grünen und rothen quarzitischen und sandigen Sernfschieferschichten. Hier ist die unmittelbare Auflagerung des schwarzen Hornstein-führenden Dolomits deutlich entblösst (5 m mächtig), wie auch die ganze höhere Schichtenfolge bis zum Liasschiefer, nämlich zunächst auffallend dünngeschichteter, intensiv schwarzer Kalkschiefer, der in klotzige Kalke oder Dolomite übergeht (15 m), dann graue splittrige Dolomite, petrographisch dem Hauptdolomit ähnlich, aber nur 60 m mächtig, ferner riffartig ausgewitterte Mergelkalke voll Versteinerungen, wie am Ausgang des Val di Trepalle, der rhätischen Stufe entsprechend und endlich in direkter Auflagerung schwarzer Lias-Mergelschiefer im Wechsel mit grauen, dunkelfleckigen Kalken in mässig dicken Bänken. Man kann diese Schichten 150 m weit in der Bachsohle verfolgen, bis sie von Gletschereis überdeckt werden,

aber in erstaunlicher Mächtigkeit sich einerseits zum Piz Casana, andererseits zum Mt. Motto emporziehen.

Dass diese Schichten dem Lias angehören, beweisen die nicht seltenen Einschlüsse von *Belemniten* und die ungemein häufigen Algenreste, welche im Schiefer, wie im Fleckenkalk vorkommen. Manche Lagen sind auch so von Spongiennädelchen[1]) vollgespickt, dass derartige Stücke auf der verwitterten Oberfläche wie mit Spinnengewebe überzogen zu sein scheinen.

Am merkwürdigsten in diesem Profil ist die geringe Mächtigkeit der Kalk- und Dolomitschichten zwischen dem schwarzen Muschelkalk und den rhätischen Mergelkalkbänken, welche doch in nächster Nachbarschaft eine so enorme Ausbreitung besitzen. Es ist in hohem Grade wahrscheinlich, dass eine streichende Verwerfung vom Val di Trepalle herkommend eine grossartige Senkung des N. vorliegenden Gebirgs bewirkt hat. Denn auch am Steig auf die Höhe des Mt. Motto zeigen sich schon bei 2000 m Meereshöhe die ersten Schollen von Liasfleckenmergel, die beiläufig eine Mächtigkeit von 500 m erlangen, während die tieferen kalkigen und dolomitischen Lagen auf etwa 150 m beschränkt sind.

Val Trupchum bei Scanfs.

Die Thalebene von Livigno steht durch den Casanapass und durch Val Casana, einem Seitenthal von Val Trupchum, welches bei Scanfs in den Inn einmündet, in NW.

1) Es finden sich diese Spongiennädelchen an einzelnen Algenresten so angehäuft, dass man bei oberflächlicher Besichtigung zu der Annahme verführt werden könnte, diese Nadelmasse gehöre einem Spongien-Körper von Algen-ähnlicher Form an. Erst die mikroskopische Untersuchung in Dünnschliffen zeigt, dass wir es mit einem Haufwerk verschiedenartiger, vorherrschend *Monactinelliden*-, seltener *Tetractinelliden*-Nädelchen zu thun haben. Aehnliche Einschlüsse sind durch v. Dunikowski vom Schafberg beschrieben worden (Denkschr. d. Wien. Akad. d. Wiss. Bd. XLV. 1882).

Richtung mit dem Oberengadin in unmittelbarer Verbindung. Bekanntlich heben sich hier die älteren Sedimentärgebilde unter dem Kalkgebirge wieder in grossartiger Entwicklung empor und werden durch tiefe Thaleinschnitte auf weite Strecken hin blossgelegt. Dieses findet namentlich im Trupchumthal statt, in welchem nach Theobald die Liasfleckenmergel bis in die Thalsohle hinabreichen. Ein guter Fahrweg führt von Scanfs am Inn über einen von Gehängeschutt überdeckten Vorberg in dieses tief eingeschnittene, langgestreckte Seitenthal, welches man bei den Häusern Molins betritt. Ehe man in dasselbe niedersteigt, zeigen sich neben dem Wege graue und grüne Phyllite wie im krystallinischen Grundgebirge bei Livigno. An den Häusern von Molins treten dann darüber mächtige Bänke des rothgefärbten Sernfconglomerats aus der Thalsohle unter dem Gehängeschutt hervor und reichen, durch den Wegbau gut aufgeschlossen, ziemlich weit ins Thal hinauf. Sie bilden gleichsam die Fortsetzung der analogen Schichten bei Livigno im Casanagebirge und im Spölthal. Mit den Conglomeraten welchsellagern auch hier grüne sericitische Schichten vom Typus der Casanaschiefer. Höher im Thal machen die Conglomerate rothen Sandsteinen Platz und es gewinnen dann grüne, rothe und graue, schiefrige, sandige Quarzite weiter aufwärts die Oberhand. Hellfarbige, grünliche, flasrige, dünnbankige Mergelkalke schliessen diese Gesteinreihe im Hangenden ab und es folgen darüber, wie im Spölthal, erst schwarze, z. Th. Rauhwacke-artige Dolomite mit schwachen Gypseinlagerungen und dunkle, gelblich verwitternde Dolomite in beträchtlicher Mächtigkeit bis mächtiger Gehängeschutt sich einstellt, durch welchen die weiteren Gesteinsbildungen überdeckt und unkenntlich gemacht werden. Erst kurz vor der Stelle, an welcher Val Casana von S. her einmündet, heben sich Felsköpfe eines schwarzen, lichtgrau auswitternden Dolomits mit Quarzausscheidungen und kleinen weissen

Knöllchen, wie in den tieferen Dolomitbänken bei Livigno, aus der Ueberdeckung heraus. Dann verhüllt aufwärts wieder Gehänge- und Thalschutt die durchstreichenden Gesteinsschichten bis in die Nähe der Alpe Porchêr.

In dem Haufwerk von Gesteinstrümmern, welches die erste grössere Seitenschlucht von N. in der Nähe der Stelle, wo auf der Dufour'schen Karte die Bezeichnung Chanels eingeschrieben ist, stechen intensiv rothe, splittrige Hornsteine und rothe, grüngefleckte quarzige Mergelschiefer sofort in die Augen. Dadurch aufmerksam gemacht, bemerkt man hoch oben in dieser Schlucht an den Südsteilgehängen des Piz d'Esen über einer mächtigen Lage schwarzen Gesteins einen Streifen intensiv rother Schichten, aus denen ohne Zweifel die erwähnten Bruchstücke herstammen. Letztere gleichen so sehr den rothen Jurahornsteinen der nordalpinen Aptychenschichten, dass ich sofort nach den diese auszeichnenden, durch weisse Pünktchen sich verrathenden Radiolarieneinschlüssen suchte und dieselben auch alsbald reichlich auffand. Dass diese punktartigen Einschlüsse wirklich von *Radiolarien* herrühren, habe ich später in Dünnschliffen unter dem Mikroskop bestätigt gefunden.[1]) Jeder Zweifel darüber, dass diese rothen Gesteine genau den nordalpinen Juraaptychenschichten entsprechen, wurde alsbald beseitigt, indem ich nach kurzem Suchen auch die charakteristischen Juraaptychen, *Aptychus protensus* und *Apt. pumilus*, in dem rothen, grüngefleckten Schiefer auffand. Es hat schon Rüst[2]) zahlreiche *Radiolarien* in rothem Jaspis

1) Vorläufige briefliche Mittheilungen in N. Jahrb. f. Min. etc. 1892, II S. 162.

2) Rüst in Palaeontographica XXXI, S. 276. Nach gefälliger briefl. Mittheilung von Herrn Prof. Heim gehört das Vorkommen von rothem Jaspis am Uetliberg der Miocännagelfluh, nicht dem sog. Uetliberg-Conglomerat an. Dabei bemerkt derselbe, dass er schon vor einer Reihe von Jahren rothen Jaspis auf der Nordseite des Julier

in der Schweiz nachgewiesen, aber nur in Gesteinsstücken, welche als Geschiebe in Schweizer Flüssen (Rhein, Aare, Reuss, Limmat) oder auf sekundären Lagerstätten als Einschlüsse in jüngeren Conglomeratbildungen gefunden wurden. In dieser Seitenschlucht vom Val Trupchum konnte ich das Ausstreichende der rothen Aptychenschichten an der steilen, schüttigen Felswand nicht direkt erreichen, aber doch so viel feststellen, dass sie hier auf dem liasischen Fleckenmergel auflagern. Dasselbe Verhältniss wurde dann in dem obersten Theil des benachbarten Val Müschems in einem gut aufgeschlossenen Profil direkt festgestellt.

Bevor man im Hauptthale die Alphütte Porchêr erreicht, heben sich aus dem Schutt die dunkelfarbigen Liasfleckenmergel zu Tag heraus und stehen der Hütte gegenüber in einer hohen Felswand vollständig blossgelegt an. Es umschliessen hier die vorherrschenden Mergelschiefer dünne Bänke von Fleckenkalken wie im Val Saliens und am Mt. Motto bei Livigno. Die Schichten fallen hier unter 35° nach NW. und zeigen sich in der bizarrsten Weise zusammengefaltet, gekrümmt, verbogen und geknickt, dementsprechend von zahllosen weissen Kalkspathadern durchzogen und mit Kalkspathlinsen erfüllt. Die letzteren sind offenbar nachträglich gebildete Ausfüllungen der in Folge der Verbiegungen entstandenen Hohlräume. Trotz des enormen Drucks, welcher die Krümmung der Schichten bewirkt hat, kann man keine Spur von Schieferung an den Gesteinsschichten wahrnehmen und die in enge Falten scheinbar ohne Bruch in Folge der sog. latenten Plasticität (?) zusammengebogenen Gesteine erweisen sich in Dünnschliffen in zahllose Splitterchen zersprengt, die durch weisse Kalkspathsubstanz wieder zu einer festen Masse verbunden sind.

(Val d'Agnelli) massenhaft gefunden, aber darüber noch Nichts publicirt habe. Meinen Beobachtungen nach gehören jedoch diese rothen Gesteine den Sernfstufen u. nicht den Juraaptychenschichten an.

Diese Liasbildung hält nun durch das ganze obere Trupchum-Thal weit über die Alphütte Trupchum an. Trotz eifrigem Suchen in den ausgedehnten Schutthalden, die bis zur Thalsohle herabreichen, konnte ich ausser den reichlich vorkommenden Algenabdrücken, Spongien-Nädelchen und Belemniteneinschlüssen keine weiteren Versteinerungen auffinden, obwohl in der Churer Sammlung ein angeblich aus diesem Thal stammender *Ariet-Ammonit* aufbewahrt wird.

Ich verfolgte diese Liasschichten bis zu den Schneeflecken unter den Kalkspitzen des Piz Fier und konnte hier an mehreren Stellen deutlich beobachten, dass die Liasschiefer oben unter den ihnen ungleichförmig aufliegenden Kalk- und Dolomitschichten untertauchen. Es liegt hier also eine grossartige Ueberschiebung älterer Schichten über jüngere vor. Am Klamm-artigen Ausgang des Trupchum-Thals in das Innthal stehen schroffe Felsen der Sernfconglomerate an, deren Bänke einer Sattelumbiegung der an den Häusern Molins anstehenden Schichten zu entsprechen scheinen. In der Nähe ist am Innthalrande das Ausgehende eines Gyplagers bekannt. Das Verhältniss desselben zum Conglomerat ist wohl das nämliche, wie das im Trupchum-Thal erwähnte, was sich hier wegen des Gehängeschutts nicht direkt beobachten lässt. Geht man aber auf einem am Gebirgsfuss hinziehenden Weg nordwärts weiter, so kommt man sofort auf eine verebnete, hochgelegene Thalterrasse, auf welcher zahlreiche kesselförmige Vertiefungen wohl von ausgewaschenen Gypslinsen herrühren. Zugleich zeigen sich auch Spuren, dass früher einmal der Inn auf dieser Höhe geflossen ist. Auf der jenseitigen NW. Thalseite stehen an der Strasse von Scanfs nach Zernetz reichlich Bänke des aus zahlreichen Profilen bekannten tiefschwarzen Dolomits mit Hornsteinausscheidungen und kleinen weissen Knöllchen an, welche die nächste Schichtenreihe der Sernfschiefer und -Conglomerate zu bilden pflegen; daher wohl auch hier diese Ge-

steinslagen dem alpinen Muschelkalk gleichzustellen sind und der Fortsetzung des Kalkgebirgs auf der nördlichen Innseite gegen Albula und Piz Uersch hin entsprechen.

St. Moritz in geologischer Beziehung.

Der Hauptzug der dem krystallinischen Gebirge aufgesetzten jüngeren Schichten des Trias- und Jurasystems, welchen wir vom Ortler her westwärts bis zum Inn verfolgt haben, schlägt unterhalb Ponte eine Richtung über den Albula Pass und die hohen Berge von Bergün bis Oberhalbstein ein. Doch stösst man auch noch im obersten Engadin auf grössere Partien mesolithischer Ablagerungen, die durch mächtige Gneiss- und Granitstöcke vom Hauptzug getrennt sind, ursprünglich aber mit demselben im Zusammenhang gestanden haben. Das Verhalten dieser so zu sagen letzten Ausläufer des SW. Zweigs der inneralpinen Kalkkette näher kennen zu lernen, schien in Bezug auf das Auftreten der berühmten Mineralquellen von St. Moritz von besonderem Interesse.

Solchen abgesonderten, gleichsam zwischen die krystallinischen Felsmassen eingekeilten Schollen jüngerer, vorherrschend kalkig-dolomitischer Gesteinsschichten begegnet man in grösserer Ausdehnung auf den Höhen im NW. von St. Moritz. Sie beginnen hier in dem Gebirgsstock des Piz Padella, erstrecken sich dann über den wildzackigen Felsgrat der drei Schwestern zum spitzen Kegel des Piz Nair und zu einer Einbuchtung zwischen P. Julier und P. Suvretta, wo sie zwar nicht enden, aber auf einen schmalen Streifen zusammengezogen erscheinen. Von diesem Zug aus breiten sich zahlreiche, oft beträchtlich grosse Schollen über die benachbarten Berggehänge und selbst bis in die Thäler herab aus. Durch häufige Verstürzungen und durch viele beträchtliche Schichtenstörungen sind die Lagerungsweisen dieser jüngeren Sedimentgebilde und der Zusammenhang ihrer ein-

zelnen Glieder, aus welchen sie sich zusammensetzen, in hohem Grade verwickelt und schwierig zu beurtheilen. Wir haben es bei denselben nicht, wie es scheinen könnte, einfach mit einer Schichtenmulde zu thun, in welcher die Gesteinslagen zusammengebogen und in Falten gelegt worden sind, sondern es ist ein vielfach zerrissener, stückweise abgebrochener und abgesenkter, stückweise emporgefalteter, zusammengebogener und überschobener, deckenförmiger Aufbau über dem krystallinischen Grundgebirge, an dessen unternagten Rändern grossartige Niederbrüche und Verrutschungen stattgefunden haben. In letzterer Beziehung sind es namentlich die ziemlich weit verbreiteten und mächtigen Gypsablagerungen, welche durch ihre leichte Zerstörbarkeit zu der erstaunlich grossartigen Zertrümmerung Vieles mit beigetragen haben.

Dazu gesellt sich hier noch ein weiterer zu Verwirrungen und Verwechselung Anlass gebender Umstand, dass nämlich, wie es in dem Alpengebiet ja so oft sich wiederholt, in verschiedenaltrigen Schichtenstufen petrographisch zum Verwechseln ähnliche, in versteinerungsleerem Zustande schwierig zu unterscheidende Gesteinsbildungen wiederkehren. Es ist dies schon von den sog. Casanaschiefern erwähnt worden. Aber auch den grauen, schwach glänzenden Thonschiefern, welche der Phyllitreihe angehören, sehen gewisse graue, quarzitische, stark glänzende Schiefer, welche über dem Sernfconglomerat ihre Stellung haben, überaus ähnlich und selbst dem Lias zuzurechnende, graue schiefrige Gesteine können leicht zu Verwechselungen Veranlassung geben. Aehnlich verhält es sich auch mit gewissen rothen Schieferschichten. Es ist bekannt, dass intensiv rothe schiefrige Gesteine mit dem immer noch räthselhaften Schichtencomplex von Oberhalbstein eng verbunden vorkommen und dass sogar gewissen Serpentinlagen mehrfach rothe thonige Schiefer angeschlossen sind. In fast gleicher Beschaffenheit kehren sie in der Stufe ober-

halb der Sernfconglomerate, welche den Werfener Schichten entsprechen, wieder, und kommen noch einmal in so unzweifelhaftem Schichtenverband mit Lias zum Vorschein, dass man über ihr liasisches Alter nicht im Unklaren sein kann. Endlich schliessen sich auch gewisse oberjurassische rothe Schiefer (Aptychen-Sch.), wie wir sie auch in dieser Gegend bei Scanfs kennen gelernt haben, dieser Reihe an.

Einer andern, öfter zu irrthümlichen Auffassungen verleitenden Erscheinung, welche überall in den Alpen sich wiederholt, begegnen wir auch in diesem Gebirgstheil. Es wechseln nämlich manche Gesteinslagen sehr rasch ihre Beschaffenheit sowohl in Bezug auf ihre Mächtigkeit, als auf ihre petrographische Ausbildung. An einer Stelle ungemein mächtige Conglomeratbänke verschwächen sich in ihrem Fortstreichen auf kurze Strecken so stark, dass man zur Annahme verleitet werden könnte, sie seien durch eine Verwerfung abgeschnitten. An anderen Stellen verlaufen sie bald in sandige Lagen, selbst in Casanaschiefer-ähnliche Schichten. Ebenso schwellen die bunten Sernfschiefer hier in grosser Mächtigkeit an, während sie dort zu schmalen Streifen sich zusammenziehen. Noch auffallender ist das plötzliche Auftauchen mächtiger Bänke von weissem, meist röthlich geflecktem oder geadertem Kalk da, wo sonst in der Nachbarschaft nur grauer Liasmergel entwickelt sich zeigt. Dieser Facieswechsel, den man kurz als Janismus bezeichnen könnte, spielt auch im Oberengadin eine grosse Rolle und es ist desshalb leicht erklärlich, dass man bei den sonst ungemein genauen Angaben und kartistischen Darstellungen Theobald's[1]), welche z. Th. schon durch H. Diener[2]) Berichtigungen erfahren haben, manchen

1) Geolog. Beschreibung von Graubünden in d. Beit. z. geolog. Karte der Schweiz, III. 1886, S. 76 und ff.; dann Blatt XX der geol. Karte der Schweiz.

2) Geol. Studien im SW. Graubünden (Sitz.-Ber. d. Wiener Ak. d. Wiss. math.-naturw. Classe. Bd. 97, S. 607, 1888).

nicht zutreffenden Auffassungen begegnet. Eine vollständige Richtigstellung würde ein jahrelanges Studium in Anspruch nehmen. Die nachfolgenden Bemerkungen sollen und können nur einen kleinsten Beitrag hierzu liefern.

Die Hauptmassen der hohen Gebirge rings um St. Moritz bestehen aus krystallinischen Felsarten und zwar in der Gruppe der Bernina, des Piz Julier und Piz Ot weit vorwaltend aus Granit mit einem dazwischen eingeschobenen, aus NO hereinragenden Keil von vorherrschend aus Gneiss bestehenden Schiefern. Vom Rath[1]) hat viele dieser Gesteine nähe untersucht und genau beschrieben. Ich beabsichtige im Folgen den nicht ausführlicher auf die petrographischen Verhältniss dieser Gesteine, soweit sie nicht direkt mit den Mineralquelle von St. Moritz in Beziehung stehen, einzugehen, beschränk mich daher nur auf einige wenige allgemeine Bemerkungen

In den höchsten Gebirgstheilen umspannen granitisch Gesteine halbkreisförmig nach SO., S. und NW. wie mi einem Rahmen das engere Gebiet von St. Moritz. Es sin weit vorherrschend die unter der Bezeichnung „Julier granit" bekannten, schwach grünlich gefärbten Abände rungen des Granits (Syenitgranit), welchem Hornblende grünlich weisser Feldspath, Glimmer und eine Chlorit-artig Beimengung den eigenthümlichen Farbenton verleihen. I nicht scharf abgrenzender Vergesellschaftung treten da neben der sog. Berninagranit und in mehr untergeordnete Verbreitung ein Gestein, welches seinem äusseren Aussehe nach mehr einem Diorit als einem Syenit gleicht, hinzu Während zunächst bei St. Moritz der Syenitgranit den Ge birgsstock des Piz Rosatsch und die Berggehänge gegen da Inthal zu bildet und auch mit einer beträchtlichen Fels masse auf der linken Inthalseite zwischen Dorf St. Morit und Unter-Alpina anfragt, zieht sich zunächst an den Quell

1) In Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. 1867, Bd. XI S. 211 un 1868, Bd. X S. 140, vergl. auch Theobald u. a. O. S. 22 und f.

punkten der Säuerlinge am rechtsseitigen Gebirgsfuss ein schmaler Streifen des oben bezeichneten Diorit-ähnlichen Gesteins hin, aus dem die Mineralquellen unmittelbar hervorzubrechen scheinen. Dies gibt Veranlassung, dasselbe einer näheren Untersuchung zu unterziehen, als deren Ergebniss vorgreifend zu bemerken ist, dass das Gestein zu den aus Hornblende und Feldspath zusammengesetzten körnigkrystallinischen Massengesteinen der Dioritgruppe gezählt werden muss. Dasselbe ist mehr mittel- als feinkörnig krystallinisch ausgebildet und lässt deutlich mit unbewaffnetem Auge einen weissen Feldspathbestandtheil und dunkle fasrige Hornblende erkennen. Quarz und Glimmer fehlen gänzlich oder der letztere nimmt in Form mattschimmernder, perlgrauer Blättchen einen ganz untergeordneten Antheil an der Zusammensetzung des Gesteins. Da auf den Spaltflächen des Feldspaths, selbst in Dünnschliffen unter dem Mikroskop sich nur z. Th. eine deutliche in p. L. durch parallele Farbenstreifchen erkennbare Plagioklastextur beobachten lässt, liegt die Vermuthung nahe, dass der Feldspathbestandtheil wenigstens vorwaltend als Orthoklas anzusprechen sei. Eine mit grösster Sorgfalt ausgelesene Probe des Minerals aus einem anscheinend frischen, von einer Felssprengung hinter dem neuen Bad gewonnenen Handstück liess wegen der Verwachsung weder nach dem äusseren Aussehen, noch nach dem spez. Gewicht eine scharfe Scheidung in zweierlei Feldspatharten vornehmen. Als Zusammensetzung ergaben sich nach einer vorgenommenen chemischen Analyse folgende Zahlenwerthe:

Kieselsäure . . .	64,00
Thonerde . . .	21,70
Kalkerde . . .	3,00
Kali	1,14
Natron	11,10
	100,94

In Dünnschliffen unter dem Mikroskop erweisen sich die Feldspathgemengtheile sehr zersetzt. Sie sind trüb, wolkig undurchsichtig oder schwach durchscheinend; in p. l. erscheint eine auf kleine, oft staubartige Flecken vertheilte Aggregatfärbung neben bald häufigeren, bald seltenere dunklen Parallelstreifchen, so dass eine Beimengung von Plagioklas nicht zweifelhaft ist. In manchen Stücken ist dieser Feldspath mit dunklen Parallelstreifchen sogar weit vorherrschend. Viele der Feldspaththeilchen sind durch eine auf den Spaltflächen angesiedelte grüne, wohl chloritische Substanz grünlich gefärbt. Diese optischen Ergebnisse im Zusammenhalt mit der chemischen Zusammensetzung weisen auf das Vorwalten eines Oligoklas-Feldspathes hin.

Die dunkellauch- bis braungrüne Hornblende ist breit nadelförmig entwickelt, feinfaserig und stark dichroitisch. Zuweilen kommen in Mitten grösserer Hornblendegruppen hellere Körnchen vor, die vielleicht einem Pyroxen angehören. Doch gelang es mir nicht, über dieses Verhalten volle Klarheit zu gewinnen.

Solche dioritische Gesteine verlaufen schon in nächster Nachbarschaft durch Hinzutreten von Quarz und Biotit in den hier weit verbreiteten Hornblendegranit. Bemerkenswerth ist, dass dieser an der Grenze gegen die krystallinischen Schiefer öfter scharfeckige Brocken des letzteren einschliesst, was zum Beweis seines jüngeren Alters dient. Auch pegmatitisch ausgebildete Gangadern von Granit mit blumig strahligem, weissem Glimmer in grossen Büscheln durchsetzen nicht selten den benachbarten Gneiss. In einem kleinen Steinbruch zwischen dem neuen Bad und dem Statzer See kommen in solchen Pegmatitgängen grosse Granaten vor, welche in eine ziemlich weiche, matterdige, Steinmark-ähnliche Substanz mit einzelnen noch unveränderten kleinen Partien zersetzt sind. Häufiger noch begegnet man

Quarzadern mit chloritischen Butzen und Rutschflächen, welche mit einer chloritischen Substanz überzogen sind.

Neben den granitischen Gesteinen nehmen weiter Gneiss und glimmerig-chloritische Schiefer sowie Phyllite einen wesentlichen Antheil an der Zusammensetzung des Untergrundes der Umgegend von St. Moritz. Von NO. her dringt über den Piz Languard und Murailg eine Fortsetzung der krystallinischen Schiefer über das Thal von Pontresina keilförmig gegen das obere Innthal vor und zieht, zwischen den Granitstücken eingeklemmt, an der Innthalspalte in schmalem Streifen gegen Silvaplana fort, um oberhalb des Silvaplaner und Silser See's sich wieder weiter auszubreiten.

Bieten schon die Granite durch ihren häufigen Wechsel in der Zusammensetzung eine grosse Anzahl von nicht leicht abzugrenzenden Abänderungen, so verstärkt sich dieser Wechsel der Gesteinsbeschaffenheit noch in erhöhtem Maasse bei den krystallinischen Schieferschichten. Gehen wir von dem Gneiss als Haupttypus dieser Gesteinsbildungen aus, so sehen wir in nächster Nähe von St. Moritz — um uns auf diese Gegend zu beschränken — ächte normale Gneisse in den zu Tag ausstreichenden Felsen zwischen Dorf St. Moritz und Pontresina besonders frisch aufgeschlossen an einem neu angelegten Fahrweg vom Nordende des See's nach Acla Silva mit NW. Einfallen anstehen. Sie verlaufen aber rasch in NW. Richtung durch Ueberhandnahme der Glimmer- und Quarzbeimengungen, dann durch Aufnahme von chloritischen und sericitischen Gemengtheilen in eine wechselvolle Reihe von geschichteten Gesteinen, welche man bald als Glimmer- und Quarzitschiefer, bald als Chlorit- und Sericitschiefer oder im Sinn Theobald's als Casanaschiefer bezeichnen kann. An dem Fussweg von Celerina nach Dorf St. Moritz und oberhalb des Dorfs bis zu dem Wasserfall am Südende desselben fortstreichend gesellen sich ihnen noch weiter dunkelgraue, glimmerig glänzende, thonige Schiefer vom Typus der Phyllite hinzu.

Vielfache Störungen, Schichtenwindungen und öfterer Wechsel in der Fallrichtung machen es schwierig, ihre Gliederung und Lagerungsanordnung genauer festzustellen. Im Allgemeinen lässt sich erkennen, dass die gneissartigen Schiefer sich zunächst an den Granit des Piz Rosatsch und Surlei am SO. Rand des Innthals hinziehen und dass die übrigen krystallinischen Schiefer im Hangenden sich ihnen anschliessen. Mit dem Thal von Pontresina ändert sich die Streichrichtung der Schichten, welche auf der NO. Thalseite von SO. nach NW. sich fortziehen und nach NO. einfallen. Es ist dadurch eine Störungslinie angezeigt, auf welche das breite Thal von Pontresina sich eingetieft hat. Auch die Gesteinsschichten nehmen hier einen anderen Charakter an, indem an den steilen Laretfelswänden bei Dorf Pontresina zwischen dem Gneiss Talkschiefer eingelagert sind, welche mehrere Bänke von Lavez- oder Topfstein einschliessen. Von dieser Lage stammt wohl die Wegsäule auf der Höhe des Julierpasses[1]), welche noch aus den Römerzeiten herrührt.

In den Gneissschichten von St. Moritz machen sich Zwischenlagen von Augengneiss mit grossen Ausscheidungen von Orthoklas in der Nähe der Meierei bemerkbar, während in der Nähe der unteren Alpina der Gneiss eine so dünne und zugleich ebenflächige Schichtung annimmt, dass man das Gestein als Dachdeckmaterial verwendet. Als seltenere Einlagerungen treten zuweilen Hornblende- und Dioritschiefer auf.

Oberhalb der Thalenge von Campfer am SO. Rande des Silvaplaner See's und am N. Rande des Silser See's gewinnen grüne chloritische Schiefer und Phyllite mit zahlreichen Einlagerungen von Serpentin eine ausgedehnte Verbreitung. An den sog. Kalköfen oberhalb Sils machen sich zugleich z. Th. mächtige Bänke von fein krystallinischem,

1) Gümbel, Briefl. Mittheil. im N. Jahrb. f. M. etc. 1878, S. 296.

bis ins anscheinend Dichte übergehendem Kalk[1]) sehr bemerkbar. Seine blass ockerfarbige Verwitterungsrinde verräth einen Gehalt an kohlensaurem Eisenoxydul. Wir werden auf diese Kalkbildung später zurückkommen.

Auf der nördlichen Innseite steigen die krystallinischen Schiefer hoch an den Berggehängen zwischen den Granitmassen des Julier- und Piz Ot-Stocks, an denen sie anstossen, hinauf. Es sind hier vorherrschend chloritische und sericitische quarzreiche Schiefer mit Zwischenstreifen von bald Gneiss-, bald Phyllit-artiger Beschaffenheit. Wir begegnen solchen Schichten am Ausgang und auf grosse Strecken der Thäler Pedra grossa, Saluber (Cellerina) und Suvretta da St. Moritz aufwärts und auf den Weiden-reichen Berggehängen von Val Suvretta über die Alpen Giop, Nova, Laret, Margums, Clavatasch bis zum sog. Schafberg oberhalb Samaden.

Auf dem Fundament dieser Schiefer nun baut sich der grossartige Stock jüngerer Sedimentgebilde auf, welcher vom Piz Nair bis zum Piz Padella ausgedehnt ist. Diese Ablagerungen gehören der Fortsetzung jenes inneralpinen Zugs von Conglomeraten, bunten Schiefern, Trias- und Liaskalk- oder Dolomitschichten an, welche wir in einzelnen Gliedern vom Ortlerstock an bis zum Innthal bei Scanfs im Vorausgehenden kennen gelernt haben. Wesentliche Unterschiede in der petrographischen Beschaffenheit der verschiedenen Gesteinbildungen treten in diesen Kalkbergen bei St. Moritz gegenüber jenen des bisher betrachteten östlichen Zugs wenigstens nicht in auffallender Weise hervor. Eine grössere Verschiedenheit zeigt sich in den Lagerungsverhältnissen durch die grossartigsten Zerstückelungen, Verschiebungen, Zusammenbrüche und Verrutschungen, welche die Schichten im St. Moritzer Gebirge erlitten haben.

---

1) Diener, Geol. Stud. v. SW. Graubünden im Sitz.-Ber. der Wiener Ak. d. Wiss. math.-naturw. Cl. Bd. 97, 1888, S. 618.

Was die ältesten Lagen dieser jüngeren Gesteinsreihe anbelangt, so stellen sich auch hier im Liegenden jene sericitischen Quarzschiefer nun weiter im Osten ein, welche von dem benachbarten krystallinischen Schiefer schwierig zu trennen sind, weil sie ihr Bildungsmaterial ganz den letzteren entnommen haben. Theobald hat daher auch in dieser Gegend beide Bildungen unter seinen Casanaschiefer zusammengefasst, eine Bezeichnungsweise, welche, wie schon früher erörtert wurde, besser auf die soeben erwähnten tiefsten Lagen der jüngeren Schichtenreihe, nämlich auf die sericitisch-quarzitischen, durch ihre klastische Zusammensetzung gekennzeichneten, dünngeschichteten Schiefer beschränkt werden sollte. Obwohl sie in der Regel den Anfang dieses jüngeren Aufbau's ausmachen und fast überall bald in grösserer, bald in geringerer Mächtigkeit zum Vorschein kommen, so sind sie doch nach oben theils durch Zwischenlagerungen, theils durch Gesteinsübergänge mit dem auflagernden Conglomerat so eng verbunden, dass man beide stratigraphisch nicht getrennt halten kann. Die Conglomeratbildungen vom allgemeinen Typus der gewöhnlich Verrucano genannten Gesteine erlangen in der St. Moritzer Gegend eine ganz besondere Bedeutung durch ihre ungemein grossartige Entwicklung am Piz Nair, in welchem sie bis zur Höhe von 3060 m aufragen und — abgesehen von etwaigen Schichtenwiederholungen — eine Mächtigkeit von beiläufig 250 m erreichen.

Dieses oft breccienartige Conglomerat, welches unzweifelhaft dem Sernfgestein entspricht, ist hier eine meist schmutzig grünlich weisse, z. Th. röthliche oder ockerfarbige, dickbankig geschichtete Zusammenhäufung mehr oder weniger stark abgerollter Trümmer von Quarz und quarzigen harten Gesteinsarten, Sericitschiefer, Gneiss u. s. w. mit Eindrücken, welche mittelst einer kieselig sandigen, durch Vermengung mit aufgewühltem Untergrundsmaterial meist grün-

lich gefärbten Zwischenmasse verkittet sind. Manche Lagen haben das Aussehen, als beständen sie aus einem Haufwerk zertrümmerten Gesteins des darunter liegenden Schiefergebirgs. Oft haushohe verstürzte Blöcke dieser Sernfgesteine finden sich am Südfuss der Felspyramide des Piz Nair zu einem riesigen Trümmermeer angehäuft. Aus demselben tritt jene Conglomeratbildung gegen das Suvretta-Thal zu hervor, welche Theobald[1]), weil er in den beigemengten Kalkbrocken Trümmer der jüngeren Kalk- und Dolomitschichten erblicken zu können glaubte, in Uebereinstimmung mit Escher und Studer für ein Gebilde jüngeren Alters und zwar für ein liasisches hielt. Meine genauen Untersuchungen haben mich aber gelehrt, dass diese immer nur vereinzelt vorkommenden Kalkbrocken nicht der Trias, sondern jenen Kalkbänken entstammen, welche als Zwischenlagen in den Phyllitschiefer sich einstellen, wie z. B. an der früher erwähnten Stelle der sog. Kalköfen oberhalb Sils. Es verräth sich diese Abstammung unzweideutig durch die krystallinische Beschaffenheit des Kalks und durch die gelbe eisenschüssige Verwitterungsrinde. Diese Bänke gehören zweifelsohne derselben Conglomeratbildung an, welche die übrigen Felswände des Piz Nair ausmachen. Ausserdem heben sich noch einige Bänke dadurch von den anderen ab, dass sie, von der Ferne gesehen, roth gefärbt erscheinen. Dies zeigt sich besonders an einem Felsriff nahe unter dem Gipfel des Piz Nair, wo die hellgrünlich grauen Gesteine der höchsten Bergkuppe auf diesen braunrothen Lagen aufzusitzen scheinen. Bei einer näheren Untersuchung dieser abweichend gefärbten Conglomerate da, wo man über dieselben zum Gipfel emporsteigt, findet man, dass die abweichende Färbung davon herrührt, dass das Gestein an der Oberfläche

1) Theobald, Geol. Beschreibung v. Graubünden, 1866, S. 87. Escher und Studer, Mittelbünden in d. Schweiz. Denkschr. III, S. 137.

von einer rostigen, gelbbraunen Verwitterungsrinde überzogen, im Uebrigen aber wie die anderen, vielfach breccienartigen Conglomeratbänke zusammengesetzt ist. Auch bei diesem Gebilde macht sich die bei so vielen Schichten der Alpen wahrnehmbare Eigenthümlichkeit, auf ganz kurze Strecken in Bezug auf Mächtigkeit und Beschaffenheit einem raschen Wechsel zu unterliegen, in besonders auffallender Weise bemerkbar. Die mächtige Felsmasse des Piz Nair setzt zwar ostwärts in einen schroffen Felsgrat fort, verschmälert sich aber beträchtlich und bricht, ehe sie die Val Saluber erreicht, an der Bergkante plötzlich ab. Wahrscheinlich liegt hier eine Verwerfung vor und der einer Fortsetzung dieses Zugs entsprechende Theil ist verschoben und auf dem Gehänge abgerutscht. Dieser rasche Wechsel dürfte darauf zurückzuführen sein, dass die mächtigen Gesteinsbänke an steilen Stellen der alten Küste aus groben, durch Brandung bearbeiteten und aufgehäuften Felstrümmern entstanden sind, während an selbst ganz benachbarten Meeresstellen das feinere, wenig reichliche Material nur die Bildung gering mächtiger Bänke zu Stande bringen konnte.

Eine weitere Reihe von Schichten, welche sich unmittelbar der Conglomeratbildung anschliessen und, soviel sich beobachten lässt, über derselben und nicht dazwischen gelagert sind, besteht aus fast durchweg dünngeschieferten, meist intensiv rothen, zuweilen grün gefleckten, mehr untergeordnet grauen und grünen, quarzigen, oft Kieselschiefer-ähnlichen oder Sandstein-artigen Lagen, welche das gleiche Aussehen wie die Werfener Schichten besitzen. Bei den sandigen, z. Th. glimmerreichen Zwischenlagen sind die Schichtflächen häufig wulstig uneben, zuweilen auch mit Wellenfurchen und Austrocknungsrippen bedeckt. Die grün gefärbten Abänderungen erinnern lebhaft an die sog. „Grünen“[1]) der

1) v. Gümbel, in Sitz.-Ber. d. Münchener Akad. d. Wiss. math.-phys. Cl. XIX, 1889, S. 386.

Mitterberg-Alpe bei Salzburg. Hellfarbige, gelb verwitternde dolomitische Einlagerungen fehlen auch hier nicht und weisse Quarzadern, auf denen zuweilen auch Epidot vorkommt, durchschwärmen häufig diese schiefrigen Gesteine und Conglomerate.

Auch diese Schichten scheinen in dem Gebirge von St. Moritz nicht allerorts an der ihnen zukommenden Stelle — wenigstens nicht in gleicher Mächtigkeit, wie am Piz Nair, wo der Steig durch die sehr steile, schüttige Trümmerhalde dieser Schiefer emporführt — entwickelt zu sein.

Ganz die gleiche Gesteinsreihe haben wir bereits auch bei Livigno und im Spölthal kennen gelernt. Dies berechtigt uns, diese buntfarbigen, kieseligen Schiefer und rothen Sandsteine mit den bunten Sernfschichten und die darunter lagernden Conglomerate mit den Sernfconglomeraten gleich zu stellen.

In der Gegend von St. Moritz gelingt es selten, die unmittelbare Auflagerung der auf die bunten Sernfschichten folgenden Gesteinsbildung in deutlichen Aufschlüssen zu Gesicht zu bekommen, weil durch die leichte Zerstörbarkeit der in dieser Region vorkommenden, oft sehr mächtigen Gypsstöcke und Rauhwackenbänke die Gesteinsgrenze meist mit Schutt überdeckt ist und hier zugleich auch grossartige Verrutschungen Platz gegriffen haben. Es scheint nach oben zunächst eine schwache Lage von dichtem weissem, flasrig geschichtetem Kalk zu folgen oder es treten, wo nicht Rauhwacke entwickelt ist, fein krystallinische, schmutzig graue, gelblich verwitternde, stark zerklüftete, oft von weissen Kalkspathadern durchzogene Dolomite auf, welche den von mehreren Fundstellen im Vorausgehenden geschilderten alpinen Muschelkalkschichten entsprechen. Stellenweise werden diese Lagen wohl auch durch die schon erwähnte Rauhwacke- und Gypsbildung ersetzt oder sie sind mit dieser so innig vergesellschaftet, dass sich eine scharfe Grenze nicht ziehen lässt.

Die Rolle, welche die Rauhwacke- und Gyps-führenden Schichten in diesem Gebirgsstock spielen, ist eine ausserordentlich wichtige. Denn darüber kann kein Zweifel herrschen, dass die grossartigen Niederbrüche, Verrutschungen und Lagerungsstörungen hier vielfach auf Verhältnisse zurückzuführen sind, welche durch völlige oder theilweise Auswaschungen und Auflösungen von Gypsstöcken herbeigeführt worden sind. Ein deutliches Bild der selbst jetzt noch nicht zur Ruhe gekommenen Zerstörungserscheinungen gewähren die mächtigen, zu Tag anstehenden, in grosse, säulenartige Pfeiler ausgenagten Gypsmassen oberhalb der Alpen Nova und Laret, an deren unterem Rande noch fortwährend die von der Höhe abstürzenden Felstrümmer in hohen Blockhalden sich anhäufen. Selbst das ausgedehnte Gypslager bei St. Peter oberhalb Samaden, welches fast bis zur Thalsohle herabreicht, kann nicht anders, als eine von der Höhe des Kar's zwischen Val Pedra grossa und der Valletta von Samaden aus beiläufig 2400 m herabgerutschte Scholle angesehen werden.

Zwischen St. Moritz und Val Saluber muss die Ueberschüttung der Berggehänge mit riesigen Gesteinstrümmern und oft Hügel-grossen Felsriffen, wie z. B. am Sass Muottas, Sass Ranzöl u. s. w. als das Werk der Zerstörung und Unterwaschung Gyps-führender, früher in höherer Lage vorfindlicher Kalkberge gedeutet werden. Aehnlichen Verstürzungen begegnen wir auf der ganzen Linie von den Suvretta-Seen über den mit Trümmerhalden überschütteten Pass gegen Ley Alv in die Val Saluber bis unter die Felswände der „Drei Schwestern" und des Piz Padella. Selbst die Felsmasse von Sass Corviglia dürfte ihre gegenwärtige Lage einem solchen Zusammenbruch oder Bergrutsch zu verdanken haben.

Auch in Bezug auf die Ermittelung der Gliederung der weiter am Aufbau dieses Kalkgebirgs betheiligten Schichten fehlt es hier hauptsächlich in Folge dieser Störungen an

guten und fortlaufend aufgeschlossenen Profilen. Theobald[1]) lässt zwar auf die Rauhwacke plattige Kalke, die er Virgloriakalke nennt, dann darüber Streifenschiefer und graue Lagen, nach ihm Arlbergkalke, ferner gelben Dolomit und obere Rauhwacke (sog. Lüner Schichten) und endlich Hauptdolomit folgen. Mir scheint eine solche Gleichstellung mit nordalpinen Triasstufen mehr als gewagt, da, abgesehen von dem Mangel an Versteinerungen und klaren Aufschlüssen, auch die Gesteinsbeschaffenheit oder Aehnlichkeit hierbei keine zureichende Sicherheit gewähren. Eine von Theobald angeführte obere d. h. jüngere Rauhwacke habe ich in diesen Bergen nirgends zu unterscheiden vermocht und es scheint mir überhaupt angemessener, auf jede weitere Parallelisirung bis zu den rhätischen Schichten zu verzichten, als ungenaue Grenzen zu ziehen. Es lassen sich allerdings an einzelnen Stellen gut charakterisirte Schichtenglieder unterscheiden. So finden sich z. B. am SW.-Fuss der Felswand des Piz Padella gegen die Scharte zwischen dieser Bergkuppe und jener der Drei Schwestern dunkelschwarze, auffallend ebenflächig geschichtete, plattige Kalke mit eingelagerten Mergelschiefern, ähnlich jenen oberhalb des alten Bades Bormio. Aber diese Schichten stehen ausser Zusammenhang mit tieferen Gliedern und besitzen keine Merkmale, sie einer bestimmten Stufe der nordalpinen Triasreihe gleich zu setzen. An anderen Stellen nehmen fein krystallinische Dolomite mit eigenthümlich verschlungenen, wechselnd dunkler und heller gefärbten Streifen, Flecken und Bändern einen breiten Raum ein und gewinnen sogar, wie es scheint, in den tieferen Regionen der Kalkbildungen stellenweise das Uebergewicht. Derartige Gesteine sind auch im Ortler Gebiet, im Spölthal und besonders charakteristisch in den Radstädter Tauern verbreitet. Ob wir sie mit dem Wetterstein-

1) Beiträge z. Geol. d. Schweiz. XX, S. 80.

kalk, mit dessen dolomitischen Lagen sie in ihrer petrographischen Beschaffenheit einige Aehnlichkeit besitzen, in Parallele stellen dürfen, lässt sich nicht bestimmter ermitteln.

In den höheren Lagen werden die Gesteine hellfarbig, feinsplittrig und Hauptdolomit-ähnlich. In den Schichten über dieser Region begegnen wir an einzelnen Stellen zwischen weicheren, mergeligen Lagen riffartig aufragenden Felsbänken eines dunkelgrauen Mergelkalkes. Derselbe umschliesst, wie die Durchschnitte an der Gesteinsoberfläche zeigen, grosse Mengen von Schalthierüberresten. Doch verhindert die Sprödigkeit des Gesteins, eine grössere Anzahl bestimmbarer Formen herauszuschlagen. Nur einzelne Korallenbüschel heben sich deutlicher heraus und lassen sich als *Thamnastraea rhaetica* bestimmen. Daneben zeigen sich dann noch Bruchstücke von Brachiopoden und Zweischalern, die wohl keinen Zweifel übrig lassen, dass wir Schichten der rhätischen Stufe vor uns haben. Einzelne Bänke besitzen auch eine oolithische Textur.

Solche Felsriffe rhätischer Kalke sind besonders auffallend oberhalb der Fontaina fraida im obersten Theil der Valletta von Samaden und neben dem Steig auf den Piz Padella, ehe derselbe in das Trümmerhaufwerk von Kalkblöcken hineinführt, entblösst. Auch sonst sind Bruchstücke dieser leicht kenntlichen Gesteinsschicht häufig im Gebirgsschutt zu beobachten, welche auf ein ausgebreitetes Vorkommen derselben hindeuten.

Ueber diesen mergelig-kalkigen dunkelfarbigen Schichten stellen sich weisse, sehr dichte, grossbankig geschichtete Kalke ein, welche petrographisch dem nordalpinen Dachsteinkalk ähnlich sind, meist aber kommt eine röthliche Färbung in demselben zum Vorschein und es durchziehen Rotheisenstreifen den Kalk, so dass eine grössere Uebereinstimmung mit dem Hierlatzkalke als mit dem Dachsteinkalk sich bemerkbar macht. Die Rotheisensteinausscheidungen

sind meist mit schwarzen Manganmineralien vergesellschaftet genau so, wie es in dem nordalpinen Gebiet z. B. an der Baieralp bei Kreut und an der Kammerkarwand der Fall ist. Zuweilen legen sich, wie z. B. auf der höchsten Spitze des Piz Padella, intensiv rothe Schieferthone zwischen die Kalke ein und vermitteln einen Uebergang in eine vorherrschend grau gefärbte Mergelschiefer-Facies, welche in diesem Gebirge eine grosse Verbreitung besitzt.

In den weissen oder röthlich weissen Kalken sind nun nicht gerade selten *Crinoideen*-Stiele und grosse *Belemniten* eingeschlossen, welche die Zugehörigkeit dieser Bildung zum Lias in erwünschter Weise bestätigen.

An anderen Stellen scheinen diese Kalke, welche Theobald vom Vorkommen am Steinsberg bei Ardetz Steinsberger Kalke benannt hat, durch graue, seltener rothe, dunkelfleckige Mergelschiefer (Fleckenmergel oder Algäuschiefer) ersetzt oder von letzterem überdeckt zu werden.

In diesen weichen, daher zur Bildung von schuttigen Trümmerhalden sehr geneigten Mergelschiefern liegen zahlreiche Bänke härterer, gleichfalls grauer und dunkel gefleckter Mergelkalkbänke, wie wir sie z. B. auch bei Livigno, im Trupchum-Thal und bei Tarasp kennen gelernt haben, eingebettet. Sie umschliessen gleichfalls *Belemniten*, während sich auf den Schichtflächen der Mergelschiefer sehr häufig reichlich verästelte Algen nach Art des *Chondrites latus* bemerkbar machen. Man darf diese Schiefer wohl mit voller Sicherheit als liasische ansprechen.

Jüngere Ablagerungen fehlen in diesem ganzen Gebirgsstrich bis zu den Glacial-Geschieben, welche in grossartiger Verbreitung die Berggehänge und Thalterrassen überdecken. Das Vorkommen grösserer aus Urgebirgsfelsarten bestehender Rollstücke dieser Art auf sehr beträchtlichen Höhen innerhalb der Region der Kalkberge mag vielfach Veranlassung gegeben haben, solche Findlinge für anstehen-

des krystallinisches Gestein zu halten, wie umgekehrt im Herrschaftsgebiet der krystallinischen Felsarten erratische Kalkgeschiebe als Bruchstücke benachbarter Kalkschichten anzusprechen.

In Bezug auf die Verbreitung und auf einzelne bemerkenswerthe örtliche Vorkommnisse der Trias- und Liasbildungen dieser Gegend kann ich mich um so mehr auf einige wenige Angaben beschränken als über diese Kalkberge ausführliche Schilderungen aus neuerer Zeit von Theobald und Diener vorliegen. Die kartistische Darstellung des Ersteren gibt, obgleich sie von einer ausserordentlich gründlichen Durchforschung des Gebiets Zeugniss liefert, ein zu schematisches Bild der Schichtenverbreitung, weil sie immer von der Annahme einer mehr oder weniger regelmässigen mulden- oder sattelförmigen Lagerung der Schichten ausgeht und zu sehr die ungeheueren Lagerungsstörungen, welche hier stattgefunden haben, ausser Acht lässt. Daher sehen wir auf der Karte die verschiedenen von ihm unterschiedenen und mit zu grosser Zuversicht nordalpinen Stufen gleichgestellten Schichtenglieder in zusammenhängenden fortlaufenden Bändern und Schlingen dargestellt. Dies entspricht meiner Auffassung nach nicht immer den Verhältnissen, von welchen die Verbreitung der Schichten abhängt und die vielfach auf Verwerfungen, Niederbrüche und Verrutschungen zurückgeführt werden müssen.

Zunächst mögen einige kurze Bemerkungen über den Aufbau des bereits früher schon theilweise geschilderten Piz Nair hinzugefügt werden, weil die NW. Abdachung dieser vorherrschend aus Sernfconglomerat bestehenden Bergpyramide einen bemerkenswerthen Aufschluss bietet. Es legt sich nämlich auf der NW. Seite dieses Bergs eine ähnliche breite Zone von bunten Sernfschiefern der Conglomeratbildung an, wie diejenige ist, über deren Schutthalde man zur Spitze oder wenigstens zu einem Felssattel nahe unterhalb

der höchsten Bergkuppe emporsteigt. Ueber ein solches grossartiges, auf dem Gehänge ausgebreitetes Trümmerhaufwerk zerfallener Schiefer kann man leicht zu den Seen des Suvretta-Thals abwärts gelangen. Es sind vom Gipfel weg intensiv rothe, graue und grüne sandige und quarzige, schiefrige Gesteine und untergeordnet rothe Sandsteine, in denen man vergeblich nach irgend einer Spur von organischen Ueberresten sucht. Diese Gesteine gehören ganz zweifellos den bunten Sernfschichten an. Ehe man jedoch den obersten der Suvretta-Seen erreicht, stellen sich plötzlich gleichfalls grau und roth gefärbte Schiefer ein, welche vielfach von Algenabdrücken strotzen und auch *Belemniten* umschliessen.

Dadurch aufmerksam gemacht, erkennt man dann auch die abweichende petrographische Beschaffenheit dieser Schiefer, welche den früher beschriebenen liasischen Fleckenmergeln zugezählt werden müssen. Sie tauchen hier offenbar in Folge einer Verwerfung unmittelbar neben den alten Triasschichten auf, welche dem äusseren Aussehen und der Färbung nach ihnen ungemein sehr ähnlich sind.

Am oberen kleinen Suvretta-See (2877 m) legt sich sodann über diese grauen Liasfleckenmergel gleichförmig — wahrscheinlich in überkippter Stellung — 20 bis 30 m mächtig weisslicher, meist blassröthlich gefärbter dichter Kalk vom Aussehen des Hierlatz- oder Steinsberger Kalks an. Von hier kann man über ausgedehnte Schutthalden von grauen, oft gelblich verwitternden Mergelschiefern und Fleckenkalken zum Uebergangssattel in die Val Saluver oder Celerina emporsteigen. Auf der Sattelhöhe selbst tritt uns das Bild eines wildverworrenen Trümmermeers entgegen, welches durch einen Zusammenbruch ausgenagter weicher Mergellagen erzeugt wurde. Auf der rechten südlichen Thalseite machen sich am Nordfusse des Piz Nair-Stocks wieder rothe und graue kieselige Schiefer bemerkbar, welche in grossen Schutthalden neben Trümmern von Conglomeraten

weithin thalabwärts fortziehen, während links gegen Sass Corviglia hin aus dem Schutt weissliche und grauliche, gelblich verwitternde, gutgeschichtete, von Hornsteinflasern durchzogene dolomitische Lagen sich herausheben und gegen Sass Corviglia fortstreichen. Weiter abwärts bei Ley Alv ist das Thal ausschliesslich von Schuttmassen krystallinischer Gesteine des Piz Saluver (Juliergranit und chloritisch-sericitischen Schiefern) überdeckt. Erst tiefer unten im Thal begegnen wir zwischen der Alpe Margums und Saluver da, wo der Bach durch eine Felsenenge sich Bahn bricht, einem vorzüglichen Aufschluss. Es steht hier auf der linken Thalseite in zwar nicht sehr mächtigen, aber sehr schroffen Felswänden das Conglomerat wie am Piz Nair nämlich Sernfconglomerat mit schwachen, durch die Bachsohle ausgewaschenen bunten Schiefern an. Dann erhebt sich auf der rechten südlichen Thalseite in gegen 50 m hohen schüttigen, fast senkrecht aufsteigenden Gesteinsschichten schwarze Rauhwacke, bedeckt von schwarzen, grossen Theils plattigen, Hornstein-reichen, auf den Schichtflächen wulstigen und von weissen Kalkspathadern reichlich durchzogenen dolomitischen Kalken vom Aussehen der sog. Guttensteiner Schichten. Mit der Rauhwacke zeigen sich Spuren einer Gypseinlagerung. Steigt man dann von der Alpe Margums auf einem Viehtriebpfad zur Höhe gegen Sass Muottas empor, so findet man anstatt einer Fortsetzung dieses Schichtenaufbaus oben ein flaches, mit Gesteinsschutt ausgeebnetes Gehänge, an dem nur da oder dort kleine, aus dem Grasboden vorstehende Felsköpfchen von schwarzer Rauhwacke uns zu der grossen Gypsablagerung oberhalb der Alpe Laret hinleiten. Von dem Fortstreichen der Conglomeratbildung geben nur einige Felsblöcke in einem Graben SW. von der Laretalpe schwache Andeutungen, während vereinzelte Trümmer oberhalb der alten Kirche von St. Moritz wohl nur von einem verstürzten und verrutschten, ursprünglich viel höher am Gehänge durch-

streichenden Zug abstammen können. Dazu gehören auch die grauen und rothen quarzitischen Schiefer, auf welche man gleich oberhalb des Dorfs St. Moritz am Wege zur Laretalpe stösst.

Auf den ausgedehnten weidereichen Gehängen zwischen dem unteren, in krystallinische Schiefer einschneidenden Theil des Celerina-Thals und der Val Pedragrossa sind die Aufschlüsse sehr spärlich. Der Boden wird auch hier meist von Gehänge- und erratischem Schutt gebildet. Nur ober der Alpe Clavadatsch geben sich Spuren des hier durchstreichenden Sernfconglomerats zu erkennen. Die Ueberdeckung reicht bis zum Fusse der Steilwand des Piz Padella, an der oft hausgrosse Blöcke von Kalktrümmern in wirrem Durcheinander angehäuft sich hinziehen. An der südlichsten Ecke dieses Felsenmeers machen sich röthlich gefärbte Blöcke mit Adern von derbem Rotheisenstein besonders bemerkbar. Erst in dem sattelartigen Einschnitt an dem NO.-Fuss des Piz Padella, wo der Steig von der Valletta von Samaden heraufkommt, streichen graue und rothe liasische Fleckenmergel neben riffartig ausgewitterten Bänken des grauen, auch hier versteinerungsreichen rhätischen Mergelkalks zu Tag aus und liefern das Material zu ausgedehnten Schutthalden.

Von hier zieht sich der Steig zur Spitze des Piz Padella über ein verebnetes Trümmerfeld verschiedener, durcheinander liegender Kalkblöcke, neben welchen noch bei 2700 m Höhe erratische Granitstücke angetroffen werden. Die ersten neben dem allmählig steiler ansteigenden Weg anstehenden Gesteine bestehen aus weisslichen und röthlichen Kalkschichten mit spitzig ausgewitterten Kieselflasern und Rotheisenstein-Schnürchen. Das Gestein gleicht vollständig dem sonst *Belemniten* einschliessenden Liaskalk. Auf der höchsten Spitze des Bergs sind mit diesen Kalken intensiv rothe thonige Schiefer und Rotheisenstein-Einlagerungen vergesellschaftet. Die Schichten fallen hier in St. 12 mit 30—35° nach N. ein, während

die durch eine Verwerfung getrennten, schmutzig grauen Schichten der westlichen Bergspitze, deren Gesteine den tieferen Triaskalken und -Dolomiten angehören, ein südliches Einfallen wahrnehmen lassen. Ein schmaler Streifen grauer Fleckenschiefer trennt beide Gipfel von einander, wogegen in dem Satteleinschnitt zwischen dem Gebirgsstock des Piz Padella und jenem der Drei Schwestern, durch welchen man aus dem oberen Theil der Valletta von Samaden auf das Südgehänge zu den Quellpunkten des Val da Zuandra gelangen kann, rothe und graue Schiefer der tieferen Triasregion zu Tag ausstreichen. Unmittelbar daneben zeigt sich dementsprechend ein mächtiger Gypsstock mit Rauhwacke am Ostfuss der Steilwände der Drei Schwestern entwickelt, während ostwärts unter den Felswänden der Westspitze des Piz Padella schwarze, Hornstein-führende, oft breccienartig zusammengesetzte Dolomite anstehen und weiterhin unter eine grossartige Schutthalde zahlreicher von den höheren Wänden dieses Westgipfels herabgestürzter Felstrümmer untertauchen. Die Gesteine dieser Schutthalden gehören überwiegend gleichfalls schwarzen, vielfach dünnplattigen und breccienartigen Dolomiten an, wie wir sie an anderen Stellen als die hangenden Schichten der bunten Serufschiefer kennen gelernt haben. Sie scheinen die Hauptmasse der westlichen Bergspitzen des Piz Padella-Stocks diesseits der erwähnten Verwerfungsspalte, wie auch das Felsenriff der Drei Schwestern auszumachen.

Durch die grossartigen Niederbrüche und Abrutschungen, welche die Felsmassen des östlichen Theils vom Piz Padella erlitten haben, werden uns die Verhältnisse leichter erklärlich, unter welchen sich die mächtigen Kalkriffe von Sass Mostras und Sass Rannil oberhalb St. Moritz in ganz isolirter Lage vorfinden. Diese Kalkklippe dürfen unbedenklich als abgestürzte und verrutschte Ueberreste eines zerstörten Kalkgebirgs angesehen werden, welches vordem über der östlichen Fortsetzung des Piz Nair-Rückens aufgebaut war.

Beide Felsriffe bestehen aus dichtem, weissem und röthlich gefärbtem Kalk mit *Crinoideen*-Stielgliedern, wie solche den Lias des benachbarten Gebirgs charakterisiren, und dürfen wohl als liasische Bildungen angesehen werden. Das dickbankig geschichtete Gestein ist unregelmässig gelagert, von zahllosen, oft weit klaffenden Klüften zerspaltet und in grossen Klötzen verschoben. Mächtige Blöcke sind abgestürzt und am Fusse der Kalkwände zu einem wirren Felsenmeer angehäuft, während die Kuppen offenbar durch darüber fortgeschobene Gletschermasse rundbuckelförmig abgetragen sich zeigen. Geglättete Flächen und in den Spalten stecken gebliebene erratische Granitblöcke bestätigen es, dass die Abrundung dieser Felsen als die Folgen glacialer Arbeit anzusprechen sind.

Als eine weitere Abzweigung dieser grossartigen Verstürzung ist auch die ausgedehnte Blockhalde anzusehen, durch welche der Weg von St. Moritz zur Alpe Laret führt und welche abwärts bis nahe zur alten Strasse zwischen St. Moritz und Celerina reicht, wo in dem Wasserfall-artig steilen Bachrinnsal die häufig röthlich gefärbten Kalkblöcke auf einem Phyllit-artigen Schiefer auflagernd nicht selten liasische *Belemniten*[1]) und *Crinoideen*-Stiele enthalten. Die Blöcke sind so gross, dass man sie selbst zu Bausteinen verarbeitet.

Bemerkenswerth ist eine terrassenförmige Verebnung an dem sonst steilen nördlichen Berggehänge oberhalb St. Moritz auf etwa 2075—2100 m Höhe, welche sich von Alpe Giop bis Laret hinzieht. Hier finden sich zahlreiche sumpfige und z. Th. torfige Vertiefungen, welche wohl von früheren, jetzt mit Gehängeschutt angefüllten kleinen Bergseen aus der Glacialzeit abstammen. Eisenocker-Absätze an den aus diesen Versumpfungen abfliessenden Wasseradern deuten hier auf

1) Theobald a. a. O. S. 94.

das Vorkommen Eisen-haltiger Mineralquellen. An einer an Ockerabsatz reichen Stelle geschöpftes Wasser enthielt jedoch bei 125 mg Gesammttrockenrückständen in einem Liter nur 0,5 mg Eisencarbonat.

Die Mineralquellen von St. Moritz.[1])

Es wurde das Auftauchen und die Verbreitung jüngerer Sediment- und Kalkbildungen in dem Gebirge von St. Moritz im Vorausgehenden ausführlicher geschildert, weil die Vermuthung nahe liegt, dass das Auftreten der berühmten Mineralquellen des Oberengadins mit diesem anscheinend aussergewöhnlichen Vorkommen von Kalkablagerungen in mitten der sonst krystallinischen Gebirgsmassen in ursächlichem Zusammenhang stehen könnte. Das ist nun keineswegs der Fall. Die Mineralquellen sind von diesen Kalkbildungen weder in Beziehung auf ihr Vorkommen noch auf die Mineralstoffe, welche sie enthalten, abhängig. Sie beschränken sich vielmehr auf das Gebiet der krystallinischen Felsmassen des Innthales, in welchem ihnen der Zug grossartiger Spalten den Weg zur Oberfläche öffnet. Es ergibt sich dies zunächst aus der Art und Weise, in welcher hier eine ganze Reihe von Mineralquellen mit nahezu gleichen Eigenschaften zu Tag treten. Nimmt man die altberühmte Paracelsus-Quelle als Ausgangspunkt an, so schliessen sich derselben nach verschiedenen und zwar sehr bestimmten Richtungen die übrigen Quellen unmittelbar an. In nächster Nachbarschaft ist es zunächst die sog. Badquelle, welche nach SW. hin zum Vorschein kommt, und weiter entfernt in ganz gleicher Richtung findet sich die Mineralquelle bei Surley. Dieselbe Richtungslinie weiter verfolgend, trifft man, wenn auch nur Quellspuren bei dem Maloja-Pass. In der geraden Ver-

1) Husemann, der Kurort St. Moritz und die Eisensäuerlinge. Zürich 1874, mit vollständigem Verzeichniss der älteren Literatur auf S. 147.

längerung dieses Quellenzugs nach NO. von der Paracelsus-Quelle aus wurde in nächster Nähe von letzterer erst in allerneuester Zeit die sog. Gartmann'sche oder Funtauna Surpunt-Quelle aufgeschlossen, welcher immer in gerader Linie nach NO. weiter hin mitten im Torfmoor die sog. Huotter'sche Quelle benachbart ist, bis endlich im Torfmoor am Statzer See sich, soweit bekannt ist, die letzten Spuren des Quellenzugs zeigen. Es ist nicht zweifelhaft, dass diese Ergüsse von Mineralwässern einer gemeinsamen, auf der gleichen Gebirgsspalte verlaufenden Quellenader angehören.

Ich habe bereits im Jahre 1876 diesen Zug der Mineralquellen geologisch untersucht und mich gutachtlich darüber geäussert, wo und in welcher Richtung neue Quellen aufgefunden werden könnten, nachdem die Frequenz der Badeanstalt es wünschenswerth gemacht hatte, über eine grössere Menge von Mineralwasser verfügen zu können. Die Gesellschaft glaubte damals das Risico eines immerhin kostspieligen Unternehmens der Erschliessung neuer Quellen nicht wagen zu sollen. Daher kam es, dass später ein unternehmender Geist, der Kenntniss von meinem Gutachten erhalten hatte, in der von mir angegebenen Richtung Nachgrabungen mit dem glücklichsten Erfolge in nächster Nähe der Paracelsus-Quelle veranstaltete. Auf diese Weise wurde die neue Quelle von ganz ähnlichen Eigenschaften, wie die alten, entdeckt und eine neue grossartige Badeanstalt errichtet, welcher diese sog. Gartmann'sche Mineralquelle das erforderliche Wasser liefert.

Früher nahm man an, dass die geheimnissvolle Werkstätte der Mineralisirung der Quellen im Innern des Piz Rosatsch, des unmittelbar angeschlossenen gewaltigen Gebirgsstocks, der aus mächtigen Massen von Syenitgranit mit wechselnder Einlagerung von Granit und Diorit zusammengesetzt ist, zu suchen sei. Von der Paracelsus- oder neuen Quelle weiss man nach den bei ihrer erst 1853

vorgenommenen neuen Fassung gewonnenen Aufschlüssen, dass sie aus Spalten eines Syenit-artigen massigen Gesteins hervortritt, während es die Fassung der aus alter Zeit her bekannten sog. Badequelle[1]) ungewiss liess, ob hier das Wasser aus Granitfelsen oder auf der Formationsgrenze zwischen letzterem und krystallinischem Schiefer zum Vorschein kommt.[2])

Ich hatte schon 1876 ermittelt und durch meine späteren Untersuchungen im Jahre 1888 und im letzten Sommer bestätigt gefunden, dass das Hervortreten der Mineralquellen bei St. Moritz von einem gemeinsamen Herde ausgehend von der Gesteinsart des Untergrundes unabhängig ist und in erster Linie von einem weit fortziehenden Spaltensystem bedingt wird, welches in einer schwach gekrümmten Linie aus der Gegend des Silvaplaner See's über Sur Ley durch die thalähnliche Vertiefung von Ley Nair und einer Reihe kleiner Wassertümpel streichend nach dem Kurhaus St. Moritz sich erstreckt, wo die Bad- oder alte und Paracelsus- oder neue[3]) Quelle hervorsprudeln, dann weiter über die neu aufgeschlossene Gartmanns- (Funtauna Surpunt) und die Huotter-Quelle (Fontana della Maria Huotter) zum Torfmoor am Statzer See fortsetzt. Es ist dies dieselbe Richtung, welche ursprünglich auch dem Innthal seinen Lauf

1) Die Quelle war schon in alter Zeit bekannt und wurde 1525 bereits von Theophrastus Paracelsus als überaus heilkräftig gepriesen. Gleichwohl blieb die Quelle ziemlich unbeachtet. Noch 1830 stand ein einfaches Bretterhüttchen über der Quelle. Erst 1831 wurde ein Kurhaus mit 6 Badezimmern erbaut, das dann 1864 durch einen grossartigen Bau eine zeitgemässe Erweiterung erhielt. Auch jetzt noch findet eine stete, zweckentsprechende Weiterentwicklung der weltberühmten Anstalt statt.

2) Husemann, Der Kurort St. Moritz, Chur 1874; Führer durch Bad St. Moritz in Woerl's Reisehandbüchern.

3) Diese Quelle wurde erst 1853 gut gefasst; vergl. Husemann a. a. O., S. 93.

angewiesen hatte, bis die Gewässer sich mit der allmähligen Ausnagung des Rinnsals einen tiefer gelegenen Durchbruch von Campher her und unterhalb des St. Moritzer See's durch die Chaina dura verschafft hatten.

Diese Quellenspalte fällt nur streckenweise mit der Gesteinsgrenze zwischen dem massigen Syenitgranit und den angeschlossenen krystallinischen Schiefern zusammen, ohne sich jedoch strenge an diese Formationsscheide zu halten. Denn sowohl der Granit greift in der Cresta und unterhalb der Alpina nördlich über die Spalte und das jetzige Innthal hinüber, wie auch der Gneiss gegen die Alpe da Statz hin südwärts vordringt. Gerade diese Unabhängigkeit des Quellenzugs von einer Gesteinsmasse spricht für das Vorhandensein einer die Felsarten des tieferen Untergrundes ohne Unterschied durchschneidenden Gebirgspalte, die an den über Tag anstehenden Felsen sich kaum bemerkbar macht. Daraus ist dann auch die Beschaffenheit und der Gehalt der Quellen an Mineralstoffen erklärlich, bei welchen der Hauptsache nach Kohlensäure und gelöstes kohlensaures Eisenoxydul in den Vordergrund treten und den Quellen den Charakter von Eisensäuerlingen verleihen.

In früherer Zeit, als die Thalsohle noch nicht so stark eingetieft war, wie gegenwärtig, scheint der Quellenerguss an höher gelegenen Stellen des südöstlichen Berggehänges stattgefunden zu haben. Darauf deutet der an zahlreichen Punkten des Bergabhangs zwischen dem sog. Quellenhügel und der Alpe da Statz beobachtete reiche Gehalt des braunen Bodens an Eisenoxydhydrat, der sich immer auf kleine Flecken beschränkt, während unmittelbar daneben gewöhnliche, hellgefärbte, aus dem zersetzten Untergrundsgestein hervorgegangene Walderde sich verbreitet zeigt, ohne dass ein entsprechender Wechsel in der Mineralzusammensetzung des Untergrundgesteins, von welchem die Beschaffenheit des Waldbodens abhängig ist, stattfindet. Solche ockerige Erde ent-

hält an einer Stelle des Bergabhangs 60 m oberhalb der neuen Quelle 19 % Eisenoxydhydrat, an einem andern Punkte 75 m über der Paracelsusquelle 12 % derselben Beimengung, während der gewöhnliche Waldboden hier nur durch 4 % bis 6 % Eisenoxydhydrat ganz schwach gelblich gefärbt ist.

Der Gehalt der Quellen an Mineralbestandtheilen und an Kohlensäure lässt sich nebenstehender Zusammenstellung[1] (S. 75) entnehmen.

Auffallend bei diesen Analysen ist, dass ein Kochsalzgehalt in dem Gartmann-Quellwasser ganz fehlen soll. Ich meine, es liegt dies an der Berechnungsweise und Austheilung der im Einzelnen gefundenen Bestandtheile.

Der Gehalt an Carbonaten als Bicarbonate berechnet, beträgt in 10000 Gramm Wasser:

Bestandtheile	Paracelsus-Quelle	Badquelle	Gartmann'r-Quelle
Calciumbicarbonat . . .	12,61028	11,15568	10,06124
Magnesiumbicarbonat . .	2,01060	1,98271	1,09252
Strontiumbicarbonat . .	0,00095	0,00079	0,00065
Eisenbicarbonat	0,40217	0,33787	0,50552
Manganbicarbonat . . .	0,05537	0,04952	0,03696
Natriumbicarbonat . . .	3,16073	2,99921	—

Die Differenz in dem Gehalt der Quellen ist nicht beträchtlich und kann nicht als Beweis für die Verschiedenheit ihres Ursprungsherdes angesehen werden. Dieselbe lässt sich wohl durch die wahrscheinliche Annahme erklären, dass in den oberen Teufen zu den aus der Tiefe aufsteigenden Mineralwasserzweigen von anderen Wasseradern Zuflüsse hinzu-

1) Husemann, Der Kurort St. Moritz und seine Eisensäuerlinge. Zürich 1874, und Berry jun., D. Eisensäuerlinge von St. Moritz-Bad 1891

Gehalt in 10,000 Gramm Wasser	Paracelsus nach Bosshard + 5,40° C.	Badquelle nach Bosshard + 5,40° C.	Gartmann-sche Quelle n. Traedwell + 7,0° C.
Natriumsulphat	3,16012	2,67182	2,48539
Kaliumsulphat	0,21172	0,19651	0,03455
Magnesiumsulphat	—	—	0,80357
Calciumcarbonat	8,75714	7,74700	6,98697
Magnesiumcarbonat	1,31924	1,30994	0,71696
Natriumcarbonat	2,23417	2,12001	—
Eisencarbonat	0,29160	0,24499	0,36654
Mangancarbonat	0,04004	0,03581	0,02673
Strontiumcarbonat	0,00073	0,00061	0,00050
Natriumchlorid	0,42848	0,39682	—
Magnesiumchlorid	—	—	0,13744
Ammoniumchlorid	0,01885	0,02021	0,01810
Lithionchlorid	0,00927	0,00891	0,00630
Magnesiumbromid	0,00132	0,00377	0,00120
Magnesiumjodid	0,00030	0,00010	—
Calciumfluorid	0,01691	0,00492	0,00180
Calciumphosphat	0,00290	0,00288	0,00151
Natriumnitrat	0,00370	0,00206	—
Magnesiumborat	0,03670	0,02558	0,02023
Thonerde	0,00040	0,00057	0,00635
Eisenoxydhydrat	0,05016	—	—
Kieselerde	0,59132	0,37150	0,62127
Sonstiges	Sp.[1])	Sp.[1])	Sp.[2])
Organische Substanz	Sp.	Sp.	0,01498
Summa (berechnet)	17,17480	15,15501	12,23039
Summa (direkt bestimmt)	17,16050	14,91450	12,18500
Gesammtkohlensäure	38,12601	36,89780	32,150
Freie Kohlensäure in ccm bei 0° C. und 760 mm L. D.	13652,0	13607,0	12655,9

1) Barium-, Caesium-, Arsen-, Kupfer-Verbindungen, dann Chlorlithium, Bromnatrium, Jodnatrium, Fluornatrium, Natriumborat, Ammoniumcarbonat (nach Husemann).

2) Im rothbraunen Quellenabsatz finden sich Spuren von Arsen, Kupfer und Kobalt; im Bodenschlamm auch Nickel (nach Husemann).

kommen. Ausserdem hängt Manches, wie oben erwähnt ist, von der Art der Ausrechnung der durch die Analyse gefundenen Zahlenwerthe ab.

Um den grossen Unterschied zwischen der Beschaffenheit dieser Mineralwässer gegen jene des gewöhnlichen Quellwassers ihrer Nachbarschaft deutlich zu machen, wird im Nachstehenden die Analyse eines zu Trinkwasser benützten Quellwassers bei St. Moritz mitgetheilt:

Kalkerde (Calciumoxyd)	0,0408	In einem Liter Wasser.
Bittererde (Magnesiumoxyd)	0,0133	
Eisenoxyd	0,0004	
Kali	0,0032	
Natron	0,0054	
Thonerde	0,0018	
Kieselerde	0,0046	
Chlor	0,0009	
Schwefelsäure	0,0147	
Kohlensäure	0,0435	
	0,1288	

Eine gewisse Aehnlichkeit in der Zusammensetzung lässt sich nicht verkennen, doch ist der Gehalt der Mineralquellen mehr als 10 fach so gross als jener der gewöhnlichen Quellen.

Was nun zunächst die Kohlensäure anbelangt, so ist diese, als der eigentliche „Brunnengeist", als das wesentlichste Element aufzufassen. Wie und wo sie entsteht, das wissen wir nicht. Nur so viel ist als bestimmt anzunehmen, dass sie auf der Quellenspalte aus der grössten Tiefenregion der Erdrinde emporsteigt, von den im Innern des Gebirgs circulirenden Gewässern aufgenommen wird und nur in dieser Verbindung mit Wasser die Arbeit der Zersetzung der durchflossenen Gesteine bewirkt. Aus dieser Zersetzung lässt sich der Gehalt der Quellen an den übrigen Bestandtheilen ab-

leiten. Dass hierbei Kalkcarbonat als ein so stark vorwaltender Bestandtheil sich bemerkbar macht, ist allerdings auffallend. Man kann denselben nicht wohl als ein Zersetzungsprodukt der allerdings im benachbarten Granit und Diorit vorkommenden Kalkfeldspäthe betrachten, weil ein entsprechend grosser Gehalt an Natrium und Kalium fehlt, noch auch mit dem Auftreten der benachbarten mesolithischen Kalkschichten in Zusammenhang bringen, weil diese Gebilde zu entfernt von der Quellenspalte liegen und nicht anzunehmen ist, dass eine Scholle derselben in der Tiefe eingekeilt zwischen den krystallinischen Gesteinen sich vorfinde. Sehr wahrscheinlich ist der Ursprung dieser Bestandtheile auf das Vorkommen der Eisen-, Mangan- und Magnesiumhaltigen Kalkeinlagerungen in den chloritisch-phyllitischen Schiefern zurückzuführen, wie solche z. B. am Silser See zu Tag ausstreichend im Vorausgehenden erwähnt worden sind. Nach den beobachteten geologischen Lagerungsverhältnissen lässt sich mit Grund annehmen, dass eine Scholle solcher kalkführender Schiefer von Surlei her längs der Quellenspalte in den Granit eingeklemmt vorhanden ist, welcher an das durchziehende Kohlensäure-haltige Wasser die Carbonate, hauptsächlich Kalkbicarbonat, abgibt. Die ziemlich reichlich vorhandenen Sulphate stammen wohl aus zersetztem Schwefelkies ab, der in den krystallinischen Schiefern reichlich enthalten ist. Gegen ihre Ableitung von den in der Trias dieser Gegend so mächtig entwickelten Gypsstöcken spricht der gänzliche Mangel an Calciumsulphat in allen diesen Mineralwässern.

Die Temperatur der Mineralquellen ist, wenn auch im Allgemeinen niedrig (5,4° — 7° C.), jedoch gegenüber der mittleren Jahrestemperatur ihres Ausflussortes (beiläufig + 1,1° C.) so hoch, dass sie die Quellen zu relativen Thermen stempelt. In dieser Beziehung ist eine Erscheinung sehr bemerkenswerth, welche ich zwar nicht selbst controlirt

habe, die mir aber vielseitig als richtig bezeichnet wird. Die Quellen sollen nämlich im Winter, sobald die benachbarten Berge sich in Schnee und Eis hüllen, nachlassen, selbst ganz zu fliessen aufhören und erst im späteren Frühjahr, wenn Schnee und Eis schmilzt, sich neu beleben. Dies würde dahin zu deuten sein, dass der Zufluss des süssen Wassers von der Oberfläche her in die Quellenspalte nur dann erfolgt, wenn in den höheren Gebirgstheilen das Aufthauen von Schnee und Eis beginnt. Dieses Schmelzwasser kann nicht bis in beträchtliche Tiefe der Spalte eindringen; denn sonst würde die Quellentemperatur eine beträchtlich höhere sein. Es ist zu vermuthen, dass dieser Zufluss, indem er mit dem in der Tiefe circulirenden, ununterbrochen fortarbeitenden Zersetzungswasser in höheren Theilen der Quellenspalte sich vermischt, diesem die grössere Wassermenge liefert und dasselbe auch durch den Druck einer höheren Wassersäule zum Ausfliessen bringt. Auf solche Weise erklären sich alle die bei diesen Mineralquellen wahrgenommenen Eigenthümlichkeiten.

Was nun den Quellenzug selbst anbelangt, so begegnen wir — abgesehen von den geringen Spuren am Malojapass — dem ersten südlichsten Quellpunkte von Mineralwasser bei dem halbverschütteten Dorfe Surlei bei Silvaplana. Die durch den mächtigen Geröllschutt bis zu Tag aufsteigenden Exhalationen von Kohlensäure und der Absatz von Eisenocker gab Veranlassung, hier einen Versuchsschacht abzuteufen. Es gelang aber nicht, durch die sehr beträchtlich hohe Geröllaufschüttung, mit welcher ein wilder Gebirgsbach einen Theil des Silvaplaner See's ausgefüllt hat und auch jetzt noch fortwährend das Dorf Surlei mit gänzlicher Zerstörung bedroht, bis zum anstehenden Untergrundfels und zur eigentlichen Quellader zu gelangen. Zudem ist die Stelle stets der Gefahr der Beschädigung durch den erwähnten Wildbach ausgesetzt. Es unterblieb desshalb ein weiterer

Versuch der Quellfassung. Aus dem jetzt verfallenen Schacht, der mit ockerfarbigem Wasser ausgefüllt ist, steigen reichlich Blasen von Kohlensäure auf. Durch Tiefbohrungen liessen sich an dieser Stelle wohl günstige Resultate erzielen.

Der tiefe Einschnitt der Plana della Turba — ein alter Innflusslauf — führt uns in NO. Richtung an eine Reihe kleiner Seen vorüber zunächst zu den alten Quellen von Bad St. Moritz, deren Zutagtreten an dieser Stelle dadurch begünstigt wird, dass hier die Quellenspalte dicht an der steil aufsteigenden Felswand vorbeistreicht und nur von einer ganz geringen Schuttlage überdeckt wird. Dies gilt namentlich auch von der Paracelsus-Quelle, welche nach älteren Fassungsberichten direkt aus einer Felsenspalte mit 2,75 Minutenliter Schüttung hervorkommen soll, während die Badquelle in mitten von Schutt und Geröll in einem uralten hölzernen Behälter[1]) gefasst ist und 22 Liter Wasser in der Minute liefert. Die neue Gartmann'sche oder Funtauna Surpunt-Quelle, weiter in NO. Richtung von der Paracelsus-Quelle nur etwa 350 m entfernt, wurde angeblich in einem 6 m tiefen Schachte entdeckt, aber, wie mir scheint, erst durch eine vom Schacht aus gegen den felsigen Bergabhang getriebene Strecke gefasst. Sie liefert angeblich in der Minute 160 Liter Wasser, welches künstlich auf ein hochliegendes Reservoir gepumpt wird und von hier aus in die Trinkhalle oder zu den Bädern zurückfliesst.

Wieder etwa 1000 m weiter in NO. Richtung ist in mitten des an den St. Moritzer See sich anschliessenden Torfmoors durch reichlich aufsteigende Kohlensäureblasen und durch ockerigen Absatz eine weitere Stelle des Vorkommens einer Mineralquelle schon längst bekannt gewesen. Ein Versuch, diese sog. Huotter'sche Quelle unter dem Torfmoor

1) Vergl. Husemann a. a. O. S. 26, 79 und ff.

aufzuschliessen und zu fassen, stiess hauptsächlich wegen des grossen Zudrangs von Wasser auf technische Schwierigkeiten. Man durchteufte eine ungefähr $3^1/_2$ m mächtige Torfmasse, dann darunter noch etwa $^1/_2$ m Lehm und Geröll, ohne auf anstehenden Fels zu stossen. Ein jetzt noch offener Wassertümpel, in dem sich die Quelle durch aufsteigende Gasblasen und durch Ockerabsatz verräth, zeigt den Ort dieses leider missglückten Unternehmens an, welches nach dem heutigen Standpunkt der Technik jetzt ohne Zweifel mit besserem Erfolge durchgeführt werden könnte.

Endlich fand noch ein Versuch auf den zu der Fläche des Statzer See's gehörigen Torfgründen wieder etwa 1200 m weiter in NO. Richtung durch die Firma Rungger & Comp. statt. An dieser Stelle hatten gleichfalls aufsteigende Gase und Eisenockerabsätze das Vorkommen einer Mineralquelle verrathen. Doch hinderten Torf und mächtige Schuttanhäufung auch an diesem Orte bis zum eigentlichen Quellpunkt vorzudringen.

Noch zeigen sich Quellen mit Gasexhalationen an mehreren Orten bei St. Moritz. Besonders bemerkenswerth ist eine solche Süsswasserquelle (ohne Ockerabsätze) am SO. Ende des Statzer See's mit ungemein lebhaftem Aussprudeln von Gas, desshalb Funtauna alzeiente (?) genannt. Meine Untersuchung des aufgefangenen Gases hat gelehrt, dass dieses nicht aus Kohlensäure, sondern aus atmosphärischer Luft besteht. Es gehört diese Quelle nicht der weiteren Fortsetzung des Mineralquellenzugs an, was auch durch das Fehlen von Ockerabsätzen bestätigt wird.

Einer ähnlichen Quelle mit reichlichen Gasexhalationen begegnet man im Westende der Plaun da Statz. Hier wurde gleichfalls nach einer Mineralquelle gesucht. Doch fehlt jede Spur eines Ockerabsatzes und die aufsteigenden Gase scheinen gleichfalls aus atmosphärischer Luft zu bestehen.

Auch im St. Moritzer See[1]) selbst steigen an mehreren Stellen, namentlich gegen das SW. Ende hin zahlreiche Gasblasen aus dem Seeboden auf. Das Gas ist nicht untersucht, scheint aber gleichfalls nur atmosphärischer Luft anzugehören, welche ja aus zahllosen Gebirgsquellen mit dem Wasser in Form von Gasblasen aufsteigt, indem sie, von den in die Tiefe niedersitzenden atmosphärischen Niederschlägen mit fortgerissen, sich auf den Quellenadern ansammelt und mit dem aufsteigenden Wasser der Quellen wieder zur Oberfläche zurückkehrt.

Die in dieser Gegend zu Tag tretenden, oft sehr reichen Süsswasserquellen besitzen eine nicht sehr beständige Temperatur (Trinkquelle am Bad 4—5° C.; Quellwasser am Statzer See 4,8—5° C.), was davon herrührt, dass sie meist, ehe sie zum Vorschein kommen, auf längere Strecken durch Schutthalden von locker übereinander aufgehäuften Gesteinsblöcken hindurch sickern und auf diesem Wege der Einwirkung der wechselnden Lufttemperatur ausgesetzt sind. Selbst die Fontauna fraida im obersten Theil der Valletta von Samaden am Aufstieg zum Piz Ot bei 2694 m Meereshöhe mit einer Temperatur von ungefähr 1,5° C. zeigt sich von der Lufttemperatur stark beeinflusst, da diese im Jahresmittel zu Bevers, das bei 1715 m Meereshöhe nahezu um 1000 m tiefer liegt, nur 1,86° C. und in Sils Maria bei 1830 m nur + 0,9° C. beträgt.

---

1) Dieser See ist auffallend arm an thierischen Bewohnern. Von Schalthieren fand ich nur *Limnaea (Gulnaria) peregra* Var. *Heydenii* Kob. und *Planorbis rotundatus* Var. *gracilis* Gredl. Von Pflanzen wachsen im seichten Wasser *Hippuris vulgaris L.; Myriophyllum spicatum L.; Potamogeton gramineus L.; Potamogeton perfoliatus L.;* am z. Th. überschwemmten Uferrande *Ranunculus reptans* (nach gefälliger Bestimmung von Prof. Radlkofer) neben Rasen von *Amblystegium (Hypnum) riparium* (teste Dr. Holler), während die benachbarten Urgebirgsblöcke von der Flechte *Placodium murale* Schreb. (= *saxicolum* Pollich) (teste Arnold) überzogen sind.

Bergün.

Das Vorkommen von Eisenerzen bei Livigno, sowie jenes am Piz Padella bei St. Moritz hatte in mir ein besonderes Interesse für das bekannte Auftreten von Eisenerzen[1]) im Val Tisch bei Bergün erweckt.

Bekanntlich setzt das Kalkgebirge vom Unterengadin zwischen Scanfs und Ponte westwärts vom Innthal über den Albula-Pass und Piz Uertz, Piz d'Acla und das Tenzenhorn u. s. w. gegen das Landwasserthal und die Gegend von Davos fort. In mitten dieser grossartigen Ausbreitung mesolithischer Bildungen liegt im tiefen Thalkessel Bergün auf einem alten Seeboden, welcher durch die Rückstauung der Bergwässer oberhalb des querüber ziehenden mächtigen Felsendamms „der Stein" gebildet wurde. Zwei grosse Seitenthäler münden hier von Osten her in das Hauptthal der Albula, nämlich Val Tisch und Val Tuors, und schneiden rückwärts tief in das Kalkgebirge ein. Ausserdem ist diese Gegend noch geologisch hochinteressant durch das sehr ausgedehnte Auftreten porphyrischer Gesteine unterhalb Stein bei Bellaluna und durch deren Beziehungen zu den ihnen benachbarten Sedimentgebilden.

Längs der Albulastrasse sind die Aufschlüsse von Ponte her wegen des meist hoch aufgehäuften Gehängeschuttes dürftig. Auf der südlichen Seite reicht das Felsenmeerartige Haufwerk vom Juliergranit weit herab und nordwärts steigen in steilen, unter reichberasten, nur in den obersten Bergtheilen nackten Gehängen liasische Schiefer bis zu den höchsten Bergspitzen empor. Nur die grosse Gyps- und Rauhwacke-Runse bei Crusch und oberhalb Weissenstein unterbrechen die Einförmigkeit der Schuttüber-

1) Dieses Erz wurde noch bis vor wenigen Jahren bergmännisch gewonnen und in dem benachbarten jetzt eingegangenen Hüttenwerke Bellaluna verschmolzen.

deckung und deuten auf ein Fortstreichen der Triasgebilde von Osten her gegen Westen. In der That begegnen wir auch bald unterhalb Naz einem kleinen Schichtenaufschluss neben der Strasse, wo das in so vielen Abänderungen bisher bekannt gewordene buntfarbige, kieselige Schiefergestein (Sernfschiefer) nach unten mit Uebergängen in Breccien- und Conglomerat-artige, dem Casanaschiefer ähnliche Lagen als Stellvertreter der ältesten Triasschichten auftaucht. Darüber zeigen sich schwärzlich graue, von weissen Kalkspathadern durchzogene Dolomitbänke mit eingeschlossenen *Crinoideen*-Stielen (untere Muschelkalk-Trias), welche dann in etwas höheren Lagen eine quer durch das Thal streichende Felsbarre ähnlich wie jene am „Stein" bilden und zu einer Steinklamm mit einer Art Wasserfall Veranlassung geben. Von hier an abwärts verhüllt wieder Gehängeschutt und von beträchtlichen Höhen herabgestürzte Felsblöcke die im Grunde anstehenden Gesteine bis zum Thalboden von Bergün. Auch an der Ausmündung des Val Tisch ins Hauptthal herrscht bis auf beträchtliche Erstreckung aufwärts in Folge von Felsstürzen und einer durch das Thal streichenden Verwerfung grosse Unregelmässigkeit. Erst, wo auf dem nördlichen Thalgehäng oberhalb Sagliatz ein neu angelegter Alpweg sich ins Thal einzusenken beginnt, geht ein mächtiger Stock von Rauhwacke, offenbar die Fortsetzung jenes oberhalb Weissenstein, auch hier von Gyps begleitet, neben dunkelgrauen, weissgeaderten, kleinklüftigen, dolomitischen Gesteinsschichten zu Tag aus. Von der Höhe herabgestürzte Felsbrocken eines rothen Conglomerats beweisen, dass in der Nähe auch das zu diesem Zuge gehörige Sernfconglomerat durchstreicht. Auf der Südseite des Thals dieser Stelle gegenüber verrathen schwarze Mergelschiefer das Auftreten von Liasschichten, zu welchen auch der Alpweg bei einer Brücke hinabführt. Von dieser Stelle an aufwärts hält das Thal die Richtung einer Verwerfungsspalte ein, so dass auf

der Nordseite das Gehäng mit Blöcken von sehr grobbrockigen Sernfconglomeraten, von rothem Sandstein, ferner mit Schollen rother, grüner und grauer, kieseliger Sernfschiefer und von schwärzlichem, weissadrigem, *Crinoideen*-Stiele einschliessendem Dolomit, welcher in wildzackigen Felsklippen hoch oben den Grat des Bergrückens bildet, überrollt ist, während auf der Südseite die schon erwähnten dunkelgrauen Liasschiefer und Fleckenkalke in ziemlich häufigen Entblössungen zu Tag ausstreichen und bis zu den höchsten Berggipfeln hinauf zu reichen scheinen.

Oberhalb der neuerbauten Hütte von Alpe Tisch[1]) reicht die Reihe der rothen, sandigen, den Werfener Schichten völlig gleichen Gesteinsschichten bis zur Thalsohle herab und hier ist es, wo man im Thal auf die jetzt verfallene Erzablagerungsstelle und am Gehänge auf die Halden alter Stollen des früheren Eisenerzbergbaus stösst. Die alten Baue ziehen sich am Gehänge aufwärts und über den Bergrücken des sog. Grubenkopfs zu einem ziemlich ausgedehnten Aufschlusspunkte, der bereits auf dem ins Val Plazbi abdachenden Gehänge liegt. Die Erze, welche sich zerstreut auf der Halde und in einem noch ziemlich grossen Haufen an der Ladestelle in Val Tisch vorfinden, bestehen aus körnigem Spatheisenstein in allen möglichen Uebergangszuständen zu Brauneisenstein, genau so, wie diese Erze im Werfener Schiefer bei Werfen in Lagern und Linsen vorkommen und bergmännisch gewonnen werden. Die Analyse eines ziemlich unzersetzten Stückes ergab folgende Zusammensetzung:

Eisenoxydul	43,35
Manganoxydul . . .	4,25
Bittererde	4,50

1) Die auf der Karte aufgezeichnete alte Alphütte ist verlassen und eine neue an einer viel höheren Stelle in der Nähe des Wasserfalls hergestellt.

Kalkerde	3,45
Kieselsäure	10,45
Thonerde	0,40
Schwefel	3,50
Kohlensäure	32,75
	100,00

Dazu gesellen sich dann ziemlich mächtige Anhäufungen von dünnblättrigem Eisenglanz (Eisenglimmer), wodurch die Uebereinstimmung mit der Erzbildung bei Werfen noch weiter vervollständigt wird. Die Eisenformation bei Bergün gehört mithin, wie jene bei Werfen und in den Bergamasker Alpen, den ältesten Triasschichten an.

Im Hintergrund der Val Tisch gegen den Sattel in das Thal Plazbi, dessen Eintiefung durch die hier durchstreichende, leichter verwitternde Rauhwacke und Gypsbildung bedingt ist, dringen die schwarzen Liasschichten des südlichen Berggehänges quer über das Thal nach Norden zu vor und bilden hier eine hohe nackte, schüttige Felsbarre, über welche der Thalbach in einen Wasserfall herabstürzt. Die Schichten sind an dieser Felswand stark gewunden, zusammengefaltet und geknickt. Dementsprechend werden sie von auffallend zahlreichen weissen Kalkspathadern durchzogen.

Aehnlich sind die geologischen Verhältnisse in der fast parallel verlaufenden Val Tuors. Am Eingang in dieses Thal erheben sich gleich bei Bergün unter mächtigem, über die ausgedehnte hohe Terrasse von Latsch ausgebreitetem Gehänge- und Eiszeitschutt dunkelgraue fleckige Liasmergel und -Schiefer, welche sich in dieser ganzen Gegend durch eine Neigung in länglich spiess- oder grobgriffelförmige Stücke zu zerfallen auszeichnen. Eingeleitet wird dieser Schichtenzug durch einige festere, sehr versteinerungsreiche Mergelkalkbänke. Die Sprödigkeit des Gesteins erschwert das Herausschlagen sicher bestimmbarer Versteinerungen. Doch ge-

nügen die Fragmente und die auf den Verwitterungsflächen zum Vorschein kommenden Theile, um diese Bänke als rhätische zu erkennen. Die Schichten fallen eine Strecke thalaufwärts anhaltend nach NW. ein, biegen sich aber, ehe man eine zweite Brücke erreicht, an einem Riff hellen Kalks mit einer entgegengesetzten Neigung nach SO. um. Von hier an ist das Thalgehänge überrollt und ohne Gesteinsaufschluss bis zu einem nach Latsch führenden Seitenweg. Hier stehen schwarze Kalke mit Zwischenlagen von grünem Lettenschiefer an und schliessen sich unmittelbar einem sehr mächtigen System von schwarzer, gelb verwitternder Rauhwacke mit ausgedehnten Gypseinlagerungen an, genau so, wie oberhalb der Laretalpe bei St. Moritz. Nach einer kurzen durch Gehängeschutt überdeckten Thalstrecke folgt, diesem Gypsstock mit NO. Einfallen aufgelagert, eine mächtige Reihe wildzackig ausgewitterter tiefschwarzer, weiss durchaderter Dolomitschichten, welche an dem Gehänge gegen Piz Drosanto sich emporziehen. Diese Schichten sind knollig, wie aus verschlungenen Wülsten zusammengesetzt, in unregelmässig begrenzten Flecken heller und dunkler gefärbt, breccienartig und umschliessen zahlreiche, mit weissem Kalkspath ausgefüllte, *Crinoideen*-Stielen ähnliche Ausscheidungen; auch Hornsteinbutzen und -Adern fehlen eben so wenig, wie Versteinerungen, die sich an den ausgewitterten Spuren erkennen lassen und diese Schichten dem alpinen Muschelkalk zuweisen. Nach oben nehmen die Schichten eine ausgeprägt plattige Beschaffenheit mit wulstigen Schichtenflächen wie die nordalpinen Virgloriakalke an. Dazwischen liegen intensiv schwarze Dachschiefer-artig dünngeschichtete Schieferthone. Ein wahrscheinlich heruntergebrochenes Trumm dieser Gesteinsreihe liegt neben dem Wege auf der südlichen Thalseite entblösst. Was weiter aufwärts folgt, ist nicht durch direkte Entblössungen zu beobachten. Doch lassen ungemein zahlreiche Blöcke und Schollen von rothem Conglo-

merat, rothem und grünlichem Sandstein und quarzigem Schiefer, welche die Gehänge bei Tuorsdavant bedecken, darüber keinen Zweifel, dass auch hier die Unterlage der schwarzen Dolomitbänke die Sernfgesteine ausmachen. In einem Seitengraben nahe unterhalb Ponts d'Alp gehen diese Lagen auch zu Tag aus und bilden die Ablagerung, welche sich zunächst und unmittelbar an die vor den ersten Häusern von Ponts d'Alp anstehenden, nach NO. einfallenden chloritischen Gneissschichten des dann weiter ausgedehnten krystallinischen Grundgebirgs anschliesst.

Verfolgt man die Gebirgsbildung von Bergün abwärts gegen Filisur und Stuls, so begegnen wir hier neuen, höchst merkwürdigen Verhältnissen, welche durch das Auftreten ausgedehnter Porphyrmassen hervorgerufen werden und noch wenig bekannt zu sein scheinen. Durch einige kurze Bemerkungen möchte ich auf diese so leicht zugängliche Porphyrfundstelle die Aufmerksamkeit hinlenken. Es reiht sich dieses Vorkommen an das berühmte auf der Windgälle, dann an jenes des Sandhübels oberhalb Wiesen, bei Spinabad und selbst an jenes bei Fraine in den Bergamasker Alpen.

Wenn man von Bergün auf der Hauptstrasse abwärts gegen Filisur geht, so macht sich zuerst ein hoher felsiger Vorsprung bemerkbar, welcher die Thalebene von Bergün abschliesst. Der ganze Complex dieser Felsmasse, durch welche die Albula sich in enger, tiefer Schlucht Bahn gebrochen hat und die Strasse in die Gesteinsmassen ausgesprengt werden musste, heisst der „Stein."

Die obersten Lagen bestehen aus kuppig gewölbten Bänken eines dunklen versteinerungsreichen rhätischen Mergelkalks, wie wir ihn am Eingang ins Val Tuors angetroffen haben. Darüber liegen erst nach NW. fallend, dann sich muldenförmig umbiegend die in charakteristischer Weise zu grossgriffeligen Stücken verwitternden, dunkelfleckigen Liasschiefer und mergeligen Kalke. In Folge dieser sich wieder-

holenden Schichtenbiegungen heben sich dann weiter abwärts aufs Neue die versteinerungsreichen rhätischen Mergelkalke hervor. Unter denselben folgt sofort die zur eigentlichen Klammbildung Veranlassung gebende mächtige Felsmasse eines wenig deutlich geschichteten, kleinsplittrig durchsprengten dolomitischen Kalksteins — des sog. „Steins" im engeren Sinn —, der hier bedeutende Mächtigkeit gewinnt. Sobald man thalabwärts auf diesem steilsten Theil der Strasse zu einem vom Dorf Stuls herabkommenden Seitenthälchen, welches einer Schichtenstörung und Verwerfung zu entsprechen scheint, gelangt ist, kommen intensiv schwarze, z. Th. auch röthliche und grünliche, schiefrige, glimmerreiche, quarzitische Schichten zum Vorschein, welche den bunten Sernfschiefern entsprechen. Gegen das Hangende zu nehmen sie eine mehr einförmig grünliche Färbung an, wechsellagern erst mit einzelnen breccienartigen Zwischenlagen und zeigen sich endlich mit zahlreichen dickbankigen, scheinbar geschichteten Gesteinsmassen vergesellschaftet, welche ihrem äusseren Aussehen nach einem Porphyr[1]) angehören. Solche feste zahlreiche Bänke mit z. Th. tuffigen, z. Th. schiefrigen Zwischenbildungen, welche den Charakter der gewöhnlich Verrucano genannten Gesteinsgruppe an sich tragen, reichen bis abwärts zu dem jetzt auflässigen Eisenhüttenwerk Bellaluna und am Gehänge aufwärts einerseits bis zum Dorfe Stuls, andererseits hoch an den felsigen Gehängen des Chaval empor.

Gegen Filisur zu, oberhalb Stuls und am SW. Thalgehänge gehen Conglomeratbänke zu Tag aus, die der gewöhnlichen Sernfbildung angehören und im Dorf Filisur

1) Studer erwähnt in seiner Geologie der Schweiz dieses Vorkommen nicht und verzeichnet auf der entsprechenden Karte an der betreffenden Stelle nur Verrucano. Erst Theobald unterscheidet hier Porphyr, über dessen Vorkommen er nur wenige Worte der Erläuterung beifügt.

von typischem rothem Sandstein und Schiefer der Werfener Schichten bedeckt werden.

Die Porphyrähnlichkeit des eben erwähnten Gesteins, welches in zahlreichen zackigen Felsrippen an den Gehängen vorspringt, wird dadurch verstärkt, dass die charakteristisch rhomboëdrisch geformten Bruchstücke in grossen Schutthalden über den Bergabhang ausgebreitet sind. Nur die so deutliche und regelmässige schichtenähnliche Lagerung in oft ziemlich dünnen Bänken könnte Zweifel erregen, ob hier wirklich ein Porphyrstock auftaucht.

Die mikroskopische Untersuchung sehr zahlreicher Dünnschliffe aus den verschiedensten Bänken haben dies jedoch unzweifelhaft festgestellt und es ist nur die Frage über die Ursache dieser bankartigen Absonderung des Gesteins, bei welchem übrigens eine gewisse Analogie mit den sog. schiefrigen Porphyren der Windgälle und von zahlreichen anderen Fundorten, z. B. mit dem sog. Rofnaporphyr[1]) in der Schweiz nicht zu verkennen ist, näher zu erörtern.

Der Porphyr von Bellaluna[2]) trägt nach den Dünnschliffen durchweg den Charakter eines Quarzporphyrs an sich. Er besteht vorherrschend aus einer meist blass meergrünen Grundmasse mit reichlich eingestreuten fast wasserhellen Quarzkörnchen, trüben Feldspathausscheidungen und meist spärlich beigemengten, schwarzen und hellen Glimmerschüppchen. Seltener sind mehr oder weniger rothgefärbte Bänke und hell fleischfarbige Abänderungen zu beobachten. Die Grundmasse ist ziemlich gleichartig krystallinisch ausgebildet und zeigt in p. L. schwache, ins Feinste gehende Aggregatfarben. Dunklere Flecke, Streifen und Faserzüge

1) Vergl. Heim in Beit. z. geol. Karte d. Schweiz. 25. Bd. S. 380 und Studer, Index d. Petrogr. S. 204.

2) Das Folgende ist nur eine vorläufige Schilderung der petrographischen Beschaffenheit; eine eingehendere Beschreibung werde ich an anderer Stelle geben.

unterbrechen die sonst gleichförmigen, lichtgrünlichen Bestandtheile und nehmen, wie die zu der bankartigen Absonderung senkrecht genommenen Dünnschliffe deutlich erkennen lassen, einen parallel-flasrigen Verlauf, der den Eindruck einer Schiefer-artigen Textur hervorruft und dem Gemengtheil eine Aehnlichkeit mit dem Sericit, wie er gewöhnlich in den schiefrigen Gesteinen der Alpen aufzutreten pflegt, verleiht. Ich erachte die Substanz jedoch nicht für sericitisch und die verschiedenartige Parallelstreifung für eine Fluktuationserscheinung in der quarzig felsitischen Grundmasse. Denn es kommen auch Lagen oder Bänke vor, in welchen die Mesostasis diese Streifung nicht besitzt, sondern einfach mikrokrystallinisch entwickelt ist. Nur in einzelnen Fällen beobachtet man eine rothe staubartige Substanz so reichlich eingestreut, dass das Gestein im Ganzen eine rothe Farbe annimmt. In anderen Fällen scheint die Grundmasse nur die Rolle eines Bindemittels zwischen trümmerigen, kleinen Mineraltheilchen und Gesteinsstückchen zu spielen, so dass daraus Uebergänge in geschichtete Tuffe, Trümmerlagen, Breccien und wirkliche Schiefer hervorgehen.

Alle diese Gesteinsabänderungen enthalten mehr oder weniger häufig Quarzkörnchen, welche zwar keine Krystallform wahrnehmen lassen, aber doch meist mit scharfen, gradlinig verlaufenden Rändern begrenzt sind, nur ausnahmsweise rundliche Umrisse besitzen oder in die Grundmasse zu verfliessen scheinen.

Diese Quarzkörnchen sind fast ausschliesslich wasserhell, selten von unreinen parallelen Streifchen durchzogen; sie umschliessen jedoch zahlreiche, von Gasbläschen erzeugte Wolken und Striche. Fast ausnahmslos sind sie von zahlreichen Rissen zerspalten, in einzelne Theile auseinander gesprengt, aber nicht stark verschoben. Denn i. p. L. zeigen die verschiedenen Theile durchweg gleiche Farben, welche zuweilen bei keilförmig verschieden dicken Blättchen wechselt.

Nur in einzelnen Fällen konnte eine undulöse Auslöschung beobachtet werden. Eine Umformung des Quarzes in ein gestrecktes linsenförmiges Korn wurde nie wahrgenommen. Die etwas klaffenden Risse sind meist mit derselben Substanz, aus der die Mesostasis besteht, ausgefüllt und zuweilen ist diese Ausfüllungssubstanz querfasrig gestreift. Sackähnliche, von der Grundmasse ausgehende Einbuchtungen in die Quarzmasse von gleicher Beschaffenheit wie die Grundmasse kommen häufig vor und dringen oft tief in die Quarzkörner ein.

Die sehr zahlreichen Feldspathausscheidungen besitzen auf den Spaltflächen meist lebhaften Glanz ohne Parallelstreifung. Sie kommen theils fleischfarbig, theils weisslich gefärbt vor. In Dünnschliffen zeigen sie meist milchig trübe, in p. L. schwache bunte Färbung, die oft aggregatartig, nie parallelstreifig wechselt, selbst nicht, wenn sie, wie es zuweilen der Fall ist, parallele dunkle Streifen wahrnehmen lassen. Diese Feldspaththeile gehören daher mit grosser Wahrscheinlichkeit dem Orthoklas in verschiedenen Stadien der Umänderung und Zersetzung an. Im Gegensatz zum Quarz sind diese Feldspathausscheidungen nicht zerklüftet oder zerrissen und in einzelne Theile zerstückelt.

Am meisten verändert sind die Glimmerbeimengungen, sowohl die dunkel gefärbten, wie die hellen. An den von ersteren eingenommenen Stellen finden sich dunkle Körnchen zwischen lichten Streifchen ausgeschieden und bilden theils unregelmässige Häufchen, theils einen schmalen Rahmen um die Aussenseite der Glimmerblättchen. Auch die hellfarbigen Glimmerschüppchen sind vollständig opak und von dunklen Parallelstreifchen durchzogen.

Neben diesen regelmässigen Einsprengungen kommen auch noch Eisenmineralien — wahrscheinlich zersetztes Magneteisen und Schwefelkies —, neugebildete Kalkspathkörnchen und ziemlich häufig theils rothe, theils gelbe unregelmässig umgrenzte Ausscheidungen etwa von der Grösse der Feld-

spaththeile vor. Sie scheinen Bruchstücken eines fremden Gesteins zu entsprechen, welche in die Teigmasse des Porphyrs aufgenommen worden sind. Durch ihre Anhäufung entstehen jene trümmerartigen Breccien, welche einestheils zu Casanaschiefer hinneigen, anderntheils dem Sernfconglomerat ähnlich werden.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass der petrographische Charakter des Gesteins von Bank zu Bank wechselt, ohne jedoch die Beschaffenheit eines eruptiven Porphyrs zu verlieren. Ausgenommen sind die weichen Zwischenschichten, welche entweder deutlich die Beschaffenheit eines sedimentären Schiefers oder von tuffigen, selbst breccienartigen Lagen erkennen lassen.

Ganz dieselbe bankartige schieferähnliche Ausbildung in der gleichen Vergesellschaftung mit sog. Verrucano fand ich auch in dem Porphyr des Sandhübels bei Wiesen, an der Mayenfelder Furka und am Kummerhübel W. v. Frauenkirch unweit Davos.

Noch bemerkenswerther ist ein vollständig gleiches Vorkommen zwischen den rothen Conglomeratbänken, welches ich unfern des Spinabades bei Davos im Landwasserthal beobachtete, weil hier ein grösseres Porphyrvorkommen nicht bekannt ist. Auf die Aehnlichkeit des sog. schiefrigen Porphyrs von der Windgälle und des sog. Rofnaporphyrs ist schon früher hingewiesen worden. Ausserdem werden von C. Schmidt[1]) noch Quarzporphyrschiefer von Piz Cavel und bei Fronscha im Hintergrund des Somvixer Thales erwähnt. Aehnliche anscheinend schiefrige Porphyre habe ich in den Südalpen bei Fraine[2]) unfern Lovere am Iseosee nachgewiesen. Auch gewisse zu dem Besimaudite gerechnete

1) C. Schmidt im Anhang zu den Beiträgen zur geol. Karte der Schweiz 1891, 25. Lief. S. 28 und 29.

2) v. Gümbel, in den Sitz.-Ber. d. Münchener Ak. d. Wissensch. math.-phys. Classe, 1880, S. 197.

schieferartige Porphyre[1]) gehören in die Reihe dieser Ausbildungsweise des Porphyrs. Dieselbe erweist sich demnach als eine im Alpengebiete weit verbreitete und desshalb besonders zu beachtende Erscheinung, welche mit der Bildung der ausseralpinen Porphyroide nicht zusammengeworfen werden darf. Die Häufigkeit des Vorkommens solcher sog. Porphyrschiefer in den durch starke Zusammenfaltung der Gesteine ausgezeichneten Alpen scheint zu Gunsten der schon mehrfach ausgesprochenen Annahme[2]) gedeutet werden zu können, dass die eigenthümliche Struktur dieser Porphyre auf dynamometamorphische Wirkungen zurückzuführen sei. Ich kann diese Ansicht nicht theilen, weil auch die äussere Form der Gesteinslagen eine schichtenartige Ausbildung erkennen lässt und die Bänke wohl abgegrenzt zwischen geschichteter Ablagerung eingebettet vorkommen. Auch die innere Textur des Gesteins entspricht nicht einer durch Druck entstandenen Streckung und Schieferung, wie sie bei dem Plattenporphyr, z. B. bei Auer unfern Bozen, sich beobachten lässt. Ich halte diese Entwicklung für eine deckenförmige Ausbreitung einer eruptiven Porphyrmasse, welche sich während der Ablagerung von Sedimentschichten vielfach wiederholte, wobei durch rasche Abkühlung ein Zerreissen und Zerklüften der Quarzausscheidungen erfolgte, während die Bewegung der Masse die durch die Streifung der Mesostasis angedeutete Fluktuationserscheinung hervorrief.

Anhangsweise sei darauf aufmerksam gemacht, dass im benachbarten Dunkangebirge oberhalb der Stulser Alp über den Porphyrdecken und den damit verbundenen Conglomeratbildungen Rauhwacke zu Tag tritt; auf diese folgt dann intensiv schwarzer Kalk, wie am Bärentritt bei Wiesen im Landwasserthal, welche von Kalkmergeln voll von leider

1) v. Gümbel, in den Sitz.-Ber. d. Münchener Ak. d. Wissensch. math.-phys. Classe 1892 XXII, 158.

2) Rosenbusch, Mikrosk. Physiogr. d. mass. Gest. II. Aufl. S. 411.

nicht freizulegenden Versteinerungen und einer Lage grünlich grauem Sandstein begleitet werden. Die Rauhwacke zieht sich in einer Mulde fort bis über die Passhöhe nach Dörfli, während der schroffe Grat des Dunkan sich aus den sehr mächtigen Schichten des schwarzen Kalks aufbaut.

Die Thermen von Pfäfers.[1])

Im Anschluss an die Beiträge zur Kenntniss der geologischen Verhältnisse der Thermen von Gastein, Bormio und des Brennerbades[1]) füge ich hier einige kurze Bemerkungen über die Beziehungen der warmen Quellen von Pfäfers zur Geologie ihrer Umgebung, insbesondere der Schiefergebilde, denen sie entspringen, bei.

Wir verdanken über diese Gegend eine eingehende geologische Beschreibung Escher's v. d. Linth[2]) und Theobald's.[3]) Letzterer bezeichnet die Gesteine der nächsten Umgebung der Thermen als Flyschschichten, mit welchen zugleich *Nummuliten* führende Kalkbänke vergesellschaftet seien. Escher bemerkt über diese Gegend unter Anderem: „Die Grundlage des ganzen Gebirgsstocks ist ein gneissartiges Gestein und darüber folgt eine bis 60 m mächtige Kalkbildung von Lias und Eisenoolith und dann die Hauptmasse des den Calanda und den Riegelkopf bildenden Jurakalks mit etwas Kreide. Daran schliesst sich eine sehr mächtige Bildung dunkelgrauer thoniger Schiefer, Sandsteine und untergeordneter Kalklagen mit *Nummuliten* und *Fucoiden* auch in der Taminaschlucht."

1) J. Fr. Kaiser, Die Therme von Ragaz-Pfäfers 1869; vollst. Lit.-Verzeichniss das. S. 81; Oesch, D. Heilquellen d. Bad Pfäfers, 1887.

2) Escher v. d. Linth, Ueber die Thermalquellen von Pfäfers in: Mittheilungen der naturforsch. Gesellschaft in Zürich 1849. I, Heft 2, S. 77.

3) G. Theobald, Naturbilder aus den rhätischen Alpen, 2. Aufl. 1862, S. 63 und in J. Fr. Kaiser a. a. O., Geologie S. 98.

Ich beabsichtige hier nicht, mich über die weitere Umgebung des Quellenbezirks auszusprechen, da wesentlich Neues zu den vortrefflichen Schilderungen Escher's und Theobald's nicht mitgetheilt werden könnte. Es sei nur auf die Thatsache aufmerksam gemacht, dass wir hier im Calfeuser Thal bei Vättis und im Gebirgsstock der grauen Hörner in mitten der nördlichen Kalkalpenrandzone einen, wie es scheint, stehen gebliebenen alten Urgebirgspfeiler vor uns sehen, der von Tödi her sich vom Hauptstock abzweigt und erst im Gebirge des oberen Montafun aus den sedimentären Ablagerungen der Landquart-Bucht wieder sich mächtig hervorhebt. Um diese Reste alter Urgebirgsstöcke legen sich nun zunächst die Strandgebilde des sog. Verrucano's (Sernfconglomerat) an. Darüber folgen rothe, dem Buntsandstein petrographisch völlig gleiche Sandsteinbänke in sehr beträchtlicher Mächtigkeit, dann rothe Schieferletten (3 m), Bänke weissen Sandsteins (5 m), Rauhwacke (10 m), ferner Steinmergelbänke (z. Th. sog. Röthidolomit) (25 m), rothe Steinmergel und rothe Schiefer im Wechsel mit gelb verwitternden harten Mergeln (6 m), weisser sehr harter Sandstein (3 m), gelb verwitternde dolomitische Lagen (2 m), endlich graue blättrige, sandige Schiefer (2 m) bedeckt von einer liasischen Pentacrinitenbank, welche, an sich wenig mächtig, von oolithischen Doggerschichten überlagert wird. Es ist dies der Typus für ein grösseres Gebiet der nördlichen Kalkalpenzone der Schweiz (Glarner Provinz), welches dadurch sehr bestimmt charakterisirt ist, dass alle Schichten zwischen Buntsandstein und Dogger auf ein Minimum reducirt sind, während Malm, cretacische und Eocängebilde sich mächtig entwickelt zeigen.

Was nun die nächste Umgebung der berühmten Thermen von Pfäfers anbelangt, so ist vorerst zu bemerken, dass die vielgenannte enge und tiefe Thalschlucht der Tamina, durch welche die Strasse von Ragaz nach dem Bad Pfäfers führt,

uns an zahlreichen Entblössungen der anstehenden Schichten vorüberführt, die grossentheils in der Richtung der Strasse von SSW. nach NNO. streichen und im Allgemeinen unter 35—40° nach SSO. einfallen. Sie stehen in einer hohen, nackten Felswand auf der Ostseite des Thals an, während auf der Westseite neben der Strasse streckenweise mächtiger Gehängeschutt das Ausgehende der Gesteinsschichten überdeckt. Es sind weit vorherrschend auf der ganzen Länge der Entblössung gleichartig dunkelgraue, durch Verwitterung aschfarbige, dünngeschichtete, schuppig zerfallende Mergelschiefer, auf deren Schichtflächen häufig kleine, körnige Erhöhungen, unregelmässig, oft bandartig verlaufende, dunkler gefärbte Flecken und von zersetztem Schwefelkies herrührende — Echinidenstacheln ähnliche — ganz kleine stabförmige Einschlüsse sich bemerkbar machen. Die dunklen Flecken nehmen zwar zuweilen Formen an, wie solche gewisse Algeneinschlüsse zu besitzen pflegen, doch habe ich keine beobachtet, welche mit jenen des typischen Flysches übereinstimmen. Ueberhaupt besitzen diese Schiefer in ihrer petrographischen Beschaffenheit durchaus nicht das Aussehen des eigentlichen Flysches; sie ähneln vielmehr jenen Mergelschieferschichten, welche den Seewenkalk im Hangenden zu begleiten pflegen. Die erwähnten kleinen, z. Th. aus Quarz, z. Th. aus Kalkspath und Schwefelkies bestehenden Körnchen auf den Schichtflächen gehören, wie Dünnschliffe erkennen liessen, wenigstens z. Th. organischen Einschlüssen — vorherrschend *Foraminiferen* (*Globigerinen*, *Nodosarien* u. A.) — an. Lederbraune Häutchen mit zelliger Struktur rühren von pflanzlichen Resten her. Glimmerschüppchen und Schwefelkiesausscheidungen sind ziemlich häufig beigemengt. Nach Entfernung des Kalks durch Säuren bleibt ein Haufwerk kleiner Klümpchen im Rückstand, das aus Thonflocken und Quarztheilchen besteht. Rutilnädelchen wurden keine beobachtet.

Neben diesen fleckigen, flasrig schiefrigen Mergeln kommen auch halbglimmrig schimmernde, bituminöse, tiefschwarze, ebenflächige, mit Säuren nicht brausende, fein parallel gefältete Schiefer vor, die man bei Hof Vadura sogar als Dachschiefermaterial zu verwenden versucht hat.

Zwischen diese weit vorherrschend schiefrigen Gesteine legen sich häufig ziemlich dicke Bänke von dunkelgrauen, z. Th. dichten, z. Th. etwas krystallinisch körnigen Kalken und kalkigen Sandsteinen an, welche neben den viel leichter verwitternden Schieferschichten gesimsartig vorstehen oder unterwaschen und verstürzt in grossen Blöcken über die Berggehänge ausgestreut sind. In einzelnen solcher festen Kalkgesteine finden sich grosse *Nummuliten* eingeschlossen. Auf dem frischen Bruch des Gesteins sind sie jedoch schwierig zu erkennen, treten aber sehr leicht kenntlich auf der angewitterten Oberfläche hervor. Durch dieses Vorkommen ist die Zugehörigkeit des zweifellos einheitlichen Schichtencomplexes zu der Eocänstufe sicher gestellt, aber man darf die Bildung nicht mit dem typischen Flysch zusammenwerfen und vereinigen. Leider fehlt es in der Taminaschlucht und, wie es scheint, auch in der ganzen Nachbarschaft in diesen Schichten an anderen organischen Einschlüssen ausser den *Nummuliten*, um die Stufe, der sie innerhalb der Eocänabtheilung angehören, näher zu bestimmen.

Sehr bemerkenswerth ist das Geschlossene dieses ganzen sehr mächtigen Schichtensystems. An den nackten deutlich blossgelegten, hohen Felswänden auf der Ostseite der Taminaschlucht lassen sich keine grösseren Spalten oder Klüfte mit Verwerfungen, höchstens feine Risse und kleine Schichtenfaltungen wahrnehmen. Die Taminaschlucht ist nicht, wie man nach ihrer Enge und Tiefe anzunehmen geneigt sein könnte, ein Spaltenthal, wie dies auch Theobald schon ausgesprochen hat, sondern eine Auswaschungseintiefung, ein Furchenthal, das in fast gradliniger Richtung von Ragaz

bis zu den Quellen auf 3,7 km in die Schichten eingeschnitten ist.

Die schmale Thalrinne verengt sich oberhalb des Badhauses bis zum Quellpunkte noch mehr zu einer kaum 10 m breiten Felsenklamm, an deren oft 50 m hohen, oben stellenweise überhängenden und sich fast berührenden Wänden in verschiedener Höhe seitliche wannenförmige Aushöhlungen die allmählig nach der Tiefe fortschreitende Ausnagung bis zum jetzigen Bachbett erkennen lassen.

In diesem engsten Theil der Schlucht oberhalb des Badehauses stehen dieselben geschlossenen Gesteinsschichten auf ungefähr 500 m Länge bis zu dem Ursprung der Quellen an. Auch auf dieser Strecke bemerkt man keine Verwerfungsspalte. Ursprünglich flossen Quellen in verschiedener Höhe, nämlich oben die sog. Kesselquelle, etwas höher die sog. Herrenquelle und nahe auf der Thalsohle die sog. Gumpenquelle aus einer in NNW.—SSO. streichenden Spalte, welche quer durch die Taminaschlucht zieht und durch eine gelbliche ockerige Färbung an den Gesteinswänden sich weit hinauf kenntlich macht. Bei einer Aufräumarbeit bis zur vollständig blossgelegten Thalsohle fand man dann noch tiefer im Bachbett selbst hervortretende Quellenadern auf derselben Spalte. Um die Quellen zu fassen, wurde später (1857—1858) vor der Kesselquelle ein Stollen in den Felsen getrieben, der bei 33 m Länge auf eine Höhlen-artige Erweiterung der Spalte und auf eine derselben entströmende Therme stiess. Damit versiegte gleichzeitig die höher liegende Herrenquelle. In diesem künstlichen Aufschluss quillt das warme Wasser mit 37,5° C. Temperatur ohne bemerkenswerthe Spannung und ohne merkliche Gasentwicklung hervor. Die Menge des gesammelten Wassers soll 400 Liter in der Minute betragen. Auffallend ist, dass unmittelbar neben diesen warmen auch eine gewöhnliche kalte Quelle mit 8,5° C. zu Tag tritt; sie entspringt jedoch nicht einer Gesteinsspalte, sondern kommt

zwischen anstehendem Fels und Gehängeschutt zum Vorschein, hat also mit den Thermen nichts zu schaffen.

Abgesehen von der schwach ockerhellen Färbung des Gesteins unmittelbar an der Quellenspalte gegen oben hin bemerkt man in der Nähe des Abflusses der Thermen keinen Sinterabsatz; nur eine grüne, schleimige Algenhaut überzieht die Felsen, über welche das nicht benützte Thermalwasser abfliesst. Dieses Verhalten deutet auf einen nur minimalen Gehalt der Thermen an Mineralsalzen. Nach der Analyse von Dr. A. v. Planta-Reichenau[1]) aus dem Jahre 1868 enthält das Thermalwasser hauptsächlich Carbonate, Sulphate und Chloride und zwar in einem Liter:

Kohlensaure Kalkerde	0,13064
„ Bittererde	0,05306
Kohlensaures Natrium	0,00613
„ Eisenoxydul	0,00172
„ Strontium	0,00152
„ Baryum	0,00064
Chlornatrium	0,04934
Chlorlithium	0,00020
Jodnatrium	0,00001
Bromnatrium	0,00002
Schwefelsaures Natrium	0,03294
„ Kalium	0,00746
Borsaures Natrium	0,00038
Phosphorsaure Thonerde	0,00091
Kieselsäure	0,01408
Rubidium, Cäsium, Thallium	Spuren
Summe der Salze	0,29905
Halbfreie und freie Kohlensäure	0,07461

Der verhältnissmässig geringe Gehalt des Thermalwassers an Mineralbestandtheilen, welcher selbst geringer ist, als

1) J. Fr. Kaiser, a. a. O. S. 123 und ff.

jener der Gasteiner Thermen (Gesammttrockenrückstände im Liter 0,3399) beweist, dass, wenn auch der Gehalt an Kalkcarbonat vorherrscht, die Quellen nicht aus dem Kalkgebirge stammen können. Es ist vielmehr anzunehmen, dass die aufgenommenen Salze Auslaugungsprodukte des tieferen, aus Urgebirgsfelsarten bestehenden Untergrundes sind. Solche gneissartigen Gesteine bilden, wie in dem Vorausgehenden angedeutet wurde und von Escher v. d. Linth wie von Theobald ausführlich beschrieben sind, das Fundament der benachbarten höheren Gebirge und gehen in der Nachbarschaft bei Vättis am Fuss des Calanda selbst zu Tag aus. Dass sie den eigentlichen Grundstock der ganzen Gebirgsgruppe ausmachen, ist kaum zu bezweifeln. Dadurch ist die Vermuthung begründet, dass die Thermen von Pfäfers diesem Untergrundsgestein entstammen.

Daneben kommt dann noch eine andere Erscheinung in Betracht. Die Thermen von Pfäfers gehören nämlich zu den sog. Frühjahrsquellen, welche im Winter an Ergiebigkeit beträchtlich nachlassen, oft ganz versiegen und erst mit dem Eintreten des Frühjahrs gleichsam wieder neu erwachen und wachsen.

Darin stimmen nun alle Beschreibungen der Quellen von Pfäfers überein, dass sie in den meisten Jahren während des Winters nur spärlich fliessen, öfters gänzlich ausbleiben und dass diese Erscheinung meist mit strenger, lang anhaltender Kälte oder auch mit den Zeitperioden grosser Trockenheit zusammenhängt. Nach schwachem Schneefall im Hochgebirge verzögert sich die Zunahme des Quellenergusses im Frühjahr, der lange ein spärlicher bleibt. Ein solcher Wechsel macht sich namentlich an den höher liegenden Quellpunkten bemerkbar, während die tieferen im Bachbett selbst ausfliessenden Quellen grössere Beständigkeit besitzen.

Diese Verhältnisse weisen mit Entschiedenheit auf eine Ernährung der Quellen von den höchsten Gebirgstheilen,

ähnlich wie bei den Quellen von Bormio, vom Brenner u. s. w. hin. Dazu kommt, dass in diesen höchsten Gebirgen der Umgegend, welche bis in die Region des ewigen Schnee's und der Gletscher emporragen (graue Hörner 2847; Wildseespitzen 2664 m u. s. w.) die ältesten Sedimentschichten zu Tag ausstreichen, unter denen in ganz unbeträchtlicher Tiefe sicherlich dann die krystallinischen Gesteinsbildungen den Untergrund ausmachen. Es ist daher wohl gerechtfertigt, anzunehmen, dass das in den höheren Bergen von der Oberfläche auf Spalten in die Tiefe niedersitzende Meteor-, Schnee- oder Gletscherschmelz-Wasser, indem es in das Innere des Gebirgs eindringt und die hier herrschende hohe Temperatur annimmt, an den auf diesem unterirdischen Laufe berührten krystallinischen Gesteinsmassen des Gebirgskerns durch Auslaugung diejenigen Mineralstoffe aufnimmt, mit welchen die Quellen von Pfäfers angereichert sich erweisen. Auf diese Weise erklärt sich die hohe Temperatur und der Gehalt der Thermen von Pfäfers, wie der mit den Schneeverhältnissen des Hochgebirgs zusammenhängende Wechsel ihrer Ergiebigkeit.

STANFORD LIBRARY

Sitzung vom 4. März 1893.

1. Herr K. v. ORFF überreicht den II. Theil seiner „telegraphischen Längenbestimmungen für die k. Sternwarte zu Bogenhausen.“ Derselbe wird wie der I. Theil durch die Kommission für die internationale Erdmessung bei der k. Akademie der Wissenschaften veröffentlicht werden.

2. Herr L. SOHNCKE legt eine Abhandlung des Herrn Dr. STRAUBEL in Jena: „Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symmetrischer, nicht sphärischer Wellen“ vor. Dieselbe wird in die Denkschriften aufgenommen werden.

3. Herr E. v. LOMMEL macht eine Mittheilung über: „Aequipotential- und Magnetkraftlinien.“

— —

Aequipotential- und Magnetkraftlinien.

Von E. von Lommel.

(Eingelaufen 4. März.)

Ein homogener leitender Körper werde von einem elektrischen Strome durchflossen, der in zwei Punkten seiner Oberfläche ein- und austritt. Jede Stromlinie oder „Stromröhre“ ist, wie jeder lineare Leiter, von geschlossenen Magnetkraftlinien umringt, welche die Stromröhre, auf deren Axe ihre Ebenen überall senkrecht stehen, alle in demselben Sinne gleichsam umfliessen. Auf einer Fläche gleichen Potentials, welche sämmtliche Stromröhren rechtwinklig schneidet, grenzen die elementaren Magnetströmchen benachbarter Stromröhren unmittelbar aneinander, und heben sich durch die ganze Aequipotentialfläche gegenseitig ganz oder theilweise auf, ausgenommen da, wo die Aequipotentialfläche die Oberfläche des leitenden Körpers längs einer Aequipotentiallinie rechtwinklig durchschneidet. Hier fliessen sie zu einem einzigen Strome magnetischer Kraft zusammen, welcher den Rand der Aequipotentialfläche in demselben Sinne wie jene elementaren Magnetströmchen umkreist. Jede Aequipotentiallinie ist daher eine auf der Oberfläche des Leiters verlaufende in sich zurückkehrende Magnetkraftlinie. Diese Magnetkraftlinien, also auch die Aequipotentiallinien, lassen sich, wie ich bereits gezeigt habe[1]), auf einer durchströmten ebenen Platte durch aufgestreute Eisenfeile sichtbar machen.

1) Lommel, d. Sitzungsber. XXII, S. 371, 1892.

Wir nennen Stromfläche jede Fläche, welche durch eine stetige Aufeinanderfolge von Stromlinien gebildet wird. Durch jede Stromlinie lassen sich alsdann unendlich viele Stromflächen legen, welche alle auf den Aequipotentialflächen senkrecht stehen, und sämmtlich durch die beiden Elektrodenpunkte hindurchgehen. Aus dieser unendlichmal unendlichen Fülle von Stromflächen kann man nun durch Festsetzung gewisser Merkmale einzelne Schaaren herausheben, welche für die weitere Betrachtung besonders bequem sind, wie z. B. diejenige Schaar, welche die Körperoberfläche, die ja stets eine Stromfläche ist, in sich enthält und sich beiderseits an sie anschliesst. Eine zweite Schaar bilden die Stromflächen, welche sich in der geraden Verbindungslinie der Elektroden (die eine Stromlinie ist und auch dann als solche aufzufassen ist, wenn sie ganz oder theilweise ausserhalb der leitenden Körpermasse verläuft) schneiden. Je eine Fläche der einen und eine Fläche der anderen Schaar schneiden sich in einer Stromlinie, und die beiden Schaaren von Flächen zerlegen den Raum in Stromröhren.

Wie einerseits die Körperoberfläche stets eine Stromfläche ist, so kann andrerseits jede Stromfläche als Begrenzungsfläche des Leiters gewählt werden. Man kann daher durch Schnitte, die längs Stromflächen geführt werden, Stücke des Körpers abtragen, oder ihm von Stromflächen begrenzte Stücke anfügen, ohne dass in dem übrigbleibenden oder in den neu hinzugekommenen Körpertheilen die Gestalt und Lage der Aequipotentialflächen und der Stromlinien eine Aenderung erfährt. Kennt man daher für irgend einen Körper diese Flächen und Linien, so kennt man sie auch für eine Unzahl von Körperformen, die sich auf die angegebene Weise aus dem gegebenen Körper bilden lassen.

Betrachten wir z. B. den unendlichen Raum als mit leitender Masse erfüllt, so ist unmittelbar ersichtlich, dass in diesem allseitig unbegrenzten Leiter die Aquipotentialflächen Rotations-

flächen um die Verbindungslinie der Elektroden als Axe, und sämmtliche Meridianebenen Stromflächen sind. In jeder Meridianebene bieten die Aequipotential- und Stromlinien ein ähnliches Bild dar, wie die beiden Systeme zu einander rechtwinkliger Kreise in Fig. 1. Nur sind die Aequipotentiallinien in diesem Falle nicht Kreise, sondern Curven, welche der Gleichung $^1/_r - {}^1/_{r'} = \text{Const.}$ genügen (wenn r und r' die Entfernungen eines Punktes der Ebene von den Elektrodenpunkten A und B bezeichnen), und die Stromlinien sind die dazu senkrechten Trajectorien. Lässt man beide Systeme von Curven um die Axe AB rotiren, so erzeugen die ersteren die Aequipotentialflächen, die letzteren eine Schaar von Stromflächen, welche mit den Meridianebenen zusammen den Raum in Stromröhren zerschneiden. Jede dieser Stromflächen kann als Oberfläche eines Körpers angenommen werden, den sie aus der leitenden Masse herausschneidet und gegen den übrigen nun als nichtleitend anzunehmenden Raum abgrenzt. Aus jedem so entstandenen Körper kann durch zwei Meridianebenen eine Schnitze herausgeschnitten oder es kann der Körper durch eine Meridianebene halbirt werden. Man kann ferner innerhalb eines solchen Körpers durch eine zweite jener Stromflächen Hohlräume bilden, und so z. B. schalenförmige Körper erhalten, überhaupt die mannigfaltigsten Körperformen, soweit sich deren Oberflächen mittels der von den gegebenen Aequipotentialflächen bedingten Stromlinien bilden lassen.

Will man dagegen die Strömung in einem gegebenen leitenden Körper kennen lernen, so hat man zunächst die zugehörigen Aequipotentialflächen zu finden, welche die Oberfläche des Körpers, die ja stets eine Stromfläche ist, rechtwinklig schneiden. Denkt man sich den Körper um die Verbindungslinie AB der beiden Elektroden gedreht, so wird, da seine Lage in Beziehung zu den Elektroden die nämliche bleibt, die Strömung nicht geändert. Bei dieser Drehung

beschreibt jeder Punkt einer Aequipotentiallinie, indem er auf der zugehörigen Aequipotentialfläche bleibt, einen Parallelkreis um die Drehungsaxe AB. Die Aequipotentialflächen sind also auch in diesem Falle Rotationsflächen um diese Axe.

Betrachten wir z. B. eine Kugel mit beliebig auf ihrer Oberfläche gelegenen Elektrodenpunkten A und B. Man weiss, dass jeder Kreis, welcher durch A und B geht, von allen Kreisen orthogonal geschnitten wird, deren Mittelpunkte in die Verlängerung der Geraden AB fallen, und welche diese Gerade in Punkten schneiden, die zu den Punkten A und B harmonisch liegen ($AE : AF = BE : BF$, Fig. 2; in Fig. 1 stellen bekanntlich jene Kreise, welche durch die Elektrodenpunkte A und B gehen, die Stromlinien, diese Kreise die Aequipotentiallinien für eine unbegrenzte ebene Platte dar). Dreht sich nun das erstere System von Kreisen um die in der Mitte von AB errichtete Senkrechte CD, so erzeugt jeder Kreis eine durch A und B gehende Kugelfläche, welche von allen Kugeln, die durch Rotation des zweiten Systems von Kreisen um AB entstehen, rechtwinklig geschnitten wird. Lässt man nämlich zwei beliebige Kreise der beiden Systeme, die sich in P und Q (Fig. 2) rechtwinklig schneiden, um die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte O und M rotiren, so erzeugen sie die nämlichen Kugelflächen, als wenn man den Kreis M für sich um AB, den andern O für sich um CD rotiren lässt, und man sieht, dass die beiden Kugeln längs der Kreislinie, in welcher sie sich schneiden, ringsum auf einander senkrecht stehen. Die Kugelflächen des zweiten Systems sind daher die zu jeder Kugel des ersten Systems gehörigen Aequipotentialflächen, und jede Kugelfläche, welche durch die Elektroden A und B geht, ist eine zu den aequipotentialen Kugeln gehörige Stromfläche, und kann daher als Begrenzungsfläche eines leitenden Körpers angenommen werden. Hienach ist aber die Frage nach den Aequipotential- und Stromlinien auf einer Kugelfläche mit zwei beliebig auf ihr ange-

brachten Elektroden ohne Rechnung beantwortet. Die Linien gleichen Potentials ergeben sich nämlich als Kreise, deren Ebenen sich alle in der Durchschnittslinie der in den Elektrodenpunkten an die Kugel gelegten Tangentialebenen schneiden. Denn legt man an den Kreis O Fig. 2 im Punkte B eine Tangente, welche die verlängerte CD in T schneidet, zieht durch T eine beliebige Secante TPQ, fällt auf diese von O aus eine Senkrechte, welche den Kreis in N und R, die Verlängerung von AB in M trifft, und verbindet M und O mit Q, so ist,

Fig. 1.

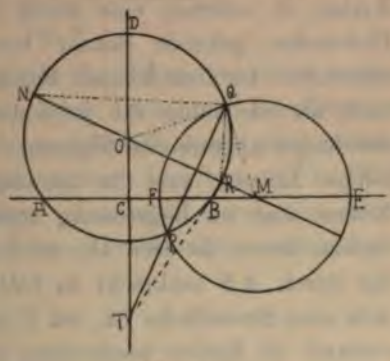


Fig. 2.

wenn man den Winkel MOQ mit φ bezeichnet, der Winkel $OQP = 90^0 - \varphi$ und der Winkel $OMQ =$ W. $ORQ -$ W. $ONQ = \frac{1}{2}(180^0 - \varphi) - \frac{1}{2}\varphi = 90^0 - \varphi$, folglich der Winkel $MQP = \varphi$. Es ist demnach Winkel $MQO =$ W. $OQP +$ W. $MQP = 90^0 - \varphi + \varphi = 90^0$, d. h. jeder von einem so bestimmten Punkt M der Geraden AB mit dem Radius MQ beschriebene Kreis schneidet den Kreis O in Q (und P) rechtwinklig, nach welchem Punkte Q des Kreisumfangs von T aus die Secante TQ auch gezogen wurde. Umgekehrt müssen alle durch die Schnittpunkte P und Q des Kreises O mit jedem der zu ihm orthogonalen Kreise, deren Mittelpunkte auf der verlängerten AB liegen, gezogenen Secanten durch den Punkt T gehen. Es müssen demnach auch im Raume

alle Ebenen, welche durch diese Secanten senkrecht zur Ebene der Zeichnung gelegt werden und die Kreise enthalten, längs welchen die Kugel O von der Schaar der zu ihr orthogonalen Kugeln M geschnitten wird, durch die in T auf der Ebene der Figur errichtete Senkrechte gehen, in welcher sich die in A und B an die Kugel O gelegten Tangentialebene begegnen. Auf dasselbe System von Aequipotentiallinien führt natürlich auch die analytische Behandlung der Aufgabe.[1]) — Die Stromlinien auf unserer Kugelfläche sind diejenigen Kreise, in welchen eine durch die Verbindungsgerade der Elektroden gehende Schaar von Ebenen die Kugelfläche schneidet. Da diese Ebenen Stromflächen sind, so kennt man auch die Strömung für jedes durch eine solche Ebene von der Kugel abgetrennte Segment, sowie für jede durch zwei solche Ebenen aus ihr herausgeschnittene Kugelschnitze. Nimmt man zur Begrenzung noch die kugelförmigen Stromflächen hinzu, die sich alle in dem Kreise schneiden, der in der durch AB senkrecht zu CD gelegten Ebene, die ebenfalls eine Stromfläche ist, um C mit dem halben Elektrodenabstand als Radius beschrieben ist, so lassen sich schalenförmige Körper bilden, die innen und aussen durch Kugelflächen begrenzt sind, und für welche ebenfalls der Verlauf ihrer Strom- und Aequipotentiallinien bekannt ist.

Aehnliche Ueberlegungen zeigen, dass bei einem geraden Kreiscylinder mit Elektroden an den Endpunkten seiner Axe auf der Mantelfläche die Erzeugenden des Cylinders Stromlinien, die Parallelkreise Aequipotentiallinien sind, während auf den kreisförmigen Stirnflächen die Aequipotentiallinien von den Elektrodenpunkten aus beschriebene concentrische Kreise, die Stromlinien Radien derselben sind. Von dem Verlaufe der Aequipotentialflächen im Innern des Cylinders erhält man,

1) Boltzmann, Sitzungsber. d. Wiener Akad., math.-naturw. Classe, LII. S. 214. 1865.

wenn auch nur empirisch, eine Vorstellung durch Aufstreuen von Eisenfeile auf die Ebene eines durch die beiden Elektroden gelegten Schnitts. Die Feilspäne ordnen sich auf dieser Ebene in Linien von der in Fig. 3 angedeuteten Gestalt. Diese Linien stehen überall senkrecht zum Umfang

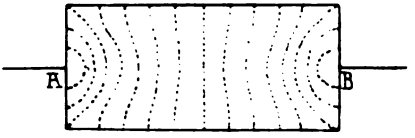


Fig. 3.

des Rechtecks, nur die durch die Ecken gehenden machen hievon eine, jedoch nur scheinbare, Ausnahme. Bei physischen Platten oder Körpern gibt es nämlich keine mathematisch scharfen Ecken und Kanten, sondern dieselben sind in Wirklichkeit mehr oder weniger abgerundet, und die Aequipotentiallinien stehen zu diesen Abrundungen senkrecht.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 134. Stiftungstages

am 21. März 1893.

Der Präsident der Akademie, Geh. Rath Professor Dr. v. Pettenkofer, eröffnete die Sitzung mit folgenden Worten:

Die k. Akademie der Wissenschaften feiert heute ihren 134. Stiftungstag. Bekanntlich wurde sie am 28. März 1759 durch den Wittelsbacher Kurfürsten Max Joseph gegründet, welcher in der Stiftungsurkunde wörtlich aussprach, dass er ihr Protector nicht nur heissen, sondern auch sein wolle. In diesem Sinne haben alle seine Nachfolger gehandelt und erfreut sich die Akademie auch des gnädigen Wohlwollens ihres derzeitigen Protectors, Sr. königlichen Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold von Bayern. Ich bin in der angenehmen Lage, heute zwei Zeichen Allerhöchstseiner gnädigen Gesinnung verkünden zu können. Durch Professor v. Rümann's kunstgeübte Hand lässt der Prinz-Regent die Marmorbüste unseres jüngsten Ehrenmitgliedes, Ihrer königlichen Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern, höchstwelche unsere heutige Sitzung mit ihrer Gegenwart beehrt, ausführen und schenkt

sie der Akademie. Ausserdem hat Se. k. Hoheit, unser allergnädigster Protector, beschlossen, auch sein eigenes Bildniss für unseren Festsaal anfertigen zu lassen, welches diesem zur Zierde und uns Allen zur hohen Freude gereichen wird.

Der heutige Tag sei auch dazu bestimmt, Auszeichnungen kundzugeben, welche die Akademie seit ihrer letzten öffentlichen Sitzung (15. November 1892) verliehen hat. Das Curatorium der mit der Akademie verbundenen Liebig-Stiftung hat dem Professor der Technischen Hochschule Dr. Martin Wollny für seine von allen Landwirthen anerkannten Untersuchungen über die Physik des Ackerbodens die goldene Liebig-Medaille zuerkannt. Die silberne akademische Denkmünze „Bene merenti" erhielten folgende durch Beiträge zu den wissenschaftlichen Sammlungen des Staates verdiente vier Herren: 1. Herr Jean Pierre Alibert in Paris zur Anerkennung für seine Schenkung von drei Nephrit-Platten und Ueberlassung einer Graphit-Trophäe, welche der technologischen Abtheilung der mineralogischen Sammlung einverleibt wurden. 2. Herr Dr. Hans Meyer in Leipzig zum Dank für werthvolle Schenkungen an das k. ethnographische Museum. 3. Herr Otto Günther, Director der Liebigs Fleischextractfabrik in Fray Bentos in Uruguay. Derselbe schickte und schenkte dem Präsidenten fossile Knochen, aus den südamerikanischen Pampas ausgegraben, welche der paläontologischen Sammlung zugetheilt wurden, wo daraus soeben fast das ganze Gerippe eines riesigen Mastodon zusammengestellt wird. 4. Herr Apotheker Rothdauscher in Rosenheim, der sich längere Zeit in Holländisch-Indien befand und werthvolle Gegenstände sowohl an das k. ethnographische Museum als auch an die zoologische Sammlung des Staates schenkte.

Der Classensekretär, Herr C. v. Voit, gedachte der verstorbenen Mitglieder der mathematisch-physikalischen Classe.

Dieselbe hat im verflossenen Jahre sechs ihrer auswärtigen und correspondirenden Mitglieder durch den Tod verloren.

1. Der Professor der Botanik und Direktor des botanischen Gartens zu Palermo, Senator des Königreichs Italien Dr. Agostino Todaro, der angesehenste Botaniker seines Vaterlandes, ist am 18. April 1892 im 62. Lebensjahre gestorben.

Der älteren systematischen Schule angehörig hat er sich durch die Bearbeitung der sizilianischen Flora sowie durch die Verwerthung des reichen Materials des von ihm in mustergiltiger Weise geleiteten botanischen Gartens zu Palermo, den er zum ersten Italiens gemacht hat und welcher als der am weitesten nach Süden vorgeschobene bedeutendere Garten Europas für die Kultur und Beobachtung tropischer Gewächse die grösste Wichtigkeit erlangt hat, um die Wissenschaft erheblich verdient gemacht.

2. Am 27. April 1892 verschied der kais. russ. Staatsrath Eduard v. Regel, Direktor des botanischen Gartens zu St. Petersburg.

Die hervorragenden Verdienste, welche Regel sich erworben hat, betreffen vorzüglich das Gebiet, welches die Wissenschaft mit der Praxis verbindet; er vereinigte in seltener Weise die zwei Gaben, ein ausgezeichneter Gärtner und ein tüchtiger Botaniker zu sein. Schon als er sich in seiner Jugend für den Beruf eines botanischen Gärtners vorbereitete, schlug er den ungewöhnlichen Weg ein, dass er die Gymnasial- und Universitätsstudien durchmachte und sich sowohl allgemeine als auch botanische wissenschaftliche Bildung aneignete. Seine bedeutendsten Leistungen waren die in der Pflanzenkultur und im Obstbau, namentlich war er

durch höchst geschickte Akklimatisationsversuche ertragsfähiger besserer Obstsorten und anderer Pflanzen mit grösstem Erfolge thätig. Aber auch auf dem Felde der wissenschaftlichen Botanik hat er Namhaftes geleistet, indem er die so schwer zugänglichen und so wenig bekannten Pflanzenschätze des centralen Theiles von Asien durch Bewerkstelligung von Forschungsreisen erschloss.

Regel war längere Zeit Inspector des botanischen Gartens zu Zürich, woselbst er ein inniges Freundschaftsverhältniss mit unserem berühmten verstorbenen Mitgliede, Carl v. Nägeli, schloss. Er trat dadurch später auch in nähere Beziehungen zu den hiesigen gelehrten Kreisen; so kam es, dass die von ihm in den russischen Ostseeländern wetterhart gezogenen Kernobstsorten mit Erfolg in den Gärten des rauhen oberbayerischen Vorgebirges eingeführt wurden und dass auch das hiesige Herbarium seiner Freigebigkeit wiederholt Sendungen seltener Pflanzen aus den Steppen und Hochalpen des Kaukasus, des Altai, des Hindukusch etc. verdankt, durch welche er für die hiesigen wissenschaftlichen botanischen Untersuchungen höchst werthvolle Materialien lieferte.

3. Am 6. Mai 1892 hat ein rascher, schmerzloser Tod dem reichen Leben des berühmten Berliner Chemikers August Wilhelm v. Hofmann ein unerwartetes Ende gemacht. Er war einer der talentvollsten Schüler Liebig's und einer seiner Assistenten im Giessener Laboratorium, in welchem dazumal die aus allen Ländern der Erde zusammengeströmten jungen Chemiker mit seltenem Eifer und grösstem Erfolge thätig waren.

Hofmann hat durch seine glänzenden Entdeckungen, namentlich der Ammoniakbasen mit zusammengesetztem Radikal und deren Abkömmlingen, insbesondere des Anilins, einen sehr grossen Einfluss auf die Entwickelung der theoretischen Chemie ausgeübt und er hat wesentlich dazu bei-

getragen, wenn wir heute über den Bau der organischen Verbindungen uns bestimmte Vorstellungen machen können. Es ist vorzüglich durch den Einfluss seiner Arbeiten erkannt worden, dass der Charakter einer chemischen Verbindung nicht nur von der Natur der in ihr enthaltenen Elemente, sondern auch von ihrer Lagerungsweise bedingt sei; ferner dass an Stelle der elementaren Atome Gruppen von Atomen zu treten vermögen, darunter auch organische zusammengesetzte Radikale; die von ihm dargestellten organischen Basen lieferten auch das Fundament für die heutige Valenztheorie.

Ausser durch diese seine mühsamen und scharfsinnigen Untersuchungen, welche ebensoviele Marksteine des Fortschrittes der organischen Chemie darstellten, hat Hofmann noch nach anderen Richtungen zum Wohle der Chemie beigetragen.

Durch seine mit seltener Klarheit geschriebene „Einleitung in die moderne Chemie", sowie durch die Erfindung zahlreicher zweckmässiger Apparate hat er die neue Theorie der Chemie weiteren Kreisen zugänglich gemacht und für deren Verbreitung gewirkt.

Seine Untersuchungen über das Anilin und dessen zahlreiche Derivate, durch welche ihm die Darstellung einer Reihe der glänzendsten Farben gelang, waren der Ausgangspunkt der grossartigen, beispiellos dastehenden deutschen Farbenindustrie.

Durch die Gründung der deutschen chemischen Gesellschaft, dieses ruhmvollen Werkes, wodurch er die deutschen Chemiker zu gemeinsamer fruchtbarer Thätigkeit vereinigte, wurde er, in Fortsetzung der von seinem unvergesslichen Lehrer Liebig ausgegangenen Bewegung, zum Führer der deutschen Chemiker.

Als Präsident der deutschen chemischen Gesellschaft hatte er den aus dem Leben geschiedenen Fachgenossen einen Nachruf zu widmen. Diese Gedächtnissreden „die Erinne-

rungen an dahingegangene Freunde" sind ebenso wahrheitsgetreu wie formvollendet geschrieben und sie haben ihren Autor zum Geschichtsschreiber der neueren Chemie erhoben. Jeder Gebildete wird diese Erinnerungen mit dem höchsten Interesse und mit immer erneutem Genusse lesen.

Hofmann hat der Chemie ein noch lange fortwirkendes reiches Erbe hinterlassen und es wird kaum möglich sein, ihn in seiner ganzen ausgebreiteten Wirksamkeit zu ersetzen. In voller Kraft hat ihn ein schöner Tod aus einem ebenso fruchtreichen wie glücklichen Leben abberufen.

4. Der Altmeister der englischen Zoologen und Paläontologen Sir Richard Owen, welcher durch seine zahlreichen hervorragenden Arbeiten hauptsächlich den Grund zu der heutigen Entwickelung der vergleichenden Anatomie gelegt hat und lange Zeit als der erste Kenner der fossilen Thiere, besonders der Wirbelthiere galt, ist am 18. Dezember 1892, 88 Jahre alt, aus dem Leben geschieden. Reich an Wissen, unermüdlich thätig, in unabhängiger, dem englischen Gelehrten nicht selten vergönnter Stellung, über die unermesslichen Schätze des British Museum verfügend, hat er die Wissenschaft mit einer Fülle von Thatsachen von dauerndem Werthe bereichert.

5. Am 5. Januar 1893 ist der angesehenste russische Mineraloge und Präsident der kais. mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg Nicolaus v. Kokscharow mit Tod abgegangen.

Kokscharow war bis in sein hohes Alter noch rastlos thätig und hat sich besonders durch seine umfassenden krystallographischen Untersuchungen, vor Allem durch sein grosses Werk; „Materialien zur Mineralogie Russlands" sehr verdient gemacht.

Die Feier seines 50 jährigen Dienstjubiläums im Jahre

1887 hat bei den Mineralogen aller Länder allgemeine Theilnahme gefunden und gezeigt, welch' hohen Rufes sich der Jubilar bei seinen Fachgenossen erfreute.

6. Zu Wien starb am 7. Januar 1893 im 58. Lebensjahre unser correspondirendes Mitglied, der Physiker Hofrath Dr. Joseph Stefan, Vicepräsident der Wiener Akademie der Wissenschaften. Er stand in grossem Ansehen durch seine äusserst sorgfältigen und feinen Untersuchungen über mannigfache und schwierige Probleme der mathematischen und experimentellen Physik, wie z. B. über die Fortpflanzung des Schalles in verschiedenen Leitern, über die Wärmeleitung, die Polarisation und Interferenz des Lichtes und die Gesetze der elektrodynamischen und der diamagnetischen Induktion. Der allzufrühe Abschluss des Lebens des geistreichen Forschers ist ein grosser Verlust für die Wissenschaft und besonders auch für die Wiener gelehrten Kreise.

Sitzung vom 6. Mai 1893.

1. Herr LUDWIG BOLTZMANN hält einen Vortrag: „Ü
die Beziehung der Aequipotentiallinien und
magnetischen Kraftlinien".

2. Herr E. v. LOMMEL macht zwei Mittheilungen:

a) Aequipotential- und Magnetkraftlinien; N
trag.

b) Objektive Darstellung von Interferenzers
nungen in Spectralfarben.

3. Herr KARL A. v. ZITTEL spricht über: „die g
logische Entwickelung, Herkunft und Verbreit
der Säugethiere".

4. Herr W. v. GÜMBEL legt eine von dem auswärti
Mitgliede der Classe, Professor F. v. SANDBERGER in W
burg, eingeschickte Abhandlung: „Das Erzvorkom
von Cinque valle bei Roncegno im Val Sugana
30 km östlich von Trient" vor.

Ueber die Beziehung der Aequipotentiallinien und der magnetischen Kraftlinien.

Von Ludwig Boltzmann.

(*Eingelaufen 6. Mai.*)

§ 1. In zwei Abhandlungen (diese Sitzungsberichte Bd. 22 Seite 371, 1892 und Bd. 23 Seite 103, 1893) hat Herr Professor v. Lommel eine äusserst interessante Methode angegeben, die Aequipotentiallinien in durchströmten Platten sichtbar zu machen und meines Wissens auch zum ersten Male die wichtige Frage nach ihrer Beziehung zu den Magnetkraftlinien angeregt. Dass diese beiden Curvenscharen im Allgemeinen einen ähnlichen Verlauf nehmen, zeigt Herr v. Lommel in folgender Weise: Die Aequipotentiallinien oder in durchströmten Körpern die Aequipotentialflächen stehen immer senkrecht zu den Stromlinien. Die magnetischen Kraftlinien umkreisen jeden Stromfaden in einer Fläche, die denselben senkrecht durchschneidet. An der Oberfläche eines Leiters wird die gesammte magnetische Kraft die Resultirende aller Magnetkraftlinien sein, die alle Stromfäden umkreisen. Da hiebei die in der unmittelbaren Nachbarschaft liegenden Stromfäden das Meiste zur Summe beitragen und zu ihrer eigenen Richtung senkrechte Magnetkraftlinien liefern, so werden auch die resultirenden Magnetkraftlinien

gewissermassen eine Tendenz haben an der Oberfläche senkrecht zu den Stromlinien zu stehen, also sich der Richtung der Durchschnittslinien der Aequipotentialflächen mit der Körperoberfläche anzuschliessen. Da aber zu den Magnetkraftlinien auch die entfernten Stromfäden, über deren Richtung man im Allgemeinen nichts weiss, beitragen, so werden die resultirenden Magnetkraftlinien im Allgemeinen aus den Aequipotentialflächen heraustreten können. Nach Maxwell's Theorie wird freilich der magnetische Zustand in jedem Punkte nur durch die Zustände der unmittelbaren Umgebung bedingt; man könnte daher meinen, die Magnetkraftlinien müssten an jeder Stelle durch die unmittelbar benachbarten Stromfäden allein schon bestimmt sein. Allein das wäre ein Irrthum, da durch die unmittelbar benachbarten Stromfäden bloss eine Differenzialgleichung für die Magnetkraft bestimmt ist, diese selbst aber noch von Grenzbedingungen abhängt, die für Magnetkraftlinien und Aequipotentialflächen ganz verschiedene sind.

Betrachten wir zuerst einen Punkt einer durchströmten Fläche: Die $x\,y$ Ebene sei Tangentialebene derselben im betrachteten Punkte, die x Richtung sei die Stromrichtung. Für die Componenten α, β, γ der magnetischen Induktion, welche in unmagnetisirbaren Substanzen mit denen der magnetischen Kraft zusammenfallen, haben wir dann:

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},\quad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx},\quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

u ist die Stromdichte, v und w verschwinden. Da α, β und γ, wenn die Platte dünn ist, in der z Richtung viel rascher als in den darauf senkrechten variiren, so erhalten wir:

$$\beta_0 - \beta_1 = 4\pi \int u\,dz,\quad \alpha_0 = \alpha_1$$

wozu noch kommt

$$\gamma_0 = \gamma_1,$$

was aus der Gleichung

$$\frac{d(\mu\alpha)}{dx} + \frac{d(\mu\beta)}{dy} + \frac{d(\mu\gamma)}{dz} = 0$$

folgt, wo μ die constant angenommene Magnetisirungszahl ist. Der Index Null bezieht sich dabei auf die eine, der Index 1 auf die andere Plattenseite. Bei jeder von Elektricität durchströmten Fläche ist daher die Differenz der magnetischen Kraft auf der einen und andern Seite endlich und senkrecht auf der Strömungsrichtung. Hätte man daher einen Nordpol auf der einen und einen gleich starken Südpol auf der andern Seite fest verbunden, so dass sie miteinander längs der Fläche beweglich wären, so würde die gesammte auf beide zusammenwirkende Kraft D überall senkrecht auf den Stromlinien sein. Addirt man hiezu noch die Kraft S, welche 2 gleich starke, gleich verbundene und gleich gelegene Nordpole erfahren würden, so erhält man die Kraft $M = D + S$, welche ein doppelt so starker nur auf der einen Seite befindlicher Pol erfährt. Die letztere Kraft ist daher immer senkrecht zu den Stromlinien, wenn die Kraft S es ist. Es folgt diess auch ohne Rechnung daraus, dass zu D nur die den Polen unmittelbar benachbarten Stromtheile beitragen, welche man als parallel in einer Ebene strömend betrachten kann. S könnte auch bezeichnet werden als die Kraft, welche an der betreffenden Stelle auf einen mitten in der Platte befindlichen Nordpol von doppelter Stärke wirkt. Ist die Platte eben, so ist S immer senkrecht auf der Platte, daher auch auf den Stromlinien und daher fallen auf der Oberfläche die Kraftlinien, d. h. die Linien, welche überall die Richtung der zu diesen parallelen Componente der magnetischen Kraft angeben, mit den Aequipotentiallinien zusammen. Natürlich stören auch Zuleitungsdrähte nicht, die in derselben Ebene liegen.

Hat man in einer Ebene einen Magnetpol und im Raume

2 Stromelemente, die vollkommen symmetrisch bezüglich dieser Ebene liegen, so steht die resultirende Kraft, die sie auf den Magnetpol ausüben, stets senkrecht auf dieser Ebene, wie man am besten sieht, wenn man diese Ebene als yz Ebene wählt, darin die z Axe durch den Magnetpol legt, die xy Ebene aber durch beide Stromelemente und in deren Richtung legt, so dass beide zur y Axe symmetrisch liegen. Ist die Stromrichtung der y- oder z-Richtung parallel, so hat die Magnetkraft die x Richtung, ist die Stromrichtung der x Richtung parallel, so ist die magnetische Kraft Null. Daraus folgt, dass, wenn die durchströmte Fläche an einer Stelle eben ist, an andern aber sich in 2 zu dieser Ebene symmetrische Theile theilt, die auch symmetrisch durchflossen werden, in dem ebenen Theile die Kraft S immer senkrecht zu dessen Ebene ist und die magnetischen Kraftlinien nicht aufhören Aequipotentiallinien zu sein.

Wollte man daher nach Herrn v. Lommel's Methode die Aequipotentiallinien auf einer Platte in einem Falle zeigen, wo sich die Elektroden nicht am Rande befinden, so könnte man 2 gleich beschaffene bezüglich der Plattenebene symmetrische Elektrodendrähte benutzen. Aus dem Gesagten folgt weiter: Wenn eine durchströmte Fläche oder ein Körper eine Symmetrieebene haben, bezüglich deren auch die Stromlinien symmetrisch sind, so muss dieselbe im Körper Stromfläche sein und die magnetischen Kraftlinien müssen darauf senkrecht stehen. Die Thatsache, dass die Kraft, die auf einen Magnetpol wirkt, der sich mitten im Innern eines durchströmten ebenen Blechs befindet, immer senkrecht auf dem Bleche steht, ist hievon eigentlich nur ein specieller Fall. Ein anderer bezieht sich auf eine Rotationsfläche, in der die Stromlinien Meridiankurven sind, oder einen Rotationskörper, in dem die Stromflächen Rotationsflächen von gleicher Axe sind; die magnetischen Kraftlinien sind dann Parallelkreise.

Die Zahl der allgemeinen Bedingungen, unter denen die

magnetischen Kraftlinien senkrecht zu den Stromlinien sind, liesse sich sicher noch vermehren; doch zeigt schon das gesagte, dass in allen von Herrn v. Lommel untersuchten Fällen mit Ausnahme des letzten in der 2. Abhandlung pag. 109 angeführten und in Fig. 3 dargestellten die Magnetkraftlinien mit den Aequipotentiallinien zusammenfallen und zwar liefert es hiefür meines Wissens den ersten strengen Beweis.

Doch sind natürlich auch Fälle möglich, wo dies nicht stattfindet. Ein Blech A habe z. B. die Form der Mantelfläche eines halben geraden Kreiscylinders; daran seien 2 andere halbkreisförmige Bleche B und C gelötet, welche Basis und Gegenfläche des Halbcylinders bilden. Die Mittelpunkte der letztern seien die beiden Elektroden. Wäre nur die Strömung im Bleche B vorhanden, so wären die magnetischen Kraftlinien diesem concentrische Kreise. Die in der Mantelfläche A fliessenden Ströme aber üben auf einen Magnetpol, der nahe dem Durchmesser d liegt, der das Blech B begrenzt, eine Kraft aus, die eine d parallele Componente hat. Die Kraftlinien werden also den Durchmesser d nicht mehr senkrecht treffen, sondern auf der Aussenseite der Platte B Kreisstücken ähneln, die grösser als Halbkreise sind, deren Mittelpunkt also innerhalb des Blechs B liegt. Auf der der Innenseite des hohlen Halbcylinders zugewandten Seite des Bleches B aber werden sie Kreisstücken gleichen, die kleiner sind als Halbkreise, daher ihren Mittelpunkt ausserhalb des Bleches B haben. Auf beiden Seiten weichen sie daher im entgegengesetzten Sinne von den Aequipotentiallinien ab.

Ich habe einen sehr langen überall gleich breiten Blechstreifen in eine Form biegen lassen, wo die Abweichung zwischen Stromlinien und Magnetkraftlinien noch drastischer hervortritt, nämlich so, dass ein Theil des Blechstreifens eben ist und in geringer Distanz davon etwas unterhalb ein anderer Theil desselben Blechstreifens vorüberläuft. Die Ebenen der

genannten beiden Theile des Streifens sind, wo der eine gerade unter dem andern vorüberläuft, parallel. Die Mittellinien der beiden Streifentheile aber aufeinander senkrecht. In grösserer Entfernung kann der Streifen, wie man will, gebogen sein. Die beiden ebenfalls in grösserer Entfernung befindlichen Enden können wieder gegen einander gebogen und beliebig mit je einer Elektrode verbunden werden. Durch die Verbiegung des Streifens ändern sich bekanntlich weder die Stromlinien noch die Aequipotentiallinien im Innern und an der Oberfläche des Streifens. Letztere sind in einiger Entfernung von den Elektroden, wo der Streifen eben ist, zur Mittellinie senkrechte Geraden. Die magnetischen Kraftlinien aber werden dort, wo sehr nahe unterhalb der andere Theil des Streifens vorüberläuft, fast um 45 Grad gedreht. Die Definition der Aequipotentiallinien ist dabei folgende: Von 2 Galvanometerdrähten setze man den einen an einem beliebigen Punkt der Oberfläche eines leitenden durchströmten Körpers auf; der Inbegriff aller Punkte, wo der 2. aufzusetzen ist, damit das Galvanometer stromlos bleibt, ist eine Aequipotentiallinie. Da der Werth des Potentials selbst an der Oberfläche keinen Sprung macht, müssen die Aequipotentialflächen unmittelbar an der Oberfläche im Innern und ausserhalb des Leiters gleich verlaufen, ihr Verlauf unmittelbar an der Oberfläche kann daher durch den in einiger Entfernung unten vorbeigehenden Theil des Streifens nicht geändert werden.

§ 2. Bezüglich der, wie alle auf einer neuen Idee beruhenden Verknüpfungen zweier Phänomene, äusserst interessanten Versinnlichung des Hallphänomens, welche Herr v. Lommel in der 1. Abhandlung gibt, möchte ich folgendes bemerken: So gut als wir die Stromrichtung der positiven Elektricität ins Auge fassen, können wir auch auf die der negativen unser Augenmerk richten, dann würden in der Fig. 3 von Herrn v. Lommel's

1. Abhandlung pag. 374 die den Pfeilen bei A und B entgegengesetzten die Stromrichtung der negativen Elektricität andeuten; auch in den Ampère'schen Strömen des Magnetfeldes würden wir die Stromrichtung der negativen Elektricität durch einen dem gekrümmten Pfeile entgegengesetzten auszudrücken haben. Die Molekularströme der Platte würden einen resultirenden Strom geben, in dem die negative Elektricität wieder den gefiederten Pfeilen entgegengesetzt fliesst. Die Molekularströme sind also wie bei Herrn v. Lommel längs ab dem Primärstrom entgegen, längs cd aber gleichgerichtet. So gut wie der Strom der positiven wird also auch der der negativen Elektricität längs ab vermindert, längs cd verstärkt. Man würde daher auch, wenn man die Strömung der negativen Elektricität verfolgt, zu dem Resultate kommen, dass im Punkte D ein höheres Potentiale (eine höhere die jetzt negative Elektricität treibende Kraft) als im Punkte C herrscht und folgerichtig jetzt schliessen, dass auch die negative Elektricität von D durch das Galvanometer nach C fliesst, dass also im Hallstrome positive und negative Elektricität in derselben Richtung fliessen oder wenigstens würde man, wenn es zufällig üblich wäre, statt der positiven die negative Elektricität zu verfolgen, in der Hallleitung für die negativen dieselbe Stromrichtung finden, wie sie Herr v. Lommel für die positive findet. Natürlich würde man dieser Consequenz vom unitarischen Standpunkt oder auch, wenn man positive und negative Elektricität als nicht gleichberechtigt betrachtet, entgehen, dann aber für den Hallstrom den entgegengesetzten Sinn finden, je nachdem man die positive oder die negative Elektricität als die allein existirende betrachtet.

§ 3. Aus der Erfahrung und Theorie übereinstimmend folgt (vergl. meine Theorie des Hallphänomens, Sitzungsber. der Wien. Akad. Bd. 94 S. 644, 1886, unmittelbar nach Gleich-

ung 12), dass die elektromotorische Kraft des Hallstroms $\varepsilon = \frac{CMJ}{d}$ ist, wo C eine Constante des Materials, J die Stärke des Primärstroms, M die Intensität des Magnetfeldes und d die Plattendicke ist. Diese elektromotorische Kraft ist die Potentialdifferenz, welche an 2 vor Wirkung des Magnets äquipotentialen Stellen des Plattenrandes durch das Magnetfeld erzeugt wird, wenn diese durch keinen Nebenschluss (Hallleitung) verbunden sind; also auch wenn dieser Nebenschluss zwar vorhanden, aber darein eine elektromotorische Kraft $-\varepsilon$ eingefügt wäre. Wird diese dann entfernt, so tritt in der Hallleitung genau dieselbe Stromintensität i auf, in der Platte aber zum Primärstrom hinzu, welche allein aufträte, wenn der Primärstrom ganz hinweggenommen würde und bloss in der Hallleitung die elektromotorische Kraft $+\varepsilon$ thätig wäre. Ist also r der Widerstand der Galvanometerleitung zwischen den beiden Punkten, wo sie die Platte berührt, R der Widerstand der Platte zwischen denselben Punkten, so ist:

$$i = \frac{\varepsilon}{r + R}.$$

Dies ist richtig, ob r gross oder klein gegen R ist, was auch schon experimentell bestätigt wurde.[1]) Nur wenn gleichzeitig r nicht gross gegen R und C sehr gross wären, könnten Abweichungen eintreten; es würde dann die Intensität des Hallstroms nicht klein gegen die des primären und daher durch den ersteren selbst wieder ein Hallstrom 2. Ordnung erzeugt, der dem Primärstrom entgegenwirken würde. Dass zum Gelingen des Hallversuches die Bedingung erfordert würde, dass r klein gegen R sei, scheint mir ein Missverständniss zu sein, welches offenbar durch den Um-

1) Vergl. Ettingshausen und Nernst, über das Hall'sche Phänomen, Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 94, pag. 579, 1886.

stand hervorgerufen wurde, dass bei Gold, wo C klein ist, r nicht allzugross gegen R sein darf, da ja dieses dem Widerstande der Batterie, jenes dem äussern Widerstand vergleichbar ist und der günstigste Effekt bekanntlich immer eintritt, wenn diese beiden Widerstände nicht allzu verschieden sind oder, wenn man diese Analogie nicht gelten lassen will, da der Halleffekt nur der Breite der Platte und der Dichte des Primärstroms proportional ist, letztere aber nur bei dünnen Platten genügend gross gemacht werden kann. Desshalb wurden aus einem so gut leitenden Materiale wie Gold äusserst dünne Platten gewählt. Es entspricht der Erfahrung, wenn H. v. Lommel die elektromotorische Kraft des Hallstroms proportional JM und verkehrt proportional d findet, dass er sie aber auch verkehrt proportional r dem Galvanometerwiderstand, dagegen die Klemmspannung der Galvanometerleitung von r unabhängig findet, scheint mir ein Räthsel.

§ 4. Bezüglich der Ableitung der Strömung in der Kugel durch H. v. Lommel bemerke ich nur, dass mir erstens der Beweis, dass die 2 Kugelsysteme, die sich rechtwinklig durchschneiden, wirklich als Aequipotentiale und dazu gehörige Stromflächen betrachtet werden können sowie, dass hiebei die Strömung in einer Kugelschale von überall gleicher Dicke gefunden wird, noch der Ergänzung zu bedürfen scheint.

Aequipotential- und Magnetkraftlinien.

Nachtrag.

Von E. von Lommel.

(Eingelaufen 6. Mai.)

Als Nachtrag zu den beiden vorausgegangenen Mittheilungen[1]) sollen hiemit noch beispielsweise einige der Bilder von Magnetkraftlinien, welche durch Aufstreuen von Eisenfeile auf durchströmte Metallplatten erhalten wurden, zusammengestellt werden mit den Bildern der Aequipotentiallinien, wie sie sich aus Theorie und Erfahrung für dieselben Platten ergeben.

Die Fig. 1 a wurde erzeugt auf einer kreisförmigen Bleiplatte mit an zwei Stellen ihres Umfangs angelötheten Zuleitungsdrähten, welche in der Ebene der Platte selbst verlaufen, und sich in der Figur, querschraffirt durch die zu ihnen senkrechten Magnetkraftlinien, mitabgebildet haben; Fig. 1 b zeigt die allbekannten Aequipotentialen derselben Platte, sammt den zu ihnen senkrechten Stromlinien. Die Aehnlichkeit der beiden Liniensysteme fällt in die Augen; nur an den Löthstellen zeigen sich kleine Abweichungen, da

1) Lommel, Sitzungsber. der k. b. Akad. d. Wiss. XXII. S. 371. 1892. Wied. Ann. XLVIII. S. 462. 1893. und Sitzungsber. XXIII. S. 103. 1893.

sich die Voraussetzung der Theorie, dass die Elektroden Punkte seien, begreiflicherweise nicht verwirklichen lässt.

Besonderes Interesse beansprucht die Fig. 2 a, welche sich auf einer kreisförmigen Platte bildet, deren eine (in der Fig. obere) Hälfte aus Kupfer, die andere (untere) Hälfte aus Blei besteht; die beiden Hälften sind längs dem (horizontalen) Durchmesser zusammengelöthet. Am Rande der Bleihälfte, in den Endpunkten einer zum Trennungsdurchmesser parallelen Sehne, befinden sich die Elektroden. Die Fig. 2 b ist der Abhandlung von Quincke[1]): „Ueber die Verbreitung eines elektrischen Stromes in Metallplatten" entnommen; sie stellt die theoretisch abgeleiteten und experimentell bestätigten Aequipotentiallinien einer ebensolchen Kupfer-Bleiplatte sammt den zugehörigen (punktirten) Stromlinien dar. Man erkennt, dass die Magnetkraftlinien der Fig. 2 a denselben Verlauf nehmen, wie diese Aequipotentialen. Namentlich zeigt sich längs der Trennungslinie die Brechung der Linien beim Uebergang aus Blei in Kupfer. Vermöge dieses discontinuirlichen Uebergangs bildet sich daher auch der Durchmesser des Kreises, der das Blei vom Kupfer scheidet, deutlich ab. Auch der Umstand, dass die Stromdichte auf die Gruppirung der Eisentheilchen Einfluss übt, indem sich dieselben an Stellen grösserer Stromdichte enger zusammenschaaren, trägt dazu bei, die Grenzlinie scharf hervortreten zu lassen. Denn ein Blick auf die Stromlinien der Quincke'schen Fig. 2 b zeigt, dass in dem mittleren Theil der Doppelplatte die Stromdichte auf der Kupferhälfte grösser ist als auf der angrenzenden Bleihälfte. Es wird daher dort die Eisenfeile dichter zusammengerafft als hier, wie aus Fig. 2 a ersichtlich ist. Wie schon früher hervorgehoben wurde, erhält man, wie immer, so auch in diesem Fall, auf dem über die Platte gebreiteten und mit Eisenfeile bestreuten Papierblatt ein durch die Magnetkraft-

1) Quincke, Pogg. Ann. XVIII. S. 382. 1866.

Fig. 1a.

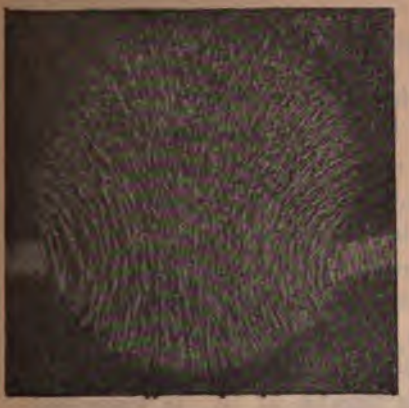


Fig. 1b.

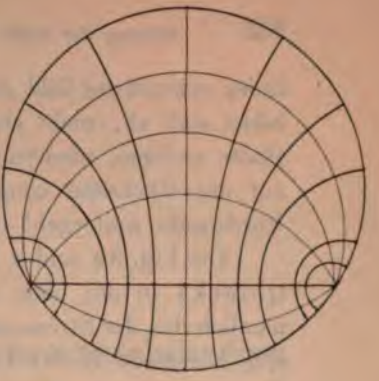


Fig. 2a.

Fig. 2b.

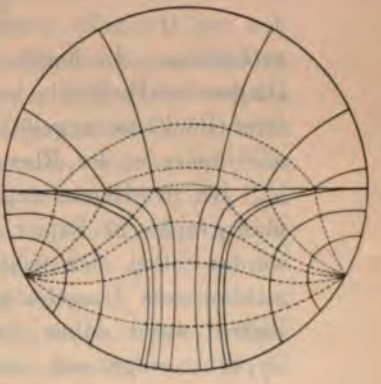


Fig. 3a.

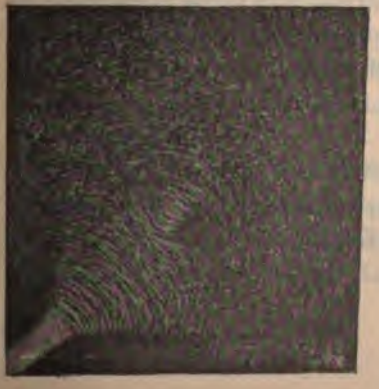
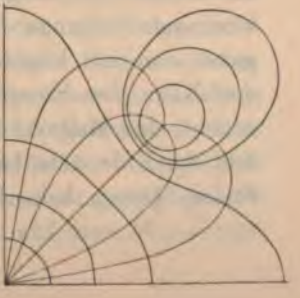


Fig. 3b.



linien schraffirtes Bild der Platte, d. h. der Umriss der Platte bildet sich ab, nicht etwa, weil diese Linien am Rand der Platte endigen, sondern um den Rand umbiegen, indem jede auf der Rückseite congruent mit ihrem Verlauf auf der Vorderseite weitergeht und in sich zurückläuft.

Die Fig. 3a und b beziehen sich ebenfalls auf einen von Quincke in der oben citirten Abhandlung erörterten Fall, nämlich den der Strömung in einer quadratischen Platte, wenn eine Elektrode in der Ecke, die andere auf der von dieser Ecke ausgehenden Diagonale angebracht ist, in einer Entfernung, welche klein ist gegen die Seiten des Quadrats. Auch hier ist die Aehnlichkeit der Magnetkraftlinien Fig. 3a mit den von Quincke ermittelten Aequipotentialen Fig. 3b unverkennbar. In diesem Falle war der Zuleitungsdraht zur Diagonalen-Elektrode senkrecht zur Platte geführt und auf ihrer Rückseite angelöthet, während der zur Ecke führende wie immer in der Ebene der Platte lag.

Bei der Herstellung der Bilder ist erforderlich, dass das photographische Papier, auf welchem die Bilder festgehalten werden sollen, sich möglichst innig an die Platte und deren nichtleitende Umgebung anschmiege. Die ½ mm dicken Platten waren daher sammt den Zuleitungsdrähten in einen Gypsguss eingelassen, dessen Vorderfläche mit der Platte in derselben Ebene liegt. Um die Trägheit und den Reibungswiderstand der Feilspäne zu überwinden, musste die an einem Stativ horizontal eingespannte Gypsplatte kleinen regelmässigen Erschütterungen ausgesetzt werden; dies geschieht durch eine vibrirende Stimmgabel aus Messing; eine stählerne Stimmgabel nämlich könnte durch den Magnetismus, den sie in der Nähe des Stromes von 20 bis 35 Ampère Stärke annimmt, das Magnetfeld der Strömung stören. Das Magnetfeld der Erde übte bei der grossen Stärke des angewendeten Stroms keinen bemerkbaren Einfluss.

Objective Darstellung von Interferenzerscheinungen in Spectralfarben.

Von E. von Lommel.

(*Eingelaufen 6. Mai.*)

1. Newton'sche Ringe. Ein Bündel Sonnenstrahlen fällt durch die Oeffnung O (Fig. 1) des Heliostaten auf das Newton'sche Farbenglas P; das zurückgeworfene Bündel trifft auf eine Linse L von kurzer Brennweite, welche bei S in ihrer Brennebene ein kleines Sonnenbildchen, bei M das Bild des Farbenglases sammt den Ringen entwirft. Ein geradsichtiges hinter der Linse aufgestelltes Prisma Q erzeugt bei S ein kleines Spectrum, welches auf einem in dem daselbst aufgestellten Schirme angebrachten verticalen Spalte aufgefangen wird. Das Bild der Ringe auf dem Schirme M erscheint alsdann in der homogenen Farbe, welche jeweils durch den Spalt S dringt, und durchläuft die ganze Farbenreihe des Spectrums, wenn man den Spalt durch das kleine Spectrum oder das Spectrum in der Spaltebene durch Drehen des Prismas verschiebt. Dieses Spectrum ist allerdings nicht ganz rein, weil ja die verschiedenfarbigen Sonnenbildchen übereinandergreifen. Um ein reines Spectrum zu erhalten, braucht man nur an der Oeffnung O des Heliostaten einen Spalt anzubringen, und den Spalt S in die zu O conjugirte Ebene zu verlegen. Bei Vorlesungsversuchen genügt jedoch eine runde Oeffnung bei O. Man kann auf diese Weise sehr

schön das Engerwerden der Ringe vom Roth zum Violett zeigen. Wird das Prisma Q entfernt, so hat man bei M sofort das Bild der Farbenringe im weissen Licht.

2. Gypskeil und Gypsplatte. Das Strahlenbündel geht durch ein Nicol'sches Prisma N (Fig. 2) und durch das Object P; die Linse L erzeugt in ihrer Brennebene bei S das Sonnenbildchen, und in der zu P in Bezug auf die Linse conjugirten Schirmebene M das Bild der Platte. Bringt man wieder das Prisma Q zwischen L und S, und hinter den schmalen Spalt im Schirme S einen zweiten Nicol N', so erscheint bei M das Interferenzbild in der jeweils bei S durchgelassenen Farbe. Bei dieser Anordnung können alle im parallelen polarisirten Licht sich zeigenden Interferenzerscheinungen (z. B. die gekühlter Gläser) dargestellt werden.

3. Interferenzerscheinungen im convergenten polarisirten Licht. Die durch das Nicol N (Fig. 3) einfallenden Strahlen gehen durch das Prisma Q; die dahinter befindliche Linse L entwirft ein kleines Spectrum auf dem Spaltschirm S. Dicht hinter dem Spalt wird die Krystallplatte und hinter ihr ein zweites Nicol'sches Prisma N' angebracht. Auf dem Schirm M erscheinen dann die isochromatischen Curven in einfarbigem Licht.

4. Streifen durch Drehung der Polarisationsebene in Quarzprismen.

A. Im reflectirten Licht. Das bei O (Fig. 4) einfallende Strahlenbündel trifft, nachdem es durch das Nicol N gegangen ist, auf das Quarzprisma B, dessen optische Axe senkrecht zur Halbirungsebene des brechenden Winkels von 60° steht, und durchläuft dasselbe bei der Stellung der kleinsten Ablenkung in der Richtung der optischen Axe. Ein Theil der Strahlen wird an der Austrittsfläche nach innen nahezu unter dem Polarisationswinkel reflectirt, und auf der Rückenfläche des Prisma's, wenn dieselbe mattge-

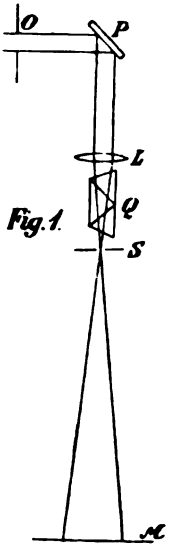


Fig. 1.

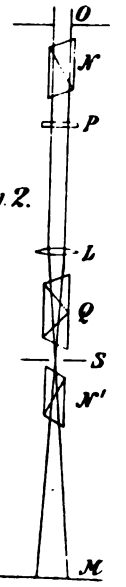


Fig. 2.

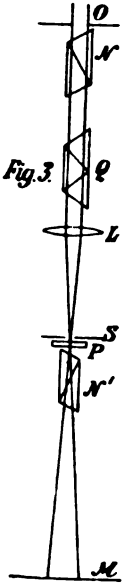


Fig. 3.

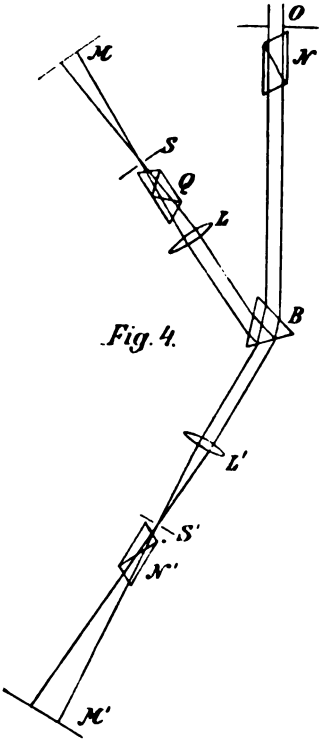


Fig. 4.

schliffen ist, erscheinen die früher[1]) beschriebenen farbigen Streifen. Ist aber die Rückenfläche polirt, so dass die Strahlen durchgehen können, so entwirft die Linse L auf dem zu dieser Fläche conjugirten Schirm M das vergrösserte Bild des Streifensystems. Bringt man nun in die Brennebene der Linse L (oder in die zu einem Spalt bei O conjugirte Ebene) einen Spalt S, und vor denselben das Prisma Q, so erscheinen die Streifen in der einfachen Farbe, welche jeweils durch den Spalt S geht. Ein zweites Nicol ist hier nicht nothwendig, weil die zweite Fläche des Quarzprismas B die Rolle des Analysators spielt.

B. Im durchgegangenen Licht. Im durchgehenden Licht zeigen sich die zu den vorhergehenden complementär gefärbten Streifen in dem Bilde der Austrittsfläche des Prismas B (Fig. 4), welches die Linse L' auf dem Schirm M' entwirft, wenn das Strahlenbündel noch durch das analysirende Nicol N' gegangen ist. Da die Strahlen im Prisma B Dispersion erleiden, so entsteht in der Brennebene der Linse L' (oder in der zu einem Spalte bei O conjugirten Ebene) ein Spectrum. Lässt man durch einen daselbst angebrachten Spalt S' je nur eine Farbe dieses Spectrums durchgehen, so erscheinen die Streifen in dieser Farbe. Hier ist ein zweites Prisma nicht nothwendig, weil das Quarzprisma B selbst die Dispersion bewirkt. Auch auf diese letztere Anordnung lässt sich, wie auf die vorige (A), eine Methode zur Messung der Drehung der Polarisationsebene im Quarz und in Flüssigkeiten gründen; denn man braucht nur bei M' die Streifenbreite zu messen, welcher die Drehung umgekehrt proportional ist. Schaltet man alsdann zwischen N und B eine mit activer Flüssigkeit gefüllte Röhre ein, so werden die Streifen verschoben. Eine Verschiebung um eine Streifenbreite entspricht einer Drehung um 180°.

1) Lommel, Sitzungsber. 1888. Wied. Ann. XXXVI. S. 733. 1889.

Die geologische Entwickelung, Herkunft und Verbreitung der Säugethiere.[1])

Von Karl A. von Zittel.

(*Eingelaufen 6. Mai.*)

In einer geistvollen Abhandlung „über die Herkunft unserer Thierwelt" hat L. Rütimeyer[2]) im Jahre 1867 die geologische Entwickelung und Verbreitung der Säugethiere und die Beziehungen der zeitlich verschiedenen Faunen unter einander und zu der noch jetzt existirenden geschildert. Obwohl seit dem Erscheinen jener meisterhaften Skizze das paläontologische Material durch neue Entdeckungen in Europa und noch mehr in Nord- und Süd-Amerika mindestens verdoppelt wurde, so brachte diese unerwartete Vermehrung doch in den meisten Fällen nur eine Bestätigung der von Rütimeyer auf beschränktere Erfahrung gestützten Anschauungen. Gegenwärtig bildet Afrika noch die einzige grössere Lücke in unserer Kenntniss der fossilen Säugethiere; alle übrigen Welttheile haben mehr oder weniger reichliche Documente aufzuweisen, aus denen sich mit annähernder Sicherheit der Weg verfolgen lässt, den die Mammalia in ihrer geologischen Entwickelung eingeschlagen haben.

1) Vorstehende Abhandlung bildet das Schlusscapitel im 4. Band des Verfassers Handbuch der Paläontologie. München bei R. Oldenbourg 1893.

2) Rütimeyer L., Ueber die Herkunft unserer Thierwelt. Eine zoogeographische Skizze. Basel 1867.

Mesozoisches Zeitalter.

Die ältesten Reste von Säugethieren stammen aus der Trias. Isolirte Zähnchen von *Microlestes* und *Triglyphus* aus rhätischen Schichten Württembergs und Englands, ein Schädel von *Tritylodon* und Skelettheile von *Theriodesmus* aus den Karroo-Schichten von Süd-Afrika beweisen die weite Verbreitung der leider noch sehr unvollständig bekannten Allotheria im Beginn des mesozoischen Zeitalters. Ist es vorläufig auch noch nicht möglich, diesen kleinen Pflanzenfressern oder Omnivoren eine bestimmte Stellung im zoologischen System anzuweisen, so steht doch fest, dass sie nur mit den niedrigst organisirten jetzt lebenden Säugethieren, mit den Monotremata und Marsupialia verglichen werden können und weder im Gebiss, noch Schädelbau Beziehungen zu Reptilien oder Amphibien aufweisen. Eine ganz andere Gruppe primitiver Säuger von winziger Grösse ist durch zwei Unterkieferchen aus der oberen Trias von Nord-Carolina in Amerika angedeutet. Die Gattungen *Dromatherium* und *Microconodon* erinnern an Insectivoren und Marsupialier, unterscheiden sich aber von beiden durch höchst primitive triconodonte Backzähne, deren Krone undeutlich von der einfachen oder durch eine seitliche Furche nur unvollständig getheilten Wurzel geschieden ist. Die schlanken stiftförmigen Schneidezähne und ein kräftiger Eckzahn zeigen übrigens, dass die triasischen Protodonta Amerika's ein nicht weniger differenzirtes Gebiss besassen, als die Tritylodontidae aus Europa und Süd-Afrika.

Im Jura haben sich sowohl die Allotheria, als auch die insektenfressenden Beutelthiere vermehrt und weiter entwickelt. In Europa sind der Gross-Oolith von Stonesfield und das „Dirt bed" von Purbeck zwar noch immer die einzigen Fundorte geblieben, aber daneben haben die oberjurassischen „Atlantosaurus Beds" in Wyoming und Colorado

eine Fülle neuer Formen geliefert, die freilich wie ihre europäischen Altersgenossen meist nur durch Kiefer, isolirte Zähnchen, sehr selten durch sonstige Skeletknochen vertreten sind. Die jurassischen Allotherien werden in zwei, bis jetzt noch ungenügend charakterisirte Familien vertheilt, wovon die eine (Bolodontidae) nur durch Oberkiefer, die andere (Plagiaulacidae) hauptsächlich durch Unterkiefer vertreten ist. Die letzteren stimmen im Bau der Molaren mit dem triasischen *Microlestes* überein, allein die unteren Praemolaren erlangen die Gestalt von schneidenden, auf den Seiten gerieften Blättern, wie sie heutzutage nur bei den Gras fressenden Känguruh-Ratten (Hypsiprymnidae) vorkommen. Auch die nagerartigen Schneidezähne fordern zum Vergleich mit *Hypsiprymnus* und anderen diprotodonten Beutelthieren auf. Von Interesse ist der Umstand, dass aus den Purbeckschichten Englands bis jetzt nur zwei Gattungen (*Plagiaulax* und *Bolodon*) bekannt wurden, für welche Nord-Amerika in *Ctenacodon* und *Allodon* zwei sehr nahe stehende Ersatzformen besitzt. Von dem winzigen *Stereognathus* aus dem Gross-Oolith von Stonesfield mit halbmondförmig gebogenen Höckern auf den Molaren ist nur ein einziges Kieferchen vorhanden.

Neben den Allotheria gibt es im Jura von Europa und Nord-Amerika eine beträchtliche Anzahl mit dreispitzigen Backzähnen, conischen Eckzähnen und stift- oder spatelförmigen Schneidezähnen versehener Gattungen, welche selten die Dimensionen einer Ratte übertreffen und vorzugsweise auf Insektennahrung angewiesen waren. Die europäischen Formen wurden von Owen alle zu den polyprotodonten Beutelthieren gestellt und mit dem lebenden *Myrmecobius* verglichen, allein nur bei einzelnen Gattungen tragen Bezahnung und Form des Kiefers so deutliche marsupiale Merkmale zur Schau, dass ihre Bestimmung vollkommen gesichert erschiene; in vielen Fällen macht ein Gemisch von marsupialen und insektivoren Eigenschaften jede Entscheidung

unmöglich. Marsh löste die Frage in radikaler Weise, indem er für die mit spitzen Zähnen versehenen mesozoischen Säuger eine selbständige Ordnung *Pantotheria* errichtete; Osborn erkennt in denselben die Vorläufer der polyprotodonten Beutler und der Insektenfresser. Leider stützt sich unsere Kenntniss dieser alten Säugethiere bis jetzt lediglich auf Kiefer, vereinzelte Zähne, Wirbel und spärliche Extremitätenknochen. Ein Becken mit den charakteristischen Beutelknochen wurde noch niemals gefunden. Wie bei den Allotherien so zeigt sich auch bei den jurassischen Polyprotodonten eine überraschende Aehnlichkeit, in einzelnen Fällen sogar völlige Uebereinstimmung der europäischen und amerikanischen Gattungen. In beifolgender Liste sind die correspondirenden Gattungen beider Continente nebeneinandergestellt und die aus dem Gross-Oolith von England stammenden mit G.O., die aus Purbeckschichten mit P bezeichnet.

England	Nord-Amerika
Amphilestes (G.O)	*Priacodon*
Triconodon (P)	*Triconodon*
Phascolotherium (G.O)	
Spalacotherium (P)	*Tinodon*
	Dicrocynodon
	Docodon
	Ennacodon
Amphitherium (G.O)	
Peramus (P)	
Amblotherium (P)	*Paurodon*
Achyrodon	*Laodon*
	Dryolestes
	Asthenodon
Curtodon (P)	

Man hat früher der jurassischen Säugethierwelt ein australisches Gepräge zugeschrieben. Ein Vergleich der jetzt in Australien lebenden Beutelthiere mit den jurassischen Allotheria und Pantotheria gewährt jedoch nur sehr beschei-

dene Anknüpfungspunkte. Die mesozoischen Formen haben ein viel monotoneres Gepräge, als ihre stärker differenzirten australischen Verwandten und beide Faunen stimmen hauptsächlich in der Abwesenheit placentaler Gattungen überein.

Aus der Kreideformation fehlte bis zum Jahr 1882 jede Spur von Säugethieren. Jetzt kennt man aus der Wälderstufe von England idolirte Zähnchen der schon im Jura verbreiteten Gattung *Plagiaulax* und in den sogenannten Laramieschichten des amerikanischen Westens (Wyoming, Dakota, Colorado, Montana) sind neuerdings eine beträchtliche Menge von Zähnen und Kieferfragmenten von Marsh beschrieben worden. Die Hoffnungen, welche man früher auf die Entdeckung cretaceischer Säugethiere gesetzt hatte, sind freilich nicht in Erfüllung gegangen; denn die bis jetzt vorhandenen Funde beweisen nur, dass die jurassischen Formen während der Kreidezeit geringe Veränderungen erlitten haben und dass Allotheria, Pantotheria und vielleicht eine Tillodontier-Gattung (*Stagodon*) auch während der Kreidezeit den Grundstock der Säugethierfauna bildeten. Die erhofften Vorläufer der Hufthiere, Raubthiere, Nager und sonstigen placentalen Ordnungen haben sich nicht gefunden. Die zahlreichen von Marsh auf isolirte Zähnchen errichteten Gattungen wurden von Osborn stark reduzirt; die einigermassen sicher begründeten schliessen sich wie *Meniscoëssus*, *Cimolomys*, *Allacodon*, *Oracodon* sehr eng an jurassische Allotheria, oder wie *Dryolestes* und *Pediomys* an Pantotheria an. Einige, als *Didelphops*, *Cimolestes*, *Telacodon* und *Batodon* bezeichnete Kieferchen und Zähne scheinen ächte Marsupialier (Didephyiden) zu sein. Die aus kleinen Formen zusammengesetzte cretaceische Säugethierfauna bildet somit eine Fortsetzung der jurassischen, nicht aber die Vorstufe, aus welcher die unendlich reichere und mannichfaltiger tertiäre abgeleitet werden könnte.

Mit Beginn der Tertiärzeit fliessen die Quellen für die

Kenntniss der fossilen Mammalia weit reichlicher als in der mesozoischen Periode. Schon im

I. untersten Eocaen

schalten sich in der Gegend von Reims Süsswasserschichten ein, welche eine höchst merkwürdige von Lemoine[1]) entdeckte Fauna enthalten. Nur die Gattungen *Neoplagiaulax* und *Liotomus* knüpfen an die Allotherien der oberen Kreide an, alle übrigen Elemente der „Fauna von Cernays" gehören zu den placentalen Säugethieren. Kleine Insektenfresser (*Adapisorex*) und Raubthiere (Creodontia) von sehr primitivem Gepräge (*Procynictis*, *Dissacus*, *Hyaenodictis*, *Tricuspiodon*, *Arctocyon*, *Conaspidotherium*, *Arctocyonides*, *Plesiesthonyx*, *Protoproviverra*), die freilich mit Ausnahme des auch durch ansehnliche Grösse hervorragenden *Arctocyon* nur durch dürftige Ueberreste vertreten sind, ferner einige fünfzehige Hufthiere aus der Ordnung der Condylarthra (*Pleuraspidotherium*, *Orthaspidotherium*) und zwei zweifelhafte Halbaffen (*Plesiadapis* und *Protoadapis*) setzen diese älteste tertiäre Thiergesellschaft in Europa zusammen.

Eine gleichaltrige Fauna von überraschender Aehnlichkeit stammt aus den „Puerco-Schichten" von Neu-Mexico. Nach Cope's[2]) übersichtlicher Darstellung besteht die Vertebratenfauna von Puerco aus 12 Reptilien-, 1 Vogel- und 93 Säugethierarten. Von den letzteren gehören nicht weniger als 45 zu den Creodontia (*Mioclaenus*, *Tricentes*, *Chriacus*, *Protochriacus*, *Oxyclaenus*, *Pentacodon*, *Goniacodon*, *Sarcothraustes*, *Deltatherium*, *Triisodon*, *Dissacus*, *Didymictis* u. A.),

---

1) Lemoine, V. Etude d'ensemble sur les dents des Mammifères foss. des environs de Reims. Bull. Soc. géol. de France 1891. 3 ser. XIX. S. 263—290.

2) Cope, E. D. Synopsis of the Vertebrate Fauna of the Puerco Series. Trans. Amer. Philos. Soc. 1888. XVI.

24 zu den Condylarthra (*Haploconus*, *Anisonchus*, *Zetodon*, *Hemithlaeus*, *Periptychus*, *Ectoconus*, *Protogonia*), 2 zu den Amblypoda (*Pantolambda*), 5 zu den Halbaffen (*Mixodectes*, *Indrodon*), 7 zu den Tillodontia (*Psittacotherium*, *Hemiganus*, *Conoryctes*, *Onychodectes*) und 11 zu den Allotheria, unter denen die Gattung *Polymastodon* die drei mitvorkommenden *Neoplagiaulax*, *Ptilodus* und *Chirox* beträchtlich an Grösse überragt. Der grösseren Reichhaltigkeit der amerikanischen Fauna entspricht ihre mannichfaltigere Zusammensetzung, doch treten zu den in Europa nachgewiesenen Ordnungen nur die Tillodontier als neues Element hinzu und diese sind möglicherweise schon in der oberen Kreide durch die Gattung *Stagodon* (Thlaeodon) vertreten. Ueberblickt man die Gesammtheit der bei Reims und Puerco vorkommenden Säugethiere, so findet man neben einigen aus der Kreide übernommenen Allotherien, die hier ihren Höhepunkt erreichen, um alsdann für immer zu verschwinden und neben den räthselhaften schon im Eocaen aussterbenden Tillodontia vier verschiedene Ordnungen von placentalen Säugethieren (Creodontia, Condylarthra, Amblypoda, Pachylemuria). Die erst im jüngeren Eocaen zur vollen Entfaltung gelangenden typischen Repräsentanten dieser vier Ordnungen stehen einander in äusserer Erscheinung und in Gesammtorganisation fern; die Formen der Cernays- und Puerco-Fauna dagegen sind durch eine Reihe gemeinsamer Merkmale so enge mit einander verknüpft, dass in vielen Fällen die Bestimmung der Ordnung Schwierigkeiten bereitet. Sie besitzen alle fünfzehige plantigrade Extremitäten, deren Endphalangen weder mit ächten Hufen, noch ächten Krallen, sondern mit einem Mittelding zwischen beiden versehen sind; bei allen bleiben die Vorderarm- und Vorderfussknochen getrennt; der Humerus ist fast immer von einem Foramen entepicondyloideum durchbohrt, das Femur hat einen dritten Trochanter und im Carpus war höchst wahrscheinlich überall ein Centrale vorhanden. Sämmt-

liche Schädel haben niedrige, langgestreckte Form, stark entwickelte Gesichtsknochen, winzige Hirnkapsel, glatte Hemisphären des Grosshirns und ein von diesem nicht überdachtes Cerebellum. Auch das Gebiss lässt noch keine nennenswerthe Differenzirung erkennen. Schneide- und Eckzähne haben conische Gestalt, die Prämolaren sind einfach und die brachyodonten Molaren im Oberkiefer trituberculär, im Unterkiefer „tritubercular-sectorial". Wäre es möglich, den Thiergestalten der Cernays- und Puerco-Periode Leben einzuhauchen und sie unter unsere heutige Säugethierfauna zu versetzen, so würde vermuthlich jeder Zoologe die damaligen Creodontia, Condylarthra, Pachylemuria und Amblypoda in eine einzige, einheitliche Ordnung zusammenstellen, obwohl sie unzweifelhaft die primitiven Vorläufer von vier nachmals stark differenzirten Gruppen darstellen. Dieses Zusammenwachsen verschiedenartiger Stämme in eine gemeinsame Wurzel bildet eines der stärksten Argumente zu Gunsten der Descendenztheorie, zugleich aber auch eine nicht geringe Schwierigkeit für die Systematik. Hätten sich die alteocänen Säugethiere nicht weiter entwickelt und differenzirt, so würde man vermuthlich unter den placentalen Säugethieren nur zwei Ordnungen unterscheiden, wovon eine die Tillodontia, die andere alle übrigen Formen enthielte.

Schon in der nächsten Zone des älteren Eocaen's, zu welcher in Europa der Londonthon von England, der untere Meeressand, plastische Thon und Lignit des Pariser Beckens, sowie die sogenannten Wasatch- oder Coryphodon-Beds in Wyoming, Utah und Neu-Mexico gehören, hat sich der Charakter der Säugethierfauna nicht unerheblich verändert. Die Allotherien sind verschwunden. Die Creodontia haben vielfach an Grösse und Differenzirung zugenommen und bereits Raubthiergepräge erhalten. Unter den Hufthieren lassen sich Amblypoda, Condylarthra und Perissodactyla schon sehr bestimmt unterscheiden, von Artiodactylen finden sich

spärliche und primitive Vorläufer; die Prosimiae (Pachylemuren) sind zahlreich, die Nager und Tillodontia durch typische, scharf differenzirte Gattungen vertreten. Die bis jetzt bekannten Genera dieses Horizontes vertheilen sich folgendermaassen auf Europa und Nord-Amerika:

Europa	Nord-America
Condylarthra	
† *Phenacodus*[1])	***Phenacodus***
† *Protogonia*	*Protogonia*
† *Meniscodon*	***Meniscotherium***
† *Periptychus*	*Hyracops*
Perissodactyla	
Hyracotherium	***Hyracotherium***
Pachynolophus	*Pachynolophus*
Lophiodon	*Eohippus*
Lophiodochoerus	*Heptodon*
Brachydiastematotherium	*Systemodon*
	Lambdotherium
Artiodactyla	
Lophiodochoerus	*Pantolestes*
Protodichobune	
Amblypoda	
Coryphodon	***Coryphodon***
	Manteodon
	Ectacodon
Tillodontia	
Esthonyx	***Esthonyx***
(Platychoerops)	***Calamodon***
† *Calamodon*	*Stylinodon*
	Dryptodon
	? *Ectoganus*

1) Die mit † bezeichneten Formen sind nur aus dem Bohnerz der Schweiz bekannt; die mit Fettschrift gedruckten Namen bezeichnen die besonders charakteristischen und häufigen Genera.

Europa	Nord-America
Rodentia	
Decticadapis	*Paramys*
Insectivora	
Adapisoriculus	*Diacodon*
	Centetodon
Creodontia	
Palaeonictis	***Palaeonictis***
† ***Proviverra***	***Oxyaena***
† *Cynohyaenodon*	*Amblyctonus*
† *Ailuravus*	***Pachyaena***
? *Argillotherium*	*Anacodon*
	Sinopa
	Didelphodus
	Dissacus
	Miacis
	Didymictis
Prosimiae (Pachylemuridae)	
† *Pelycodus*	***Pelycodus***
† *Hyopsodus*	***Hyopsodus***
	Lemuravus
	Microsyops
	Tomitherium
	Anaptomorphus
	Mixodectes
	Cynodontomys
	? *Sarcolemur*
	? *Apheliscus*
	? *Opisthotomus*

Vergleicht man die auf zwei so entfernt gelegenen Schauplätzen lebenden Säugethierfaunen der älteren Tertiärzeit mit einander, so fällt zunächst die Armuth an Gattungen und Arten in Europa, gegenüber der Reichhaltigkeit der amerikanischen Fundstätten in die Augen. Bedenkt man jedoch, dass in Europa bis jetzt nur einige wenige Fundorte

von sehr beschränkter Ausdehnung in Nord-Frankreich, England und in der Schweiz das Material dieser Fauna lieferten, während in Wyoming, Utah und Neu-Mexico alttertiäre Süsswasserschichten hunderte von Quadratmeilen bedecken und unverhüllt der Untersuchung zugänglich sind, so darf die Hoffnung einer späteren Ergänzung der europäischen Funde nicht aufgegeben werden. Haben doch die schönen Untersuchungen Rütimeyer's[1]) über die Bohnerzfauna der Schweiz gezeigt, dass auch in Europa während der Eocaenzeit eine unerwartet grosse Anzahl Gattungen von ächt amerikanischem Gepräge gelebt haben. Die mit Lehm und Bohnerz erfüllten Spalten im Jurakalk, welche jene Formen enthalten, lassen sich freilich nicht direct mit regelmässig abgelagerten Sedimentschichten vergleichen. Ihre Ausfüllung erfolgte wahrscheinlich sehr langsam, begann offenbar schon während der älteren Eocaenzeit und dauerte bis zum Schluss derselben fort. Die Bohnerzfauna der Schweiz hat darum keinen einheitlichen Charakter; Formen von alteocänem Gepräge vermischen sich mit mittel- und obereocänen. Sind die ersteren in der Regel auch nur durch wenige isolirte Zähne angedeutet, so zeigen sie doch, dass mehrere vorher für amerikanische Autochthonen gehaltene Gattungen auch in Europa gelebt haben. Und diese Thatsache ist von grosser Bedeutung, denn sie beweist nicht allein die einheitliche Entstehung der alteocänen Fauna, sondern auch den einstigen Zusammenhang der zwei jetzt scharf getrennten Verbreitungsgebiete.

II. Im mittleren Eocaen waren in Europa die Erhaltungsbedingungen noch viel ungünstiger, als vorher. Die Umgebung von Paris, die Süsswasserablagerungen von Argenton (Indre), Bracklesham (Sussex), Issel (Aude), Buchs-

1) Die eocäne Säugethierwelt von Egerkingen. Abh. schweiz. paläontol. Gesellschaft 1891. Bd. XVIII.

weiler (Elsass) und einige wenige andere zerstreute Localitäten haben die dürftigen Reste einer Säugethierfauna geliefert, aus welcher von Perissodactylen die Gattungen *Lophiodon*, *Palaeotapirus*, *Propalaeotherium*, *Paleoplotherium*, *Hyracotherium*, *Pachynolophus*, *Pernatherium*, von Artiodactylen *Dichobune*, von Creodontia die Gattung *Proviverra* zu nennen sind. Die zusammengeschwemmten Zähne, Knochen- und Kieferfragmente in den Bohnerzspalten von Egerkingen, Güsgen, Mauremont und St. Loup des schweizerischen Jura könnten wohl besseren Aufschluss über die Zusammensetzung der mitteleocänen Säugethierfauna gewähren, enthielten sie nicht ein Gemeng aus allen Abtheilungen der Eocänperiode. Der Vergleich mit dem amerikanischen Verbreitungsgebiet, wo die berühmten Bridger- oder Dinoceras-Schichten von Wyoming eine Fülle prachtvoll erhaltener Säugethiere enthalten, stösst darum aus Mangel an Material auf grosse Schwierigkeiten. Immerhin dürften neue Funde in Europa voraussichtlich weitere Formen von amerikanischem Typus liefern, denn alle unsere mitteleocänen Genera besitzen in den Bridger Beds entweder Repräsentativ-Formen oder sind daselbst durch wenig abweichende Arten vertreten. Die Bridger Schichten enthalten folgende Gattungen:[1])

Marsupialia
Didelphys

Perissodactyla
Hyracotherium
Eohippus
Pachynolophus
(Orohippus)
? Bolohippus
Epihippus
Lambdotherium
Helaletes
Hyracchius
Colonoceras
Triplopus
Amynodon
Palaeosyops
Limnohyops
Telmatotherium

Artiodactyla
Achaenodon
Homacodon
? Oromeryx
Ithygramnodon
? Stibarus

Amblypoda
Uintatherium
Dinoceras
Loxolophodon
(Tinoceras)

Tillodontia
Tillotherium
Anchippodus

1) Die häufiger vorkommenden Genera sind mit Fettschrift gedruckt.

Rodentia	Chiroptera	Prosimiae
Paramys	*Nyctilestes*	***Hyopsodus***
Mysops	*Vesperugo*	***Tomitherium***
Tillomys	*Nyctitherium*	*Omomys*
Toxymys		*Notharctus*
Colonymys	**Creodontia**	***Limnotherium***
Insectivora		*Microsyops*
Ictops	***Mesonyx***	? *Thinolestes*
? *Passalacodon*	***Proviverra***	? *Telmatolestes etc.*
? *Anisacodon*	*Protopsalis*	
? *Entomacodon*	*Miacis*	
? *Euryacodon*	*Didymictis*	

Im mittleren Eocaen erscheinen auch die ersten Meersäugethiere und zwar *Zeuglodon* in Nord-America und Europa, *Halitherium* in Europa und Nord-Africa, *Prorastomus* in West-Indien. Das charakteristische Gepräge erhält die mitteleocäne Fauna durch die starke Entwickelung der Perissodactylen und Prosimiae und durch das unvermittelte Auftreten der gewaltigen, bis jetzt auf Nord-America beschränkten Dinoceratiden. Die Artiodactylen, Nager und Insectivoren sind in der Zunahme, die Creodontia und Tillodontia bereits in der Abnahme begriffen, die Chiroptera zum erstenmal nachgewiesen.

III. Zum oberen Eocaen (von vielen Autoren auch zum unteren Oligocaen) wird in erster Linie die durch Cuvier's Arbeiten berühmte Fauna des Pariser Gyps gerechnet. Mit diesem sind gleichaltrig die an Säugethieren überaus reichen Lignite von Débruge bei Apt (Vaucluse); die Süsswassermergel und Kalke von Alais und St. Hippolite (Gard), der Gegend von Le Puy im Velay und von Castelnaudary (Languedoc), des oberen Rheinthals (Mühlhausen, Elsass, badisches Breisgau) und die Süsswasserschichten von Bembridge und Hordwell im südlichen England. Zahlreiche Reste derselben Fauna finden sich eingeschwemmt im Bohnerz des schweizerischen, schwäbischen und fränkischen Jura (Egerkingen, Gösgen, Mauremont, Delsberg, Moutiers, Schaffhausen,

Fronstetten, Gegend von Ulm, Heidenheim, Pappenheim u. a. O.) und namentlich in den mit Phosphorit-haltigem Lehm ausgefüllten Jurakalkspalten im sogenannten Quercy zwischen Villefranche und Montauban. Die Bohnerze und Phosphorite enthalten freilich, wie schon bemerkt, keine einheitlichen Faunen: in der Schweiz (namentlich bei Egerkingen und Mauremont) mischen sich alteocäne mit mittel- und obereocänen Arten; im Quercy gesellt sich den obereocänen Formen ein kleiner Procentsatz ächt oligocäner und sogar untermiocäner Typen bei. Obwohl nun die Phosphorite ganz überwiegend obereocäne Arten und so ziemlich alle auch anderwärts aufgefundene obereocäne Genera enthalten und an Reichhaltigkeit und trefflicher Erhaltung der Ueberreste alle übrigen obereocänen Localitäten in Schatten stellen, so müssen bei der Beurtheilung des Gesammtcharakters der Fauna doch hauptsächlich die Reste aus den auf normalem Wege gebildeten Ablagerungen berücksichtigt werden.

Folgende Gattungen setzen in Europa die obereocäne Fauna zusammen[1]):

Marsupialia

Didelphys

Condylarthra

† *Phenacodus*
† *Protogonia*
† *Periptychus*
† *Meniscodon*

Perissodactyla

†? *Hyracotherium*
*† *Pachynolophus*
Lophiotherium
†* *Propalaeotherium*
Palaeotherium
Paloplotherium
Anchilophus
†* *Lophiodon*
* *Protapirus*
* ***Cadurcotherium***
* *Aceratherium* (M)
* *Schizotherium*
Limognitherium

Artiodactyla

* *Anthracotherium* (O)
Ancodus
*† *Rhagatherium*
* *Tapirulus*
* *Elotherium* (O)
Cebochoerus
* *Hemichoerus*
Acotherulum
* *Doliochoerus*
Choeropotamus

1) Die nur im Phosphorit vorkommenden Genera sind mit *, die nur aus dem Bohnerz der Schweiz bekannten mit †, die im Phosphorit und Bohnerz zugleich vorkommenden mit *† bezeichnet. Den auch im Oligocaen verbreiteten Gattungen ist ein (O), den im unteren Miocaen vorkommenden ein (M) beigefügt. Die besonders häufigen oder charakteristischen Genera sind mit Fettschrift gedruckt.

* *Palaeochoerus* (M)
Anoplotherium
Diplobune
Dacrytherium
*? *Mixochoerus*
Dichobune
* *Mouillacitherium*
* *Spaniotherium*
* *Oxacron*
* *Metriotherium*
* *Deilotherium*
Xiphodon
Amphimeryx
Dichodon
*† *Tetraselenodon*
*† *Haplomeryx*
* *Tragulohyus*
* ***Caenotherium*** (M)
* ***Plesiomeryx*** (M)
Gelocus
Lophiomeryx
* *Cryptomeryx*
* ***Prodremotherium***
* *Bachitherium*
* *Choilodon*
* *Platyprosopus*
* *Dremotherium* (M)

Tillodontia

† *Calamodon*

Rodentia

*† ***Sciuroides***
* *Sciurodon*
Sciuromys
* ***Pseudosciurus***
*† *Sciurus* (M)
* *Cricetodon* (M)
*† *Trechomys*
Theridomys (O M)
* *Nesokerodon*
* *Protechimys*
Myoxus (M)
* *Eomys*
Plesiarctomys
* *Plesiospermophilus*

Insectivora

* *Myxomyogale*
*† ***Amphidozotherium***
* *Comphotherium*
*† ***Neurogymnurus***
* *Sorex* (M)
* *Necrosorex*

Chiroptera

* ***Pseudorhinolophus***
* *Alastor*
* *Vespertiliavus*
* *Necromantis*
Nyctitherium
(*Vespertilio*)

Creodontia

?* *Adracodon*
† *Miodaenus*
* *Quercytherium*
Proviverra
Galethylax
† *Prorhizaena*
* *Oxyaena*
Hyaenodon (O M)
Pterodon
* *Pseudopterodon*
* *Thereutherium*
† *Cynohyaenodon*

Carnivora vera
(Fissipedia)

Cynodictis
*† ***Cynodon*** (O)
* *Pleniocyon*
* *Pachycynodon*
* *Amphicynodon* (O)
* *Cephalogale* (M)
*† *Pseudamphicyon*
* *Brachycyon*
* ***Stenoplesictis***
* ***Palaeoprionodon***
* *Haplogale* (M)
* *Stenogale* (M)
* ***Plesictis*** (O M)
Palaeogale (M)
* *Amphictis* (M)
Viverra (M)
* ***Aeluriotis***
*† ***Pseudaelurus*** (M)
* ***Eusmilus***

Prosimiae

Adapis
* ***Necrolemur***
Microchoerus
* *Heterohyus*
* *Cryptopithecus*
† *Pelycodus*
† *Hyopsodus*

Ein Vergleich dieser Fauna (aus welcher die mit † bezeichneten Gattungen von Egerkingen wohl entfernt werden dürfen) mit der unter- und mitteleocänen des gleichen Verbreitungsgebietes ergibt zunächst eine viel grössere Reich-

haltigkeit an Gattungen (c. 110) und Arten (c. 200). Mögen auch reichlich 10 % der Species und Genera nur provisorischen Werth besitzen und bei genauerer Kenntniss wieder verschwinden, so bleibt doch eine so bunte und formenreiche Thiergesellschaft übrig, wie sie heutzutage nur noch in tropischen Regionen angetroffen wird. Unsere jetzige europäische Landsäugethierfauna enthält 54 Genera mit ungefähr 150 Species und von diesen gehören circa 60 % der aus Nagern, Insektenfressern, Fledermäusen und kleinen Raubthieren bestehenden Microfauna an, für welche die Erhaltungsbedingungen in früheren Erdperioden sehr ungünstig waren. Die Hufthiere spielen im oberen Eocaen noch immer die Hauptrolle, doch haben die Perissodactylen die führende Stellung an die Artiodactylen abgetreten. Unter den ersteren dauern zwar *Pachynolophus*, *Propalaeotherium* und *Lophiodon* fort, stehen aber an Häufigkeit hinter den moderneren Gattungen *Palaeotherium* und *Paloplotherium* zurück. Unter den Artiodactylen gehören fast genau die Hälfte aller Gattungen zu den Anoplotheriden, welche in der äusseren Erscheinung unter allen Paarhufern am meisten den Perissodactylen gleichen und in ihrem Gebiss und Skeletbau Merkmale von Hufthieren und Fleischfressern vereinigen. Sie gehören zu den sonderbarsten Geschöpfen der damaligen Zeit. Ihre niedrigen lophodonten Backzähne erinnern an Palaeotherien; eine Reduktion von Eckzähnen oder Schneidezähnen ist noch nicht zu beobachten, dem Schädel fehlen Geweihe oder sonstige Protuberanzen, die Extremitäten haben nur mässige Differenzirung erlitten, besitzen stets getrennte Metapodien und inadaptive Hand- und Fusswurzel, ihre Endphalangen gleichen den indifferenten Hufen oder Krallen der Condylarthren. In der äusseren Erscheinung bieten die Anoplotheriden grosse Abwechselung. Während *Anoplotherium*, *Dichobune* und Verwandte in Grösse und Gestalt einem Tapir ähnlich sein mochten, dem man allerdings einen sehr langen

Schwanz anzufügen hätte, erinnerten die Dichobunen, Xiphodonten u. A. mehr an schlank gebaute Rehe und die zierlichen, vierzehigen Caenotherien, welche noch bis ins Miocaen fortdauern, schwanken in der Grösse zwischen Eichhörnchen und Katze. Neben den Anoplotheriden stellen Traguliden das Hauptcontingent der Paarhufer. Dieselben haben im Gebiss schon nahezu das Gepräge von brachyodonten Wiederkäuern erlangt und bleiben auch im Skeletbau, namentlich in der Ausbildung der Extremitäten kaum hinter den noch jetzt existirenden Zwerghirschen zurück, die gewissermaassen als Relicten einer früheren Erdperiode zu betrachten sind und unter allen Wiederkäuern die primitivsten Merkmale besitzen. Die eocänen Suiden (*Cebochoerus*, *Elotherium*, *Choeropotamus*, *Palaeochoerus*, *Acotherulum* u. a.) verhalten sich zu den jetzt lebenden Schweinen wie die Traguliden zu den Cerviden. Ihre bunodonten Backzähne haben einfache vierhöckerige Krone; Eckzähne und Schneidezähne sind wenig differenzirt, denen von Condylarthren und Creodontiern ähnlich, das Skelet hat noch keine nennenswerthen Vereinfachungen oder Reduktionen der Extremitäten erlitten. Auch die frühzeitig erloschenen Anthracotheriden erweisen sich als Collectivtypen, welche lophodonte und bunodonte Paarhufer mit einander verbinden. Der Mangel an Condylarthren und Amblypoden zeigt übrigens, dass die obereocäne Hufthierfauna bereits eine höhere Ausbildung erreicht hatte, als die ihr unmittelbar vorausgehende; und diese Thatsache tritt nicht minder bestimmt auch bei den Raubthieren zu Tage. Die unvollkommeneren Creodontia sind, was Formenreichthum anlangt, in starkem Rückgang begriffen, wenn auch *Hyaenodon* und *Pterodon* noch immer zu den häufigsten und stärksten Raubthieren der damaligen Zeit gehören; neben ihnen taucht eine Fülle von ächten fissipeden Carnivoren auf, die zu den Caniden, Musteliden und Viverriden gestellt werden, aber noch so viele gleichartige Merkmale besitzen,

dass sie sicherlich in eine einzige Familie vereinigt würden, wenn sie noch heute neben ihren vorgeschritteneren und nach verschiedenen Richtungen differenzirten Nachkommen lebten. Nur die Katzen (*Pseudaelurus*, *Eusmilus*) zeichnen sich schon im Eocaen durch scharf ausgeprägte Merkmale aus.

Ein höchst charakteristisches Element der obereocänen Fauna bilden auch die Pachylemuren (*Adapis*, *Caenopithecus*, *Necrolemur*, *Microchoerus* u. a.), welche sich an alttertiäre Vorläufer anschliessen und Merkmale der jetzigen Halbaffen und der eigentlichen Affen vereinigen.

Die sogenannte Microfauna ist ziemlich reichlich durch Nager, Insektenfresser, Fledermäuse und Beutelratten (*Didelphys*) vertreten. Die drei letztgenannten Ordnungen enthalten durchwegs Arten ohne besonders auffallende Eigenthümlichkeiten. Sie könnten füglich noch heute existiren und beweisen, dass diese Gruppen seit Beginn der Tertiärzeit nur geringe Fortschritte gemacht haben. Auch die Nager bilden ein conservatives Element der obereocänen Thiergesellschaft. Bleiben sie in mancher Hinsicht auch an Differenzirung hinter ihren Nachfolgern zurück, so besitzen sie doch bereits alle typischen Merkmale der Ordnung und erscheinen mit den Vertretern anderer Gruppen kaum enger verknüpft, als ihre noch jetzt existirenden Nachkommen.

Sieht man nach Vergleichspunkten für die europäische obereocäne Säugethierwelt, so lenkt sich der Blick sofort wieder nach Nord-Amerika, wo auf die fossilreichen Bridger-Beds in den sogenannten Uinta- oder Diplacodon-Beds eine verarmte Tochterfauna begraben liegt, in welcher die Amblypoden und Tillodontia verschwunden sind, Perissodactylen (*Pachynolophus*, *Triplopus*, *Isectolophus*, *Diplacodon*, *Amynodon*), Artiodactylen (*Protoreodon*, *Leptotragulus*) und Creodontia (*Mesonyx*, *Miacis*) vorherrschen und Nager und Prosimiae wenigstens durch spärliche Reste angedeutet erscheinen. Ein specieller Vergleich des paläontologischen Inhaltes der

Bridger- und Uinta-Schichten mit den mittel- und obereocänen Säugethieren Europa's würde zwar mancherlei Parallelen ergeben, aber zugleich auch zeigen, dass gemeinsame Gattungen oder repräsentative Verbindungsglieder sparsamer vorkommen, als im älteren Eocaen. Nur wenige Namen wiederholen sich in den europäischen und amerikanischen Listen (*Didelphys*, *Hyracotherium*, *Pachynolophus*, *Nyctitherium*, *Proviverra*), aber bei genauerer Prüfung würde man doch finden, dass verschiedene europäische Genera im westlichen Welttheil unter leichter Verkleidung wiederkehren. So nehmen z. B. *Helatetes* und *Isectolophus* die Stelle der europäischen Gattungen *Lophiodon* und *Protapirus* ein, *Cadurcotherium* wird durch *Amynodon*, *Plesiarctomys* durch *Paramys* ersetzt; die europäischen Halbaffen, Fledermäuse und Insektivoren besitzen meist nahe verwandte Repräsentativgenera in Nord-Amerika und für die Anoplotheriden und Traguliden bieten die allerdings ziemlich abweichenden Leptotraguliden Ersatz.

Immerhin hat die Thierentwickelung auf beiden Continenten sichtlich verschiedene Wege eingeschlagen. Die Verbindung der beiden Continente scheint zwar noch bestanden zu haben, allein die Communication dürfte erschwert gewesen sein.

Neben den Fundstätten in Europa und Nord-Amerika hat sich in neuester Zeit ein weiterer Schauplatz tertiärer Säugethiere im südlichen Theil von Argentinien erschlossen, der an Reichhaltigkeit die beiden älteren noch zu übertreffen scheint. Vereinzelte Reste aus den Tertiärschichten der Gegend von Santa Cruz in Patagonien sind schon seit mehr als 40 Jahren bekannt; aber erst durch Burmeister, Moreno und vor Allem durch die unermüdlichen Forschungen Florentino Ameghino's gewinnt man einen genaueren Einblick in diese höchst merkwürdige Fauna, welche in Süss-

wasserablagerungen von 60—80 m Mächtigkeit eingebettet liegt. Folgende Genera sind bis jetzt aus der „Santa Cruz-Formation" bekannt:

Marsupialia

Eodidelphys
Prodidelphys
Microbiotherium
Stylognathus
Hadrorhynchus
Prothylacinus
Perathereutes
? *Borhyaena*
? *Acrocyon*
? *Agustylus*
? *Hathlyacynus*
? *Dinamyctis*
? *Conodinyctis*
? *Anatherium*
? *Sipalocyion*
? *Acyon*
? *Ictioborus*
? *Cladosictis*
? *Protoproviverra*

Abderites
Acdestis
Decastis
Epanorthus
Callomenus
Halmadromus
Halmaselus
Essoprion
Pichipilus
Garzonia
Halmariphus

Edentata

a) Vermilinguia

Scotaeops

b) Tardigrada

Entelops
Dideilotherium

c) Gravigrada

Zamicrus
Hapalops
Pseudhapalops
Amphihapalops
Schismotherium
Trematherium
Nematherium
Geronops
Analcimorphus
Eucholoeops
Hyperleptus
Xyophoros
Planops
Paraplanops
Metopotherium
Eurysodon
Tolmodus
Prepotherium
Lymodon
Analcitherium
Ammotherium

d) Glyptodontia

Cochlops
Eucinepeltus
Propalaeohoplophorus
Asterostemma

e) Dasypoda

Dasypus
Chlamydotherium
Peltephilus
Stegotherium
Prozaedyus
Proeutatus
? *Antiosodon*

Perissodactyla

a) Proterotheridae

Diadiophorus
Licaphrium
Thoatherium
Proterotherium

b) Macrauchenidae

Theosodon
Coelosoma
Pseudocoelosoma

Toxodontia

Nesodon
Adinotherium
? *Gronotherium*
? *Xotoprotodon*
? *Acrotherium*
? *Phobereotherium*
? *Nannodus*
? *Rhadinotherium*
? *Palaeolithops*
Astrapotherium
? *Listriotherium*
? *Astrapodon*
Homalodontotherium
? *Diorotherium*
Colpodon

Typotheria

Protypotherium

Patriarchus	*Olenopsis*	*Sphingomys*
Interatherium	***Spaniomys***	***Perimys***
Icochilus	***Neoreomys***	*Pliolagostomus*
Hegetotherium	*Hedimys*	***Prolagostomus***
	Phanomys	*Lagostomus*
Rodentia	***Eocardia***	*Scotoeumys*
Steiromys	? *Procardia*	
Acaremys	? *Dicardia*	**Primates**
Sciamys	? *Tricardia*	*Homunculus*
Scleromys	*Schistomys*	? *Homocentrus*
Adelphomys	*Sphaeromys*	*Anthropops*
Stichomys	*Sphodromys*	? *Eudiastatus*

Die Zusammensetzung dieser fossilen patagonischen Tertiärfauna, welcher nach Ameghino einige ältere, problematische, angeblich mit Dinosaurier- und Crocodil-Knochen vermischte Säugethierreste (*Macropristis*, *Pyrrotherium*, *Astrapotherium*, *Dasypus*) vorausgehen, steht in schroffstem Contrast zu der im europäischen Eocaen vorkommenden Säugethiergesellschaft. Von den 121 oben angeführten Genera mit mindestens 220 Arten dürfte freilich ein ansehnlicher Bruchtheil vor einer kritischen Prüfung nicht Stand halten, aber jedenfalls übertrifft die fossile Säugethierfauna von Santa Cruz die jetzt in Argentinien existirende, welche nach Ameghino nur 107 Arten enthält, bedeutend an Reichthum von Gattungen und Arten und ist in dieser Hinsicht der obereocänen Europa's mindestens gleichwerthig. Ameghino vermehrt die Liste noch um drei angebliche Amblypoden (*Planodus*, *Adelotherium*, *Adrastotherium*) und einen Tillodontier (*Entocasmus*), allein diese Angabe stützt sich auf Reste, welche absolut keine genauere Bestimmung zulassen. Im Vergleich mit der europaeo-amerikanischen Eocaenfauna fällt zunächst der gänzliche Mangel an Artiodactyla, Insectivora, Chiroptera, Carnivora und Prosimiae auf. Die Perissodactyla sind durch zwei absolut fremdartige, ausgestorbene Familien (Proterotheridae und Macrauchenidae), die Nager lediglich durch hystricomorphe Formen von specifisch süd-

amerikanischem Gepräge und ebenso die Primaten durch platyrhine Affen vertreten. Die Hauptmasse der Fauna setzt sich aus Beutelthieren, Edentaten, Toxodontia und Typotheria zusammen. Von den zwei letztgenannten Ordnungen besitzt nur Süd-America fossile Vertreter, welche in der Santa Cruz-Formation beginnen und in der Pampas-Formation erlöschen. Auch von den Edentaten gehören sämmtliche Formen den jetzt ausschliesslich in Süd-America lebenden Xenarthra an und unter den Beutelthieren herrschen die noch jetzt in ganz Amerika und während der Tertiärzeit über die nördliche Hemisphäre verbreiteten Didelphyiden vor, werden aber von anderen Formen begleitet, die nach Australien weisen. Ameghino hat dieselben theils zu den Dasyuriden, theils zu den Creodontia gestellt, ist aber bezüglich der letzteren selbst schwankend geworden und gibt zu,[1]) dass wenigstens ein Theil der angeblichen Creodontia zu den Beutelthieren gehören dürfte. Gleiches gilt von den vermeintlichen Plagiaulaciden, die Ameghino hauptsächlich zur Altersbestimmung der Santa Cruz-Formation verwerthet hatte.[2]) Auch diese bilden wahrscheinlich eine selbständige, autochthone oder möglicher Weise aus Australien eingewanderte Marsupialierfamilie.

Unter allen Umständen muss Süd-Amerika als ein selbständiges „Schöpfungscentrum" angesehen werden, das möglicherweise in einer frühen Periode von Australien her be-

1) Revista Argentina I. S. 314.

2) Die Untersuchung einer grösseren Anzahl von Unterkiefern und isolirten Zähnen der Gattungen *Abderites*, *Acdestis* und *Epanorthus*, die ich der Güte des Herrn Ameghino verdanke, zeigt, dass diese Genera weder in der Zahl, noch in der Form der Backzähne mit *Neoplagiaulax* übereinstimmen. Sie besitzen grössere Aehnlichkeit mit australischen Hypsiprymniden und erweisen sich durch den eingebogenen Winkel des Unterkiefers als ächte Marsupialier. Auch Ameghino (Revue génér. des Sciences 1893 S. 77) erklärt dieselben für diprotodonte Beutelthiere, zu denen er übrigens auch *Plagiaulax*, *Neoplagiaulax und Ptilodus* stellt.

fruchtet worden war, aber bereits in der Santa Cruz-Formation selbst bei den Marsupialiern eigenartige Formen hervorgebracht hatte. Für einen Zusammenhang mit der die nördliche Hemisphäre oder doch Europa und Nord-Amerika in damaliger Zeit bewohnenden Säugethierfauna fehlen trotz gegentheiliger Versicherung Ameghino's jegliche Anhaltspunkte. Dagegen kann der auf die Verbreitung der Süsswasserthiere gestützten Vermuthung Ihering's, wonach Süd-Amerika während der mesozoischen und älteren Tertiärzeit mit Australien und Süd-Afrika in Landverbindungen gestanden sein soll, die Berechtigung nicht versagt werden. Es ist eine neue, völlig fremdartige Thiergesellschaft, welche uns durch Ameghino's Forschungen in Patagonien erschlossen wurde und in ihr befinden sich die Ahnen der Edentaten, Nager und Affen des heutigen neotropischen Reiches.

Der scharfen Altersbestimmung einer so abgeschlossenen und eigenartigen Fauna stehen grosse Schwierigkeiten im Wege, namentlich wenn auch die geologischen Verhältnisse keine entscheidende Auskunft gewähren. Die Santa Cruz-Schichten ruhen unmittelbar auf der „Formation guaranienne", deren untere Abtheilung aus marinen, unzweifelhaft der Kreide angehörigen Ablagerungen besteht, während die obere aus Conglomeraten und stürmisch gebildeten Sandsteinen (Pehuenche-Stufe) besteht, worin Reste opisthocöler Crocodile und Dinosaurier (?) mit den oben genannten mangelhaft erhaltenen Säugethieren (*Macropristis*, *Pyrrhotherium* etc.) vorkommen. Die Santa Cruz-Formation wird von Basaltströmen bedeckt und bildet die Basis von marinen Schichten mit Ostrea Patagonica, Pecten Paranensis und einer grossen Anzahl fossiler Conchylien, welche bereits von d'Orbigny, Darwin und Bravard untersucht und als tertiär bestimmt worden waren. Darwin hält die marinen Ablagerungen für

1) Ausland 1890. S. 941 und 968; ferner 1891. S. 344 und Archiv für Naturgeschichte 1893. S. 126—140.

eocän, d'Orbigny für miocaen, Ameghino für oligocaen. Directe Vergleichspunkte mit nordamerikanischen oder europäischen Tertiärablagerungen fehlen auch hier, so dass das Alter der Santa Cruz- und Patagonischen Formation lediglich nach dem allgemeinen Charakter der fossilen Ueberreste bestimmt werden muss.

Ameghino stellt die Säugethierfauna von Santa Cruz ins Eocaen. Dass jedoch zu Gunsten dieser Annahme die Existenz von Amblypoden, Tillodontia, Creodontia und Plagiaulacidae nicht angezogen werden darf, wurde bereits erwähnt. Unter den Marsupialiern fehlen Formen von entschieden alterthümlichem Gepräge und insbesondere vermisst man engere Beziehungen zu den mesozoischen Polyprotodonten und Allotherien. Unter den Perissodactylen stehen die Macraucheniden im Vergleich zu ihren jüngeren Nachkommen in der Pampasformation in Bezug auf Gebiss und Extremitätenbau auf primitiver Stufe; dagegen haben die Proterotheriden, welche sich im Gebiss am ehesten mit Anoplotheriden und Palaeotheriden vergleichen lassen, die letzteren in der Reduktion der seitlichen Metapodien und in der ganzen Differenzirung der Extremitäten weit überholt. Die erstaunlich zahlreichen und mannichfaltigen Edentaten entsprechen nicht im mindesten den Vorstellungen, welche man sich von den Ahnen dieser Ordnung zu machen berechtigt ist. Sie bleiben zwar an Grösse weit hinter den Riesenformen der Pampasformation zurück, sind aber schon ebenso bestimmt in Unterordnungen (Vermilinguia, Tardigrada, Gravigrada, Glyptodontia und Dasypoda) gegliedert wie im Pleistocän und stehen in allen wesentlichen Merkmalen des Gebisses und Skeletbaues auf einer hohen Stufe der Differenzirung. Die Backzähne haben bereits prismatische Form erlangt, Schneidezähne wurden nur bei zwei Gattungen nachgewiesen und ein Zahnwechsel scheint ebenso wenig stattgefunden zu haben, wie bei der Mehrzahl der lebenden Edentaten. Schädel und Skelet weichen nicht

nennenswerth von jüngeren Gattungen ab und die charakteristischen Hautpanzer der Glyptodontier und Dasypoden aus der Santa Cruz-Formation sind im Wesentlichen wie die der pleistocänen und lebenden Gattungen gebaut. Nach Ameghino sollen sogar zwei noch jetzt existirende Gattungen (*Dasypus* und *Chlamydotherium*) in der Santa Cruz-Formation vorkommen. Die Edentaten können somit nicht als Zeugen für den alterthümlichen Charakter der Fauna angerufen werden. Ebenso wenig die Nager. Auch diese gehören ausschliesslich zu Hystricomorphen von specifisch südamerikanischem Gepräge und stehen theilweise noch jetzt lebenden Gattungen ausserordentlich nahe oder stimmen sogar (wie *Lagostomus*) generisch mit solchen überein. Die vermeintlichen Beziehungen zu europäischen Protrogomorphen (*Theridomys*, *Nesokerodon*, *Archaeomys*) haben sich als trügerisch erwiesen und ebenso die mit nordamerikanischen tertiären Nagern. Die meist hoch prismatischen Zähne und der Mangel eines Milchgebisses beweisen, dass die Nager der Santa Cruz-Formation durchschnittlich auf höherer Entwickelungsstufe angelangt sind, als ihre obereocänen Verwandten in Europa und Nord-Amerika. Unter den Toxodontia weisen nur die Homalodontotheriden primitive Merkmale auf, alle übrigen haben ein hoch differenzirtes Gebiss, meist prismatische Backzähne und reduzirte Extremitäten. Bei den Typotheria verrathen allerdings die meist geschlossene Zahnreihe und die fünfzehigen Extremitäten einen primitiveren Zustand, als bei ihren Nachfolgern im jüngeren Tertiär und in der Pampasformation, aber auch bei ihnen haben die gekrümmten Backzähne bereits prismatische Gestalt erreicht. Die Affen endlich können keineswegs, wie Ameghino annimmt, als die Stammformen aller heutigen Simiae angesehen werden, denn sie haben specifisch südamerikanisches Gepräge und stehen an Differenzirung entschieden über den mehr generalisirten Pachylemuren des europäischen und nordamerikanischen Tertiärs.

Alles in Allem genommen hat die Santa Cruz-Fauna entschieden eine phylogenetisch höhere Stufe erreicht als die unter- und mitteleocäne Säugethiergesellschaft der nördlichen Hemisphäre. Sie kann im äussersten Falle mit der obereocänen oder oligocänen Europa's in Parallele gestellt werden.

Oligocaen.

Die kohlenführende untere Süsswassermolasse der Nord- und Süd-Alpen, (Ober-Bayern, Schweiz, Gegend von Vicenza, Cadibona und Zovencedo in Ligurien) und des Waadtländer Hügellandes (Rochette bei Lausanne), die gleichaltrigen Ablagerungen in Ungarn (Gran) und Dalmatien (Monte Promina), die marinen Sande und brakischen Mergel des Mainzer Beckens, des oberen Rheinthals (Lobsann), der Gegend von Paris (Fontainebleau, Etampes), die Süsswassermergel von Ronzon bei Le Puy, Villebramar, St. Henri, Manosque und a. O. in Südfrankreich und die lacustren Ablagerungen von Hempstead und Colwell Bay der Insel Wight enthalten eine ärmliche Säugethierfauna, welche sich aus folgenden Gattungen zusammensetzt:

Marsupialia

Didelphys
Amphiperatherium

Perissodactyla

Acerotherium
? *Rhinoceros*

Artiodactyla

Anthracotherium
Ancodus
Elotherium
Plesiomeryx
Gelocus

Rodentia

Theridomys
Cricetodon
? *Decticus*
? *Elomys*

Insectivora

Tetracus

Creodontia

Hyaenodon

Carnivora

Cynodon
Amphicynodon
Plesictis
? *Elocyon*

Sirenia

Halitherium

Cetacea

? *Squalodon*
? *Balaenoptera*

Die oligocäne Säugethierfauna erhält nur durch das reichliche Vorkommen von *Anthracotherium*, *Ancodus* und

Elotherium einige Selbständigkeit. Sie theilt mit dem oberen Eocaen fast alle Gattungen und erweist sich als eine verarmte Tochterfauna der ersteren. Bemerkenswerth ist die Abwesenheit einer grösseren Anzahl im oberen Eocaen blühender Gattungen (*Anoplotherium*, *Diplobune*, *Xiphodon*, *Palaeotherium*, *Paloplotherium*, *Anchilophus*, *Pterodon*, *Proviverra* etc.).

Miocaen.

I. Die zum unteren Miocaen gerechneten Süsswasser-Ablagerungen der Limagne (St. Gérand-le-Puy, Cournon, Gannat etc.), des Pariser Beckens (Calcaire de Beauce), der Gegend von Mainz (Weisenau, Hochheim, Mombach), Ulm (Haslach, Eckingen, Michelsberg, Eselsberg) enthalten eine ziemlich reiche und charakteristische Säugethierfauna, die leider bis jetzt nur an wenigen europäischen Fundorten nachgewiesen werden konnte. Sie setzt sich aus folgenden Gattungen zusammen:[1])

Marsupialia

† ***Didelphys***
(Oxygomphius)
† *Amphiperatherium*

Perissodactyla

* ***Tapirus***
Aceratherium
* ***Rhinoceros***
(Diceratherium)
? *Macrotherium*

Artiodactyla

† ***Anthracotherium***
† ***Palaeochoerus***
*† ***Amphitragulus***
† ***Dremotherium***
† ***Caenotherium***
† ***Plesiomeryx***

Rodentia

† ***Theridomys***
*† ***Archaeomys***
*† ***Issiodoromys***
* *Myoxus*
Cricetodon
* *Spermophilus*
Sciurus
* ***Steneofiber***
*† ***Titanomys***

Insectivora

* *Talpa*
*† *Geotrypus*
*† *Echinogale*
* ***Myogale***
*† *Plesiosorex*
Sorex
* ***Dimylus***
*† *Cordylodon*
*† *Palaeoerinaceus*
* *Erinaceus*

---

1) Die mit * bezeichneten Gattungen treten zum erstenmal auf, die mit † bezeichneten erlöschen, die *† bezeichneten erscheinen im unteren Miocaen und sterben daselbst wieder aus.

Chiroptera	**Carnivora vera**	***Palaeogale***
† ***Palaeonycteris***	(Fissipedia)	* ***Potamotherium***
? *Vespertilio*	† ***Cephalogale***	† ***Amphictis***
	* ***Amphicyon***	***Viverra***
Creodontia	***Stenogale***	* ***Herpestes***
† ***Hyaenodon***	† ***Plesictis***	* ***Proaelurus***

Auch diese Fauna gibt sich auf den ersten Blick als eine Tochter der obereocänen und oligocänen kund. Dieselben Ordnungen und vielfach sogar dieselben Gattungen wiederholen sich in allen dreien und auch die procentuale Betheiligung der einzelnen Ordnungen weist grosse Uebereinstimmung auf. Im Mangel an Halbaffen, im starken Rückgang und schliesslichen Erlöschen der Marsupialier, Creodontia und Anoplotheriden, in der viel grösseren Häufigkeit einzelner früher nur sporadisch vorkommender Gattungen wie *Anthracotherium*, *Palaeochoerus*, *Dremotherium* und in dem Auftauchen einer grossen Anzahl neuer Gattungen wie *Tapirus*, *Diceratherium*, *Amphitragulus*, *Steneofiber*, *Titanomys*, *Erinaceus*, *Dimylus*, *Amphicyon*, *Potamotherium*, *Herpestes*, *Proaelurus* u. A. beruhen die Unterschiede zwischen der obereocänen, oligocänen und untermiocänen Fauna Europa's. Unter den neuen Gattungen gibt es übrigens keine einzige Gestalt, für welche nicht eine verwandte im Eocaen gefunden werden könnte; nur in der Umbildung, Differenzirung und Verbesserung älterer Typen unterscheidet sich die neue Fauna von den früheren. Mit Ausnahme von einigen Beutlern, Nagern, Insektenfressern und Fledermäusen (*Didelphys*, *Myoxus*, *Cricetodon*, *Spermophilus*, *Sciurus*, *Talpa*, *Myogale*, *Sorex*, *Erinaceus*, *Vespertilio*) sind sämmtliche grösseren Genera erloschen.

Die reiche Säugethierfauna der sogen. White-River-Beds, die in Nord-Nebraska, Dakota, Colorado, Wyoming und Süd-Canada ein sehr ausgedehntes Areal bedecken und eine Mächtigkeit von 40—60 M. erreichen, verhält sich zur

Bridger- und Uintafauna ganz ähnlich, wie die untermiocaene Europa's zu Obereocaen und Oligocaen. Die gewaltigen Amblypoden und die sonderbaren Tillodontia sind erloschen, die Creodontia auf eine einzige Gattung (*Hyaenodon*) zusammengeschrumpft, die Prosimiae nur noch durch zwei Genera vertreten. Im Uebrigen besteht die White River Fauna aus Beutelthieren, Perissodactylen, Artiodactylen, Nagern, Insektenfressern, Fledermäusen und ächten Raubthieren und zwar sind bis folgende Gattungen nachgewiesen:[1])

Marsupialia

Didelphys

Perissodactyla

*† ***Mesohippus***
*† *Tapiravus*
* ***Accratherium*** (E)
*† ***Hyracodon***
*† *Metamynodon*
*† ***Titanotherium***
Diconodon
Brontops
Brontotherium
Menops
Symborodon
Megacerops
Titanops
Allops
Dalodon
Teleodus

Artiodactyla

*†? *Ancodus* (E)
*† ***Elotherium*** (E)
*† *Perchoerus*
*† *Leptochoerus*
* ***Agriochoerus***
*† ***Oreodon***
*† ***Poëbrotherium***
*† *Gomphotherium*
*† ***Leptomeryx***
*† *Hypisodus*
*† *Hypertragulus*
*† *Protoceras*

Rodentia

*† ***Ischiromys***
* ***Steneofiber*** (E)
*† *Heliscomys*
*† ***Gymnoptychus***
*† ***Eumys***
*† ***Palaeolagus***

Insectivora

† *Ictops*
*† *Leptictis*
*† *Mesodectes*
*† *Geolabis*

Chiroptera

*† *Domnina*

Creodontia

* ***Hyaenodon*** (E)

Carnivora vera (Fissipedia)

*† ***Daphaenos***
* ***Galecynus***
* ***Hoplophoneus***
*† ***Dinictis***

Primates

*† *Laopithecus*
*† *Menotherium*

Unter den Perissodactylen stellt *Mesohippus* nur ein etwas vorgeschritteneres Differenzirungsstadium von *Epihippus* dar und genau in derselben Weise verhält sich *Tapiravus* zu *Helaletes*, *Hyracodon* zu *Hyrachius*, *Metamynodon* zu *Amy-*

---

1) Die mit E bezeichneten Genera finden sich auch im Miocaen von Europa. Für die sonstigen Zeichen vgl. Note S. 163.

nodon. Die Titanotheriden mit einer Fülle von Arten bilden durch ihre Riesengrösse und Häufigkeit ein höchst charakteristisches Element der White-River-Fauna und sind offenbar aus den eocänen Palaeopsinen hervorgegangen. Unter den Artiodactylen nehmen die Oreodontiden (*Agriochoerus*, *Oreodon*), was Häufigkeit betrifft, die erste Stelle ein; auch sie sind schon in den Uinta-Beds durch *Protoreodon* vertreten und ebenso erweisen sich *Poëbrotherium* und *Gomphotherium* als in der Richtung der heutigen Kameele fortschreitende Verbindungsglieder zwischen den letzteren und den eocänen Leptotragulinen. Auch die Microfauna der White River-Beds schliesst sich eng an die eocäne an, dagegen treten die ächten Raubthiere, die Traguliden (*Leptomeryx*, *Hypisodus*, *Hypertragulus*), die merkwürdige Cerviden-Gattung *Protoceras*, sowie einige wahrscheinlich aus Europa eingewanderte Gattungen (*Aceratherium*, *Ancodus*, *Elotherium*, *Steneofiber*, *Hyaenodon*) als neue Erscheinungen auf. Ein Verkehr zwischen Europa und Nord-Amerika fand offenbar noch statt, aber während im älteren Eocaen die neue Welt mit ihrem Ueberfluss Europa beschenkte, erhielt im Miocaen Nord-Amerika eine grössere Anzahl von Einwanderern aus Europa.

II. In der jüngeren Miocaenzeit erweitert sich in Europa der Schauplatz für die Verbreitung von Landsäugethieren ganz beträchtlich. Das bisher vom Meer überfluthete Zwischengebiet von Alpen und Juraplateau ist jetzt trocken gelegt oder mit Süsswassersümpfen und Landseen bedeckt; auch im Wiener Becken befindet sich das Meer im Rückzug, in den Alpen (Steyermark) und im Juraplateau (Steinheim, Nördlingen, Georgensgmünd) füllen sich Vertiefungen mit Süsswasser aus und enthalten eingeschwemmte Reste von Landthieren. Eine Menge von Fundstellen im Rhonethal (Grive-St. Alban), in der Schweiz (Winterthur, Käpfnach, Elgg, Chaux-de-Fonds, Vermes), Ober-Baden (Oeningen, Engelswies,

Heudorf), in der schwäbisch-bayerischen Hochebene (Kirchberg, Günzburg, Dinkelscherben, Haeder, Dachau, München, Freising, Nieder-Bayern), im Juraplateau, im Wiener Becken, Steyermark, Ungarn, Rumänien, Bessarabien enthalten Ueberreste von Landsäugethieren, die auch westlich vom französischen Centralplateau, in dem vom Meer verlassenen ehemaligen aquitanischen Becken (Sansan, Simorre, St. Gaudens), in der Touraine und im Orléanais wiederkehren und sich auch in Spanien (San Isidro) und Algerien nachweisen lassen. Italien (Monte Bamboli) hat wenigstens Spuren derselben überliefert. Die jüngere oder mittelmiocäne Fauna besteht aus folgenden Gattungen:[1])

Perissodactyla

*† ***Anchitherium***
Tapirus
Aceratherium
Rhinoceros
(Dihoplus)
† ***Macrotherium***

Artiodactyla

*† ***Hyotherium***
* *Choerotherium*
*† ***Listriodon***
* ***Hyaemoschus***
(Dorcatherium)
*† ***Palaeomeryx***
* *Procervulus*
*† *Micromeryx*
*† ***Dicroceras***
*† *Protragoceras*

Proboscidia

* ***Mastodon***
* ***Dinotherium***

Rodentia

Sciurus
Steneofiber
Cricetodon
Myoxus
* *Hystrix*
* ***Myolagus***
* ***Lagomys***

Insectivora

Talpa
*† ***Galerix***
*† *Lanthanotherium*
Myogale
Erinaceus
Sorex
Crocidura
† *Dimylus*

Chiroptera

Vespertilio
Vesperugo

Carnivora
(Fissipedia)

*† *Galecynus*
† ***Amphicyon***
*† *Pseudocyon*
*† *Hemicyon*
*† ***Dinocyon***
* ***Hyaenarctos***
*† *Haplogale*
† *Stenogale*
*† *Pseudictis*
† *Palaeogale*
*† *Proputorius*
* *Mustela*
*† ***Trochictis***
*† *Trochotherium*
* *Enhydriodon*
Viverra
Herpestes
*† *Progenetta*
† *Pseudaelurus*
* ***Machairodus***

Primates

*† ***Dryopithecus***
*† ***Pliopithecus***
*† ***Oreopithecus***

1) Vgl. Note S. 163.

Das unvermittelte Erscheinen von Proboscidiern (*Mastodon*, *Dinotherium*) und ächten Affen (*Dryopithecus*, *Pliopithecus*, *Oreopithecus*), das reichliche Vorkommen von Rhinoceriden, von *Anchitherium*, das erstmalige Auftreten von Geweih tragenden Wiederkäuern (*Dicroceras*, *Procervulus*) und Antilopen (*Protragoceras*), die starke Entwickelung von Raubthieren, welche in ihrer Organisation die Mitte zwischen Hunden und Bären halten, verleiht der mittelmiocänen Fauna ein von der unmittelbar vorhergehenden ziemlich abweichendes Gepräge, das durch den Mangel an kleinen Caenotherien und Creodontiern noch verschärft wird. Die Kluft zwischen der mittelmiocänen und untermiocänen Säugethierfauna ist sicherlich eine weit grössere, als die zwischen der letzteren und der obereocänen. Keine einzige Species aus dem unteren Miocaen hat sich unverändert erhalten und auch die aus früherer Zeit überlieferten Gattungen gehören mit Ausnahme von *Aceratherium*, *Rhinoceros*, *Viverra*, *Herpestes* und *Steneofiber* den offenbar wenig umbildungsfähigen Insectivoren, Nagern, Fledermäusen und kleinen Raubthieren an. Auch die noch jetzt existirenden Genera der damaligen Zeit sind mit Ausnahme von *Tapirus*, *Rhinoceros*, *Viverra* und *Herpestes* Vertreter der Mikrofauna und haben gegenwärtig meist kosmopolitische Verbreitung. Von den vier grösseren Gattungen leben *Tapirus* in Indien und Süd-Amerika, die drei übrigen im Mittelmeergebiet, Afrika und Süd-Asien, also durchwegs in auffallend grossen Verbreitungsgebieten.

Die beträchtliche Verschiedenheit der unter- und mittelmiocänen Säugethierfauna wird erklärlich, wenn man bedenkt, dass zwischen beiden fast überall in Europa mächtige marine Ablagerungen eingeschaltet sind, die jedenfalls einen langen Zeitraum repräsentiren, jedoch fast nur Reste von Meersäugethieren enthalten und über die Landbewohner der damaligen Zeit keinen Aufschluss gewähren. Die miocänen Thalassotherien gehören zu den Cetaceen, Sirenen und Pinnipedien

und zwar durchwegs zu erloschenen Gattungen, über deren Herkunft ebenso völliges Dunkel herrscht, wie über ihre spärlichen Vorläufer aus dem Eocaen (*Zeuglodon*, *Prorostomus*, *Halitherium*). Dass übrigens die Küsten Europa's und Nord-Amerika's in der Tertiärzeit von ähnlichen Meersäugethieren bewohnt waren, ergibt sich aus der weiten Verbreitung einzelner Genera (*Zeuglodon*, *Squalodon*) und aus dem im Ganzen übereinstimmenden Charakter der fossilen Cetaceen aus dem Miocaen von Europa und den östlichen Vereinigten Staaten (New-Jersey, Maryland, Virginien, Georgia, Carolina). Dieselben enthalten folgende Genera:

Europa		Nord-Amerika
Cetacea	**Sirenia**	**Cetacea**
Squalodon	***Halitherium***	? *Delphinodon*
Champsodelphis	*Rhytiodus*	? *Phocogeneus*
Trachyacanthus	***Metaxytherium***	***Squalodon***
Delphinopsis	*Miosiren*	*Zarhachis*
Heterodelphis	*Prohalicore*	*Ixacanthus*
Priscodelphinus		*Cetophis*
Schizodelphis	**Carnivora**	*Lophocetus*
Macrochirifer	(Pinnipedia)	***Priscodelphinus***
? *Cetorhynchus*		*Rabdosteus*
Beluga	*Pristiphoca*	*Agabelus*
Physodon	*Monatherium*	***Balaenoptera***
Hoplocetus	*Prophoca*	
Plesiocetus	*Mesotaria*	**Sirenia**
Cetotherium		? *Hemicaulodon*

Für die mitteleocäne Landsäugethierfauna fehlt es auch in Nord-Amerika nicht an einer Parallele. Allerdings hat bis jetzt nur der äusserste Westen in den Territorien Oregon, Nevada und Washington jene zum Theil wundervoll erhaltenen Reste geliefert, welche die sogenannte John Day-Fauna zusammensetzen. Das reichliche Vorkommen von *Rhinoceros*, *Aceratherium*, *Anchitherium*, *Steneofiber*, *Sciurus*, *Lepus* und *Galecynus* zeigt, dass europäische Genera damals noch bis

zum pacifischen Ocean wandern konnten und wenn auch gewisse specifisch amerikanische Familien, wie die Oreodontiden und Cameliden eine Weiterausbildung und Vermehrung erfahren haben, so fehlt es doch nicht an Repräsentativformen, die auf gemeinsame Abstammung und auf einstigen Zusammenhang beider Continente schliessen lassen. Den ältesten Geweihträgern Europa's (*Dicroceras*) entspricht in Nord-Amerika *Blastomeryx*, den merkwürdigen Macrotherien und Chalicotherien der alten Welt die amerikanische Gattung *Moropus* und auch zwischen Nagern und Raubthieren der beiden Contingente bestehen mancherlei Beziehungen, obwohl die Listen meist andere Namen enthalten, die jedoch häufig ähnliche Formen bezeichnen. Die Fauna der John Day-Beds enthält bis jetzt nachstehende Genera:[1])

Perissodactyla
Anchitherium (E)
Aceratherium (E)
Rhinoceros
(Diceratherium) (E)
Moropus

Artiodactyla
Boöchoerus
Chaenohyus
Bothrolabis
? *Thinohyus*
Coloreodon
Agriochoerus
Merycochoerus
Blastomeryx

Rodentia
Allomys
Sciurus (E)
Steneofiber (E)
Pleurolicus
Entoptychus
Hesperomys
Paciculus
Palaeolagus
Lepus (E)

Carnivora
(Fissipedia)
Temnocyon
Galecynus (E)
Hyaenocyon
Oligobunis
Enhydrocyon
Nimravus
Pogonodon
Archaelurus
Hoplophoneus

Das Bild der jüngeren Miocaenfauna Nord-Amerika's wird ergänzt durch die Funde aus den sogenannten Deep River- oder Ticholeptus-Beds, die bis jetzt nur im westlichen Nebraska, im Deep River-Thal von Montana und im Cottonwood-Creek von Oregon nachgewiesen werden konnte. Die Fauna dieser Ablagerungen hat ein etwas jüngeres Gepräge als die der John Day-Schichten. Sie zeichnet sich vornehm-

1) Die mit E bezeichneten Gattungen finden sich auch in Europa.

lich durch das Auftreten von *Mastodon*, durch die starke Entwickelung von Oreodontiden (*Merycochoerus*, *Merychius*, *Leptauchenia*, *Cyclopidius*, *Pithecistus*) und Cameliden (*Protolabis*) und durch die Fortdauer von *Anchitherium* und *Blastomeryx* aus. Im Ganzen sind etwa 20 Arten aus diesem Horizont bekannt.

III. Auch in Europa findet am Schluss der Miocaen eine ziemlich tief greifende Veränderung im Bestand der Landsäugethiere statt. Verhältnissmässig wenige und meist weit entfernte Fundstellen geben Aufschluss über die oberste Miocänfauna; aber einzelne derselben zeichnen sich durch erstaunliche Reichhaltigkeit und treffliche Erhaltung der Ueberreste aus. So wurden z. B. bei Pikermi unfern Athen auf einem Areal von 300 M. Länge und 60 M. Breite nicht weniger als 40 Arten von Säugethieren und darunter einige in hunderten von Individuen und in ganzen Skeleten ausgegraben. Eine ähnliche Nekropole urweltlicher Säugethiere wurde auf Samos, eine andere am Mont Léberon in der Provence entdeckt. Verschiedene Fundorte im Rhonethal, am Fuss der Pyrenäen, in Spanien, Algerien und Klein-Asien beweisen, dass die Pikermifauna im Mittelmeergebiet weit verbreitet war. Sie fehlt auch nicht in den Ländern nördlich der Alpen, ist aber dort etwas ärmer, entbehrt insbesondere unter den Wiederkäuern gewisser Formen (Antilopen, Giraffen), die im Süden offenbar von grasreichen Steppen umgeben waren und ersetzt dieselben durch waldliebende Hirsche. Die berühmten Sandablagerungen von Eppelsheim bei Worms, der Belvedereschotter bei Wien und die im Wiener Becken, Ungarn und Rumänien weit verbreiteten Congerienschichten der pontischen Stufe enthalten Ueberreste der obersten miocänen Fauna, die von manchen Autoren bereits dem Pliocän zugetheilt wird und aus folgenden Gattungen zusammengesetzt ist:[1])

1) Vgl. Note S. 163.

Edentata
* *Orycteropus*

Perissodactyla
*† ***Hipparion***
Tapirus
Aceratherium
Rhinoceros
(Dihoplus)
*† *Leptodon*
? *Titanotherium*
*† ***Chalicotherium***

Artiodactyla
* ***Sus***
Hyaemoschus
(Dorcatherium)
Cervulus
*† ***Palaeotragus***
*† ***Samotherium***
*† ***Helladotherium***
* ***Camelopardalis***
*† ***Tragoceras***
*† ***Palaeoryx***
*† ***Tragelaphus***
*† ***Palaeoreas***
*† *Antidorcas*
* ***Gazella***
Antilope

Proboscidia
Mastodon
† ***Dinotherium***

Rodentia
† ***Steneofiber***
*† *Acomys*
Hystrix

Insectivora
Sorex

Carnivora
(Fissipedia)
*† ***Simocyon***
† *Amphicyon*
† ***Hyaenarctos***
Mustela
*† *Promeles*
*† *Promephitis*
*† ***Ictitherium***
*† *Lycyaena*
*† *Hyaenictis*
* ***Hyaena***
* *Felis*
Machairodus

Primates
*† *Mesopithecus*

Wohl das fremdartigste Element dieser Fauna bildet eine Edentatengattung (*Orycteropus*) von afrikanischem Gepräge, die sich auf der südlichen Hemisphäre der alten Welt bis heute erhalten hat. Auch unter den Wiederkäuern weisen Giraffen, Gazellen und eine Fülle von Antilopen auf Beziehungen zu Afrika hin und bestätigen, dass damals zwischen dem Mittelmeergebiet und dem schwarzen Continent eine Landverbindung bestand, auf welcher Rudel von Wiederkäuern verkehrten. Unter diesen weit vorgeschrittenen, fast modernen Typen ragen *Helladotherium* und *Samotherium* wie Reliquien einer älteren Zeit hervor und auch *Mastodon*, *Dinotherium*, *Tapirus*, *Aceratherium*, *Rhinoceros*, das nur wenig von *Macrotherium* abweichende *Chalicotherium*, *Hyaemoschus*, *Cervulus*, *Steneofiber*, *Hystrix*, *Mustela* und *Sorex* halten die Continuität mit der vorhergehenden miocänen Fauna aufrecht. Schaaren eines zierlichen zebraähnlichen Pferdes (*Hipparion*), ächte Wildschweine von ansehnlicher Grösse bewohnten damals fast ganz Europa und der Reich-

thum an jagdbarem Wild übte den entsprechenden Einfluss auf die Entwickelung der Raubthiere aus. Hyänen, gewaltig bezahnte Katzen (*Machairodus*), Viverren (*Ictitherium*) und Vorläufer von Bären (*Simocyon*, *Amphicyon*, *Hyaenarctos*) haben reichliche Ueberreste überliefert und überragen an Häufigkeit die kleineren zum Theil aus dem mittleren Miocaen übernommenen Genera (*Mustela*, *Promeles*, *Promephitis*). Könnte über den tropischen Charakter dieser Fauna noch Bedenken bestehen, so würde das gesellige Vorkommen eines dem lebenden *Semnopithecus* nahe verwandten Affen, von dem bei Pikermi Dutzende von Schädeln und ganze Skelete ausgegraben wurden, allen Zweifel zerstreuen. Obwohl die Zahl der noch jetzt existirenden Geschlechter nicht viel grösser ist, als im mittleren Miocän, so trägt die obermiocäne Fauna doch ein entschieden moderneres Gewand und hat in mehreren Gruppen schon fast die Höhe der jetzigen Fauna erlangt.

Für die Beurtheilung der einstigen räumlichen Verbreitung der Säugethiere bieten die in verschiedenen Theilen von Asien gemachten Entdeckungen hohes Interesse. Aus den berühmten Fundstätten in den Sivalikhügeln am Südfuss des Himalaya zwischen Ganges und Setledge haben schon in der Mitte dieses Jahrhunderts Falconer und Cautley eine reiche Ernte eingeheimst; von den Gebrüdern Schlagintweit wurden Spuren dieser Fauna in Tibet nachgewiesen und ebenso haben die Thäler des Indus und Narbudda und die Insel Perim in Vorder-Indien, ferner Ava im Becken des Iravaddi in Hinter-Indien, Birma, Java, Sumatra, die Philippinen, China und Japan vereinzelte Ueberreste geliefert, welche für eine ausserordentlich weite Verbreitung der sivalischen Fauna im südlichen und östlichen Asien sprechen. Durch die Fundplätze in Persien (Maragha), Klein-Asien (Urmia-See, Troja) tritt sie in directen Zusammenhang mit Europa.

Die sogen. Sivalikfauna hat keinen einheitlichen Charakter und enthält offenbar Formen, die dem europäischen mitt-

leren und oberen Miocaen und älteren Pliocaen entsprechen. Eine strenge Scheidung nach geologischen Horizonten konnte bis jetzt leider nicht vorgenommen werden. Doch vermuthet Lydekker, dass einzelne Lokalitäten in Sind, Kach, auf Perim und in den Sivalikhügeln vorzugsweise ältere Typen, andere entschieden pliocäne Formen enthalten. Die ganze Fauna besteht aus nahezu 150 Arten, welche sich auf folgende Gattungen vertheilen:

Perissodactyla

Hipparion (E)
? *Hippodactylus*
Equus (E*)
? *Tapirus* (E)
Aceratherium (E)
Rhinoceros (E)
(*Atelodus*)
(*Ceratorhinus*)
Chalicotherium (E)

Artiodactyla

Anthracotherium (E)
Merycopotamus
Choeromeryx
Hemimeryx
Listriodon (E)
Hippohyus
Sus (E)
Sanitherium
Hyotherium (E)
Tetraconodon
Hippopotamus (E)
Camelus
Dorcatherium (E)
Tragulus
? *Moschus*
Palaeomeryx (E)
Cervus (E)
Camelopardalis (E)
Helladotherium (E)
Vishnutherium
Sivatherium
Hydaspitherium
Bramatherium
Alcelaphus
Tetraceras
? *Cobus*
Gazella (E)
Hippotragus
Boselaphus
Oreas
Strepsiceras
Capra
Bucapra
? *Ovis*
Leptobos (E*)
Bubalus (E*)
Bison (E*)
Bos (E*)

Proboscidia

Mastodon (E)
Dinotherium (E)
Elephas (E*)

Rodentia

Nesokia
Rhizomys
Hystrix (E)
Lepus (E)

Carnivora
(Fissipedia)

Amphicyon (E)
Canis (E*)
Hyaenarctos (E)
Ursus (E*)
Mustela (E)
Mellivora
Mellivorodon
Lutra (E)
Enhydriodon (E)
Viverra (E)
Lepthyaena
Hyaena (E)
Aeluropsis
Aelurogale
Felis (E)
Machairodus (E)

Primates

Cynocephalus
Macacus (E*)
Semnopithecus (E*)
Troglodytes
Simia

1) Die mit E bezeichneten Genera finden sich in Europa im Miocaen, die mit E* bezeichneten im Pliocaen von Europa.

Die Uebereinstimmung der sivalischen Fauna mit jener von Pikermi, Samos, Lébéron u. s. w. in Europa beschränkt sich nicht auf eine sehr grosse Anzahl gemeinsamer Gattungen, sondern erstreckt sich sogar auf die Identität mehrerer Arten. Sind auch vereinzelte auffallende Typen wie *Sivatherium*, *Vishnutherium*, *Bramatherium* bis jetzt in Europa unbekannt, so ist doch der Totalcharakter der obermiocaenen Säugethierfauna in Europa, Nord-Afrika, Klein-Asien, Süd- und Ost-Asien ein so einheitlicher, dass dies ganze ausgedehnte Gebiet in thiergeographischer Hinsicht ein einziges natürliches Reich bildet, dem sich Nord-Amerika als eine besondere Provinz mit eigenartig differenzirten Typen anschliesst. Dass die sonst in Nord-Amerika einheimischen Cameliden unvermittelt auch in Ost-Indien auftauchen, während sie in Europa fehlen, ist bemerkenswerth, da im Uebrigen Europa und Nord-Amerika engere Beziehungen aufweisen als Nord-Amerika und Ost-Asien. Für eine Anzahl Gattungen wie *Elephas*, *Bison*, *Bos*, *Bubulus*, *Leptobos*, *Equus*, *Hippopotamus*, *Canis*, *Ursus*, *Semnopithecus* und *Macacus*, die in Europa erst im Pliocaen erscheinen, dürfte Süd-Indien als Urheimath gelten, wenn eben nicht die Sivalikschichten auch stellenweise wie Lydekker annimmt, ächt pliocäne Formen enthalten.

In schroffem Gegensatz zu der über die ganze nördliche Hemisphäre verbreiteten miocänen Säugethierfauna stehen die wahrscheinlich gleichalterigen Formen der sogenannten „patagonischen Formation" in Patagonien und Uruguay. Vergleicht man nachstehende Liste der bis jetzt aus diesen Schichten bekannten Gattungen (aus welcher die Meersäugethiere wegen ihrer besonderen Verbreitungsbedingungen zu entfernen sind) mit jener aus Nord-Amerika, Asien oder Europa, so tritt der autochthon südamerikanische oder nach der Wallace'schen Terminologie „neotropische" Charakter nicht minder scharf hervor, als in der älteren Fauna von Santa Cruz.

Marsupialia

? Notictis
Apera
Cynonasua

Edentata

Gravigrada

Promegatherium
Interodon
Orthotherium
Pliomorphus
Menilaus
? Gnathopsis
Promylodon
Pseudolestodon
Lestodon
Diodomus
Sphenotherus
Ranculcus
Nephotherium
Strabosodon

Glyptodontia

Hoplophorus
Palaeohoplophorus
Protoglyptodon
Neuryurus
Lomaphorus
Pseudoeuryurus

Dasypoda

Proeuphractus
Stenotatus
Chlamydotherium
? Eutatus

Perissodactyla

Proterotheridae

Proterotherium
Brachytherium

Macrauchenidae

Scalabrinitherium
Mesorhinus
Oxyodontotherium
Macrauchenia

Toxodontia

Toxodon
? Eutomodus
Xotodon
? Stenotephanus

Typotheria

Protypotherium

Rodentia

Discolomys
Morenia
Orthomys
Myopotamus
Eucardiodon
Anchimys
Procardiotherium
Cardiotherium
Plexochoerus
Caviodon
Lagostomus
Megamys
Tetrastylus
Neoepiblema
Euphilus
Briaromys
Gyriabrus
Calpostemma
Strophostephanus
Paradoxomys
Haplostropha

Cetacea

Pontistes
Pontivaga
Pontoplanodes
Ischyrorhynchus
Balaena
Notiocetus

Sirenia

Ribodon

Die patagonische (miocäne) Säugethierfauna enthält nur Marsupialia, Edentata, Toxodontia, Typotheria, sowie Perissodactyla und Rodentia von specifisch südamerikanischem, anderwärts unbekanntem Gepräge. Sie ist eine reifere Tochter der Santa Cruz-Fauna und von jener nur durch stärkere Differenzirung der einzelnen Gattungen unterschieden. Keine Spur von fremdartiger Einmischung deutet auf einen Zusammenhang mit Nord-Amerika oder mit der nordweltlichen Fauna hin.

Pliocaen.[1])

Die pliocäne Landsäugethierfauna lebte in einer Zeit, wo Europa im Wesentlichen schon seine heutige Configuration erhalten hatte. Italien war im Anfang dieser Periode allerdings theilweise noch vom Meer überfluthet und in Belgien, Holland und Süd-England griff die Nordsee tiefer ins Land herein, als heutzutage und hinterliess die als Crag bezeichneten Ablagerungen. Auf dem ausgedehnten mitteleuropäischen Festland waren die Erhaltungsbedingungen für Säugethiere wegen Mangel an ausgedehnteren Süsswasserseen äusserst ungünstig. Nur in der Auvergne enthalten vulkanische Tuffe, im oberen Rhonethal mit Bohnerz ausgefüllte Felsspalten und vereinzelte Süsswasserablagerungen, im Rhonethal, im Rousillon und in der Gegend von Montpellier Reste der pliocänen Landfauna, die in grösserer Vollständigkeit in den limnischen, zum Theil Kohlen führenden Sedimenten des Arnothales und in den theilweise marinen Bildungen von Piemont und der Romagna überliefert wurde.

Dieselbe besteht aus folgenden Gattungen:

Perissodactyla

Tapirus
Rhinoceros
(Atelodus)
(Coelodonta)
* ***Equus***
† *Hipparion* (selten)

Artiodactyla

Sus
* ***Hippopotamus***
* ***Cervus*** *(Elaphus)*
* ***(Polycladus)***
* ***(Axis)***
* ***(Capreolus)***
* ***Alces***
* *Dama*
* ***Cervulus***
† ***Palaeoryx***
Gazella
† *Tragelaphus*
Antilope
* ***Bos***
* ***Leptobos***
Bubalus

Proboscidia

† ***Mastodon***
* ***Elephas***

Rodentia

Arctomys
† ***Steneofiber***
* ***Castor***
* *Trogontherium*
Cricetus
*† *Trilophiomys*
* ***Arvicola***
* ***Mus***
Hystrix
*† *Ruscinomys*
*† *Pellegrinia*
* *Lepus*
* *Myolagus*
* *Lagomys*

1) Die mit * bezeichneten Genera treten im Pliocaen zum ersten auf, die mit † bezeichneten erlöschen.

Insectivora	*† *Aelurus*	
Sorex	*Putorius*	**Primates**
	Lutra	* ***Semnopithecus***
Carnivora	*Viverra*	*† *Dolichopithecus*
(Fissipedia)	***Hyaena***	† *Macacus*
* *Canis*	***Machairodus***	
† *Hyaenarctos*	***Felis***	
* ***Ursus***		

Obige Tabelle zeigt, dass in Europa die alterthümlichen Gattungen *Mastodon* und *Tapirus* erlöschen, während dieselben in Nord-Amerika und Ost-Indien im Pleistocaen fortdauern. Unter den zahlreichen neu auftauchenden Gattungen scheinen einige (*Equus*, *Hippopotamus*, *Bos*, *Leptobos*, *Bubalus*, *Elephas*, *Ursus*, *Canis*) aus Asien eingewandert zu sein, und diese nebst den reichlich vorkommenden und bereits in verschiedenen Subgenera zersplitterten Hirschen verleihen der pliocänen Fauna vorzüglich ihren eigenthümlichen Charakter. Trotz ihres modernen Habitus knüpfen auch die pliocänen Formen unbedingt an ältere Vorläufer aus der Miocaenzeit an und in keiner einzigen Ordnung kann man behaupten, dass der Faden der Continuität zwischen Miocaen und Pliocaen völlig zerrissen wäre. Aber in weit höherem Maasse als früher leuchtet die Morgenröthe der Jetztzeit aus dem Bilde der pliocänen Säugethierwelt hervor. Abgesehen von einigen meist mangelhaft bekannten Vertretern der Mikrofauna fehlen der Jetztzeit von den pliocänen Gattungen nur *Hipparion*, *Mastodon*, *Hyaenarctos*, *Machairodus*, *Leptobos* und *Dolichopithecus*. Eine viel grössere Zahl von Genera haben freilich ihre europäischen Wohnsitze verlassen und sich in wärmere Regionen zurückgezogen. Das tropische Afrika und Indien sind die Zufluchtsstätten, in denen sich ein ansehnlicher Theil der pliocänen Gattungen forterhielt und im Laufe der Zeit mehr oder weniger umgestaltete. Keine ein-

1) Depéret Ch. Considérations générales sur les faunes de vertébrés pliocènes d'Europe. Ann. Sc. géol. 1885. XVII. S. 231.

zige pliocäne Art hat sich unverändert bis in die Gegenwart erhalten. Dass die pliocäne Fauna auch in Indien einen mit Europa übereinstimmenden Charakter besass, geht daraus hervor, dass die oberen Sivalikschichten und die jüngeren Ablagerungen im Kistna-, Nerbudda-, Jamna-, Godaveri- und Pemganga-Thal nicht nur dieselben Genera, sondern theilweise sogar identische oder doch nahezu identische Species enthalten.

Die im Crag von Antwerpen, Holland und Sussex, wie die in den marinen Subappeninnenschichten Italiens in grosser Häufigkeit vorkommenden Cetaceen, Pinnipedier und Sirenen nehmen eine ähnliche Mittelstellung zwischen Miocaen und Jetztzeit ein, wie die Landfauna. Sie enthalten nachstehende Genera:

Cetacea	? *Physotherium*	Sirenia
Squalodon	*Hyperoodon*	***Felsinotherium***
Eurhinodelphis	***Choneziphius***	*Halitherium*
Priscodelphinus	*Placoziphius*	
Delphinus	***Dioplodon***	
Steno	*Berardiopsis*	**Pinnipedia**
Tursiops	***Plesiocetus***	*Pristiphoca*
Orca	*Heterocetus*	*Palaeophoca*
Globicephalus	*Amphicetus*	*Mesotaria*
Physeter	*Herpetocetus*	*Callophoca*
Physeterula	*Idiocetus*	*Platyphoca*
Homocetus	*Mesocetus*	*Phocanella*
Physodon	*Isocetus*	*Gryphoca*
Scaldicetus	***Balaenoptera***	*Trichechus*
Hoplocetus	*Megaptera*	*Alachtherium*
? *Priscophyseter*	***Balaena***	
	Palaeocetus	

In Nord-Amerika werden die sogenannten Loup Fork- oder Pliohippus-Beds von Niobrara, Nebraska, Wyoming, Colorado, Kansas, Neu-Mexiko, Texas und Mexiko in der Regel zum Pliocaen gerechnet und sind vorzugsweise durch die Häufigkeit von *Mastodon*, *Aphelops*, *Hipparion*, *Plio-*

hippus, ***Protohippus***, ***Merychius***, ***Merycochoerus***, Camelidae, Nager und Raubthiere charakterisirt. Der Mangel an *Elephas*, horntragenden Wiederkäuern, Traguliden, Hirschen, Bären und Affen verleiht dieser Fauna fast eher ein miocänes, als pliocänes Gepräge und rechtfertigt die Meinung Cope's, welcher diese Schichten in's obere Miocaen stellt. Sie enthalten nachstehende Gattungen:

Perissodactyla
Hipparion (E)
Merychippus
Protohippus
Pliohippus
Equus (E)
Tapiravus
Aphelops

Artiodactyla
Merychius
Merycochoerus
Protolabis
Procamelus
Camelus
Pliauchenia
Cosoryx

Proboscidia
Mastodon (E)

Rodentia
Eucastor
Mylagaulus
Hesperomys
Palaeotagus
Punolax
? *Geomys*
? *Thomomys*

Carnivora
(Fissipedia)
Aelurodon
Canis (E)
Leptarctos
Stenogale
Mustela (E)
Brachypsalis
Lutra (E)
Pseudaelurus

Mit Europa theilen die Loup Fork-Schichten die Gattungen *Equus*, *Hipparion*, *Mastodon*, *Canis*, *Mustela*, *Lutra*, mit Süd-Asien *Camelus*. Im Ganzen entfernt sich diese Fauna etwas weiter von jener der alten Welt; die schon im unteren und mittleren Miocaen angebahnte Specialisirung von eigenartigen nordamerikanischen Formen hat sichtliche Fortschritte gemacht. Das Band zwischen den beiden Provinzen der nördlichen Hemisphäre ist lockerer geworden.

In Süd-Amerika dürfte Ameghino's araucanische Formation dem älteren europäischen Pliocaen entsprechen. Dieselbe hat am Monte Hermoso bei Bahia blanca etwa 60 Arten von Säugethieren geliefert, welche sich auf folgende Gattungen vertheilen:

Marsupialia

Didelphis

Edentata

Gravigrada

Lestodon
* ***Megatherium***
* ***Scelidotherium***
Pseudolestodon
Diodomus

Glyptodontia

* *Glyptodon*
Hoplophorus
* ***Plohophorus***
* *Panochthus*
Neuryurus
Plaxhaplus

Dasypoda

Chlamydotherium
Dasypus
* *Dasypotherium*
Proeuphractus
Eutatus

Perissodactyla

* *Tapirus* (N)
(*Antaodon*)
* *Hippidium* (N)
Macrauchenia
* ***Epitherium***

Artiodactyla

* ***Auchenia*** (N)
* *Eoauchenia* (N)
* *Paraceros* (N)

Proboscidia

* ***Mastodon*** (N)

Toxodontia

Toxodon
* *Trachythaerus*
* *Trigodon*
Xotodon

Typotheria

Protypotherium
* *Typotherium*
* *Pachyrucos*

Rodentia

* *Myopotamus*
* *Tribodon*
* ***Eumysops***
* ***Dicaelophorus***
* *Phthoramys*
* *Plataemys*
* ***Pithanotomys***
Lagostomus
Megamys
* ***Orthomyctera***
* *Microcavia*
* ***Palaeocavia***
* *Diocartherium*
* *Phugatherium*
* *Hydrochoerus*
Caviodon

Carnivora

* *Canis* (N)

Die autochthonen Beutelthiere, Edentaten, Perissodactyla, Toxodontia, Typotheria und Nager enthalten theilweise aus älteren Schichten überlieferte, theilweise neue (mit * bezeichnete) Genera, die aber fast ausnahmslos nur weitere Differenzirungsstadien älterer Typen darstellen. Aber mit dieser südweltlichen Fauna sieht man jetzt zum erstenmal eine Anzahl ganz fremdartiger Eindringlinge vermengt, die eine andere Herkunft verrathen. Die Gattungen *Tapirus*, *Hippidium*, *Auchenia*, *Eoauchenia*, *Paraceros*, *Mastodon* und *Canis* sind sicherlich nicht auf südamerikanischem Boden entstanden, sondern aus dem Norden eingewandert, wo sie entweder als identische Gattungen oder als nahe verwandte Repräsentativformen in den Loup Fork-Schichten bereits existirten. Diese Invasion von nördlichen Fremdlingen beweist,

dass erst in der Pliocänzeit die zwei Hälften des westlichen Continentes zusammenwuchsen und dass damals sogar wahrscheinlich eine breitere Landbrücke, als der heutige Isthmus von Panama Nord- und Süd-Amerika und die westindischen Inseln verband.

Aber nicht nur nordamerikanische Typen benützten die neueröffnete Bahn, um ihr Verbreitungsgebiet zu vergrössern, sondern auch die südlichen Autochthonen begannen nach Norden zu wandern und so vollzog sich am Schluss der Pliocänzeit eine der merkwürdigsten Faunenüberschiebungen, welche die Geologie zu verzeichnen hat. In Nord-Amerika repräsentiren die sogenannten Equus-Beds, im Westen und Südwesten der Vereinigten Staaten (Oregon, Californien, Idaho, Arizona, Neu-Mexiko, Wyoming, Kansas, Texas), in Mexiko und Central-Amerika und die gleichaltrigen Megalonyx-Beds im Osten (Kentucky, Pennsylvanien, Ohio, Carolina, Virginien, Florida) und West-Indien (Cuba) entweder die letzte Phase der Tertiärzeit oder den Beginn der pleistocänen Diluvialperiode. Eine seltsame Mischfauna von nordischer und südlicher Herkunft bevölkerte damals Nord-Amerika und hinterliess Reste in den genannten Ablagerungen.

Zu den nordischen Typen gehören die Gattungen *Equus*, *Hipparion*, *Tapirus*; *Dicotyles*, *Platygonus*; *Auchenia*, *Eschatius*, *Holomeniscus*, *Cariacus*, *Cervus*, *Alces*, *Bos*, *Mastodon*, *Elephas*; *Castor*, *Erethizon*, *Castoroides*, *Sciurus*, *Arctomys*, *Jaculus*, *Arvicola*, *Thomomys*, *Geomys*, *Neotoma*, *Lagomys*, *Lepus*, *Scalops*; *Procyon*, *Arctodus*, *Putorius*, *Mustela*, *Lutra*, *Mephitis*, *Canis*, *Urocyon*, *Pachycyon*, *Chrysocyon*, *Arctotherium*, *Felis*, *Machairodus*; zu den südamerikanischen *Megalonyx*, *Mylodon*, *Glyptodon*, *Chlamydotherium*, *Hydrochoerus*, *Amblyrhiza*, *Toxodon*. Mit der Entstehung der Equus- und Megalonyx-Beds in Nord-Amerika dürfte die Bildung der weitverbreiteten Löss ähnlichen Lehmablagerungen der sogenannten

Pampas-Formation

in Argentinien und Uruguay zusammenfallen. Auch die vulkanischen Tuffe in Bolivien, Peru und Chile enthalten Säugethierreste, die sich theils in den Equus-Beds von Central-Amerika, theils im Pampasschlamm wiederholen. An Formenreichthum übertrifft die Fauna der Pampasformation die gegenwärtig in Süd-Amerika existirende Säugethierfauna. Sie enthält nach Ameghino 235 Arten und 93 Gattungen. Wenn auch ein Theil der in den Listen verzeichneten Arten vor einer genaueren Prüfung kaum bestehen dürfte, so bleibt doch noch ein so grosser Rest von guten Arten und Gattungen über, dass überhaupt nur die eocänen Phosphorite und Bohnerze in Europa, die Santa Cruz-Formation von Patagonien und die Sivalikfauna in Vergleich kommen können. Unter den specifisch südamerikanischen Ordnungen erreichen die Edentaten in zahlreichen Geschlechtern von Gravigraden, Glyptodontia und Dasypoda beträchtliche Grössenverhältnisse und ebenso übertreffen die Toxodontia, Typotheria und Macraucheniden der Pampasformation die meisten ihrer Vorläufer an Grösse. Aber dieses ungemessene Wachsthum und die in der Regel damit verbundene weitgehende Specialisirung der einzelnen Organe scheint ihren Trägern verderblich geworden zu sein, denn alle die riesigen Edentaten, Toxodontia, Typotheria und Macraucheniden haben das Ende der Pampasformation nicht überlebt und mit ihnen erloschen auch die grösseren, aus dem Norden eingedrungenen Fremdlinge, wie *Mastodon*, *Machairodus*, *Equus*, *Hippidium*, *Mesolama*, *Palaeolama* u. A. Die schon während der araucanischen Periode beginnende nordische Invasion führte der südamerikanischen Fauna eine erhebliche Anzahl neuer Elemente zu, unter denen in erster Linie das Pferd, verschiedene Gattungen von Raubthieren (*Machairodus*, *Felis*, *Mephitis*, *Lutra*, *Nasua*, *Arctotherium*), ferner ein allerdings zweifelhafter Vertreter der Rhinoceriden

(*? Plicatodon*), eine beträchtliche Anzahl kleiner Nager aus der Gruppe der Myomorpha und endlich — der Mensch selbst zu nennen sind. Die Fauna der Pampasformation enthält nach Ameghino folgende Genera:

Marsupialia

Didelphys
† *Dimerodon*

Edentata

Vermilinguia

Myrmecophaga

Gravigrada

† ***Megatherium***
† *Essonodontherium*
† *Neoracanthus*
† *Ocnopus*
† *Nothrotherium*
† *Nothropus*
† ***Mylodon***
† *Pseudolestodon*
† ***Lestodon***
† *Laniodon*
† ***Scelidotherium***
† *Platyonyx*
† ***Glossotherium***

Glyptodontia

† ***Glyptodon***
† *Thoracophorus*
† ***Hoplophorus***
† *Lomaphorus*
† ***Panochthus***
† *Eleutherocercus*
† *Neuryurus*
† ***Daedicurus***
† *Plaxhaplus*
† ? *Heterodon*
† ? *Euryodon*
† *Plohophorus*

Dasypoda

Chlamydophorus
† *Dasypotherium*
† ***Chlamydotherium***
Tatusia
Eutatus
Tolypeutes
Xenurus
Cheloniscus

Perissodactyla

† ***Equus*** (N)
† ***Hippidium*** (N)
† ***Macrauchenia***
† *Diastomicodon*
Tapirus (N)
† ? *Plicatodon* (N)

Artiodactyla

Dicotyles (N)
Auchenia (N)
† *Mesolama* (N)
† *Stilauchenia* (N)
† *Palaeolama* (N)
† *Hemiauchenia* (N)
† *Protauchenia* (N)
† *Eulamops* (N)
Cervus (N)
(Furcifer) (N)
(Cariacus) (N)
(Blastoceras) (N)
(Epieuryceras) (N)
Antifer (N)
Coassus (N)

Proboscidia

† *Mastodon* (N)

Toxodontia

† ***Toxodon***
† *Dilobodon*
† ? *Eutrigonodon*

Typotheria

† ***Typotherium***
† ***Pachyrucos***

Rodentia

Hesperomys (N)
Habrothrix (N)
Oxymicterus (N)
Scapteromys (N)
Rhipidomys (N)
Nectomys (N)
Calomys (N)
Reithrodon (N)
Bothriomys (N)
Tretomys (N)
Ptyssophorus (N)
Holochilus (N)
Myopotamus
Ctenomys

---

1) Die mit † bezeichneten Gattungen sind erloschen, die mit (N) bezeichneten nordamerikanischen Ursprungs.

† *Dicaelophorus*	***Cerodon***	*Nasua* (N)
† *Plataeomys*	***Hydrochoerus***	† *Amphinasua* (N)
† *Pithanotomys*	***Lagostomus***	*Lutra*
Schizodon	*Lepus* (N)	***Mephitis*** (N)
Loncheres		*Lyncodon* (N)
Nelomys		***Felis*** (N)
Mesomys	**Carnivora**	† ***Machairodus*** (N)
Carterodon	(Fissipedia)	
Dolichotis	***Canis*** (N)	**Primates**
Cavia	† *Macrocyon* (N)	***Homo*** (N)
Microcavia	***Arctotherium*** (N)	

Vergleicht man die Fauna der Pampasformation mit der jetzt in Süd-Amerika existirenden, so fällt die starke Quote erloschener Gattungen sofort in die Augen. In dieser Hinsicht entfernt sie sich weiter von der jetzt in Süd-Amerika lebenden, als die pliocäne in Europa von ihren heutigen Nachkommen. Auf der anderen Seite begegnet man jedoch unter den fossilen Pampasthieren einer ganzen Anzahl noch jetzt lebender Arten, die im Pliocän von Europa gänzlich vermisst werden. Betrachtet man die Pampasformation mit Ameghino als Aequivalent des europäischen Pliocän, so besitzt ihre Fauna einerseits einen alterthümlicheren, andererseits einen moderneren Charakter als jene in Europa; stellt man dieselbe mit Burmeister, Steinmann u. A. ins Pleistocän, so zeichnet sie sich durch die grosse Menge erloschener Gattungen und Arten in auffälliger Weise von den diluvialen Faunen anderer Welttheile aus.

Es scheint aber, als ob auf der südlichen Hemisphäre mit einem anderen Maasstab gemessen werden müsse, als anderwärts, denn auch Australien besitzt in Knochenhöhlen und oberflächlichen, offenbar sehr jugendlichen, allgemein dem Diluvium zugeschriebenen Ablagerungen eine erloschene Fauna, die sich zur jetzt daselbst lebenden fast genau wie die Pampasfauna zur modernen südamerikanischen verhält.

Mit Ausnahme eines Hundes (Canis dingo) gehören die

pleistocänen Säugethiere Australiens zu den Monotremata und Beutelthieren und vertheilen sich auf folgende Genera:

† *Proechidna*	*Pseudochirus*	† *Triclis*
Perameles	† *Koalemus*	† *Synaptodus*
Dasyurus	† *Archizonurus*	† *Diprotodon*
Sarcophilus	† *Thylacopardus*	† *Nototherium*
Thylacinus	*Macropus*	*Phascolomys*
Bettongia	† *Sthenurus*	† *Phascolonus*
Aepyprymnus	† *Procoptodon*	
† *Thylacoleo*	† *Palorchestes*	

Auch hier zeichnen sich die fossilen erloschenen Gattungen und Arten meist durch ihre beträchtliche Grösse aus und wie die Gravigraden und Glyptodontia den heutigen Faulthieren und Gürtelthieren der Pampasschichten als Riesen gegenüber stehen, so verhalten sich die gewaltigen *Diprotodon*, *Nototherium*, *Phascolonus*, *Sthenurus*, *Procoptodon*, *Thylacoleo* u. A. zu ihren jetzt lebenden australischen Verwandten.

Herrscht somit in Nord- und Süd-Amerika und in Australien Unsicherheit über die Abgrenzung von Pliocaen und Diluvium, so steht es in Europa kaum anders; denn auch hier schiebt sich zwischen die typisch pliocäne Fauna des Val d'Arno, der Auvergne und der Gegend von Montpellier eine eigenthümliche präglaciale Mischfauna ein, deren Ueberreste am reinsten in den sogenannten Forest-Beds von Cromer in Norfolk, in den Sand- und Kiesablagerungen von Saint-Prest (Eure-et-Loire), Chagny (Saône-et-Loire), Durfort (Gard), im Sand von Leffe (Lombardei), am Janiculus bei Rom und anderen Orten Italiens begraben liegen.

Als charakteristische Arten dieses Horizontes gelten:

Equus ? Stenonis	*Hippopotamus major*
„ *caballus*	*Sus scrofa*
Rhinoceros etruscus	*Cervus Sedgwicki*
„ *Mercki*	„ *verticornis*
(Rhinoceros leptorhinus)	„ *polignacus*

Cervus euryceros
„ *elaphus*
„ *capreolus*
Antilope sp.
Gazella anglica
Bison sp.
Bos primigenius
Elephas meridionalis
„ *antiquus*
„ *? primigenius*
Castor fiber
Trogontherium Cuvieri
Sorex vulgaris
„ *moschatus*
Talpa Europaea
Canis lupus
„ *vulpes*
Ursus arvernensis
„ *spelaeus*
Hyaena sp.
Machairodus latidens

Von ächt pliocänen Arten enthält diese Fauna nur *Elephas meridionalis*, *Rhinoceros etruscus* und *Ursus Arvernensis;* ausschliesslich gehören ihr an *Cervus Sedgwicki* und *verticornis*, alle übrigen Arten finden sich auch im ächten älteren Diluvium.

Pleistocaen oder Diluvium.

Die ächte pleistocäne Fauna des europäischen Diluviums enthält etwa 110 Arten, während die jetzt in Europa lebende Fauna mit Einschluss der importirten und domestizirten Formen aus c. 150 Species besteht.[1])

Perissodactyla

Equus caballus
„ *hemionus*
„ *asinus*
† *Rhinoceros (Coelodonta) antiquitatis*
(= *R. tichorinus*)
† *Rhinoceros Mercki*
† *Elasmotherium Sibiricum*

Artiodactyla

Sus scropha ferus
† *Hippopotamus major*
† „ ***Pentlandi***
Cervus elaphus
„ *canadensis*
† „ *euryceros*
† „ *Belgrandi*
„ *capreolus*

1) In nachstehender Tabelle sind die nur aus dem Mittelmeergebiet bekannten Arten fett gedruckt, die mit † bezeichneten erloschen.

Cervus Dama
Alces palmatus
Rangifer tarandus
Capra ibex
" ***pyrenaica***
" *hircus*
Antilope rupicapra
" *Saiga*
† " *? **Maileti***
Ovis aries
† " ***tragelaphus***
Ovibos moschatus
† *Bos primigenius*
" *taurus*
† *Bison priscus*

Proboscidia

† *Elephas antiquus*
† " ***melitensis***
† " ***mnaidriensis***
† " ***Falconeri***
† " *primigenius*

Rodentia

Arctomys marmotta
" *Bobac*
Spermophilus guttatus
" *rufescens*
" *fulvus*
" *citillus*
Sciurus vulgaris
Myoxus glis
" *nitela*
Muscardinus avellanarius
Alactaga jaculus
† *Trogontherium Cuvieri*
Castor fiber
Hystrix cristata
Sminthus vagus
Mus sylvaticus
" *? musculus*
Cricetus vulgaris
Arvicola amphibius
" *glareolus*
" *nivalis*
" *ratticeps*
" *gregalis*
" *arvalis*
" *agrestis*
Myodes lemmus
" *torquatus*
Lepus timidus
" *variabilis*
" *cuniculus*
Lagomys pusillus
Myolagus Sardus

Insectivora

Talpa Europaea
Myogale moschata
" *pyrenaica*
Sorex vulgaris
" *pygmaeus*
Crocidura araneus
Crossopus fodiens
Erinaceus Europaeus

Chiroptera

Vespertilio murinus
" *mystacinus*
Vesperugo noctula
" *pipistrellus*
" *serotinus*
" *borealis*
Plecotus auritus
Rhinolophus ferrum-equinum

Carnivora

Canis lupus
(= C. spelaeus)
Canis lupus Suessii
Cuon Europaeus

† *Cuon Edwardsianus*	*Hyaena spelaea*
† ***Lycorus Nemesianus***	*(= H. crocuta var.)*
Canis vulpes	*Hyaena* ***striata***
„ *lagopus*	† *Machairodus latidens*
† „ *Mikii*	† *Felis spelaea*
† *Ursus spelaeus*	„ *? tigris*
† „ *priscus*	„ *pardus*
„ *arctos*	„ ***caffra***
Meles taxus	„ *lynx*
Gulo luscus	„ *catus*
Mustela martes	
„ *foina*	**Primates**
Putorius foetidus	
„ *vulgaris*	† *Macacus Suevicus*
„ *ermineus*	„ ***Inuus***
Lutra vulgaris	*Homo sapiens*

Mit Ausnahme von *Elephas primigenius*, *Rhinoceros antiquitatis*, *Rhinoceros Mercki* und *Cervus eurycerus* gehören die ausgestorbenen Arten dem älteren, präglacialen oder interglacialen Diluvium an. *Hippopotamus major* ist nur eine grosse Varietät des afrikanischen Flusspferdes und ebenso verhalten sich *Felis spelaea* und *Hyaena spelaea* zum Löwen und zur afrikanischen gefleckten Hyäne. Zu den präglacialen oder vielleicht besser interglacialen Ablagerungen rechnet man die älteren geschichteten Schotter, Sande und Lehme des Seine- und Sommethales von Nord-Frankreich, des Themse- und Ousethales in Süd-England; des Rhein- und Neckargebietes (Daxlanden, Mannheim, Worms, Mosbach bei Wiesbaden, Mauer bei Sinsheim, Hangenbieten im Elsass); die Kalktuffe und Sande von Cannstadt und Taubach bei Weimar; die interglacialen Braunkohlen, Schotter und Lehme von Utznach und Dürnten; die älteren geschichteten Kies- und Sandablagerungen im Rhonethal, in der Schweiz, in der schwäbisch-bayerischen Hochebene; im Wiener Becken, Ungarn, Rumänien, Süd- und Mittel-Russland; in der norddeutschen Ebene (Rixdorf), Italien und Spanien.

Als charakteristische Elemente der älteren diluvialen Fauna sind in erster Linie die schon in den Forest-Beds, bei Saint Prest, Durfort u. s. w. vorkommenden *Elephas antiquus*, *Elephas primigenius*, *Rhinoceros Mercki*, *Equus caballus*; *Trogontherium Cuvieri*, *Castor fiber*, *Sus scrofa*, *Cervus eurycerus*, *elaphus*, *capreolus*, *Bos primigenius*, *Bison priscus*, *Ursus spelaeus*, *Hyaena spelaea*, *Machairodus latidens*, *Canis lupus* und *vulpes*, sowie *Felis spelaea*, *lynx*, einige kleine Nager und Insektenfresser anzuführen. Die pliocänen Formen *Elephas meridionalis*, *Rhinoceros Etruscus* und *Ursus Arvernensis* sind erloschen oder vielmehr durch nahstehende Nachkommen ersetzt. Die ganze präglaciale und interglaciale Fauna Europa's verlangte eine reichliche Vegetation und ein gemässigtes Klima, das wahrscheinlich dem des heutigen Mittelmeergebietes entsprach, keinenfalls aber strenger war, als unser jetziges mitteleuropäisches. Nordische oder Hochgebirgsformen fehlen noch gänzlich, dagegen ist die Anwesenheit des Menschen durch das häufige Vorkommen roh behauener Feuersteinwerkzeuge vom „Chelléen-Typus" constatirt. Während diese ältere Diluvialfauna Europa und Nord-Asien bevölkerte, begann die Eiszeit und vernichtete offenbar eine Anzahl dem klimatischen Umschwung nicht anpassbare Formen wie *Hippopotamus*, *Elephas antiquus* nebst seinen Zwergrassen (*Elephas melitensis*, *mnaidriensis* und *Falconeri*), *Elasmotherium*, *Trogontherium* und *Machairodus*. Eine Invasion von kälteliebenden Landthieren, die heute theils im hohen Norden, theils in den rauhen, asiatischen Steppen oder in Hochgebirgen hausen, fand statt und mischte sich mit den überlebenden Elementen der älteren Diluvialfauna. Das Mammuth (*Elephas primigenius*) und wollhaarige Rhinoceros (*Rhinoceros antiquitatis*) erlangten jetzt erst ihre Hauptverbreitung und waren durch starke Haarentwickelung dem rauheren Klima trefflich gewachsen; auch *Rhinoceros Mercki* dauerte fort und hinter-

liess, wie die beiden anderen Arten, wohl erhaltene Cadaver im gefrorenen Boden Sibiriens. Neben ihnen gehörten Renthier (*Rangifer tarandus*) und Pferd zu den häufigsten Gestalten der glacialen Fauna und mit ihm finden sich, wenn auch seltener, der hochnordische *Ovibos moschatus*, ausserdem boreale Formen wie Lemminge (*Myodes lemmus*), Halsbandlemming (*Myodes torquatus*), *Arvicola nivalis* und *ratticeps*, Vielfrass (*Gulo luscus*), Hermelin (*Putorius ermineus*), Eisfuchs (*Canis lagopus*) und asiatische Steppenthiere wie Wildesel (*Equus hemionus*), Saiga-Antilope, Bobak, Ziesel (*Spermophilus*), Pferdespringer (*Alactaga*), Pfeifhase (*Lagomys pusillus*), Moschusspitzmaus (*Myogale moschata*) und Hochgebirgsbewohner wie Gemse, Steinbock, Murmelthier, Alpenhase (*Lepus variabilis*). Die Mehrzahl unserer jetzt in Mittel- und Nord-Europa lebenden endemischen Landsäugethiere nehmen ebenfalls Theil an der glacialen und postglacialen Fauna und alle diese Formen findet man in der Regel vermischt und zusammengeschwemmt in Felsspalten und Höhlen, welche gewissen Raubthieren (dem Höhlenbären, der Höhlenhyäne und dem Wolf) als Wohnstätte dienten. Auch der Löss enthält die mitteldiluviale Glacialfauna meist noch in voller Reinheit und ist insbesondere ausgezeichnet durch das Vorkommen von Mammuth, Rhinoceros tichorhinus, Renthier, Moschusochse, Edelhirsch, Bison und Ur.

Nach dem Abschmelzen der diluvialen Riesengletscher erhielten sich vereinzelte nordische Formen, wie Renthier, Lemming, Halsbandlemming, Vielfrass, Ziesel, Pfeifhase, Pferdespringer noch eine Zeitlang im mittleren Europa und charakterisiren den jüngeren Abschnitt (Periode der Steppenfauna Nehrings)[1]) der paläolithischen Culturstufe. Die menschlichen Niederlassungen in den Höhlen des Perigord, von Belgien, von Thayingen und Schweizerbild bei Schaff-

1) Nehring A. Ueber Tundren und Steppen der Jetzt- und Vorzeit. Berlin 1890.

hausen, die Ansiedelung im Torf von Schussenried in Oberschwaben liefern treffliche Beispiele für die Zusammensetzung der Fauna während der sogenannten Renthierperiode.[1]) Mit dem Eintritt unserer jetzigen klimatischen Verhältnisse verbreitete sich alsdann die heutige Waldfauna (Eichhörnchen- oder Auerochs-Periode) über Mittel-Europa und in dieser begann die Züchtung und Importation von Hausthieren durch den Menschen und damit eine tief greifende Umwandlung in der Zusammensetzung der thierischen Umgebung des der jüngeren Steinzeit angehörigen Menschen.[2])

Die oben geschilderte Diluvialfauna bevölkerte übrigens nicht nur Europa, sondern auch Nord- und Central-Asien. Nach Brandt[3]) fehlen in Asien allerdings einige charakteristische Formen wie Nilpferd, die Steinböcke, Gemse, Damhirsch, Höhlenbär und Wildkatze; dafür enthält die asiatische Diluvialfauna *Antilope guttorosa*, *Capra Sibirica* und *aegagrus*, *Ovis Argali*, *Moschus moschiferus*, *Siphneus Aspalax*, *Ellobius talpinus*, *Spalax typhlus*, *Sminthus vagus*, *Tamias Pallasi*, *Mustela zibellina*, *Felis tigris* und *Canis Nishneudensis*. Brandt[4]) hält Nord-Asien und überhaupt die hochnordischen Breiten für dasjenige Gebiet, wo sich während der Tertiär- und Diluvialzeit die europäische, nordasiatische und nordamerikanische Landfauna concentrirt hatte und von wo aus die Wanderungen und Vorstösse nach Süden und Westen nach Maassgabe der eintretenden Abkühlung erfolgten. Indem sich die nordische Fauna während der Diluvialzeit in

1) Nehring Alfr. Uebersicht über vierundzwanzig mitteleuropäische Quartär-Faunen. Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. 1880. S. 468.

2) Woldrich J. N. Die diluvialen Faunen Mittel-Europa's. Mitth. Anthrop. Ges. Wien. 1882. XI.

3) Brandt J. Fr. und Woldrich J. N. Diluviale europäisch-nordasiatische Säugethierfauna und ihre Beziehungen zum Menschen. Mém. Acad. imp. St. Petersb. 1887. VII. sér. XXXV. No. 10.

4) Naturgeschichte des Elens. Mém. Acad. imp. St. Petersb. XVI. S. 39—50.

südlicheren Breiten ausdehnte, nahm sie die Wohnplätze der dortigen aus der Tertiärzeit überlieferten Formen ein, drängte dieselben in subtropische und tropische Regionen und bildete den eigentlichen Stamm der Diluvialfauna.

Da nach der übereinstimmenden Angabe russischer Geologen[1]) Sibirien während der Eiszeit im Gegensatz zu Europa und Nord-Amerika zwar nicht von einer geschlossenen Decke von Inlandeis bedeckt war und auch nur Gletscher von geringer Ausdehnung besass, wohl aber eine Verschlechterung der klimatischen Verhältnisse und beträchtliche Abkühlung erlitt, so konnten sich auch dort nur die anpassungsfähigeren Elemente der präglacialen Fauna dauernd erhalten. Andere erlagen den ungünstigeren Lebensbedingungen oder wurden zur Auswanderung gezwungen. Die allmählich immer tiefer in den Boden eindringenden Fröste und die Bildung von sogenanntem Aufeis an den Flüssen schufen in Sibirien damals auch die Bedingungen zur Conservirung ganzer Leichen von Mammuth, Rhinozeros, Wisent und Moschusochsen.

Die glaciale und postglaciale Fauna in Nord-Amerika ist viel ärmer an Arten, als in Europa; überdies noch weniger untersucht und zuweilen schwer zu trennen von jener der älteren Equus-Beds. Als charakteristische Arten werden genannt *Mastodon Americanus*, *Cervus Alces*, *Cervalces Americanus*, *Rangifer tarandus*, *?Cervus Canadensis*, *Bos Americanus*, *Ovibos bombifrons*, *Canis lupus*, *Ursus ferox*, *?Felis atrox*. Bemerkenswerth ist die Abwesenheit von *Equus*, *Rhinoceros*, *Hippopotamus*, *Dicotyles*, *Sus*, *Machairodus*, *Ursus spelaeus*, *Felis spelaea*, *Hyaena spelaea*, *Bison priscus*, *Bos primigenius*, *Cervus elaphus*, *capreolus*, *eurycerus* und einer grossen Anzahl anderer in Europa und Nord-Asien häufiger Formen. Die diluviale Säugethierfauna Europa's

1) Tschersky J. D. Wissenschaftl. Ergebnisse d. Neusibirischen Expedition d. J. 1885 u. 86. IV. Posttertiäre Säugethiere. Mém. Ac. Imp. St. Petersb. 1892. XLI. S. 455, 511.

steht zur europäischen schon genau in demselben Verhältniss, wie die lebenden Faunen der beiden Continente. Identische Arten sind ausserordentlich spärlich, dagegen der Gesammtcharakter ähnlich und auf gemeinsame Abstammung hinweisend.

In Süd-Asien und Süd-Amerika folgen auf die Tertiärzeit diluviale Faunen, welche der Hauptsache nach bereits aus noch jetzt existirenden Arten zusammengesetzt sind, jedoch etwas engere Beziehungen zu ihren tertiären Vorläufern aufweisen.

Aus der ganzen Entwickelungsgeschichte der Säugethiere von der Trias an bis zur Jetztzeit erhellt trotz aller Mangelhaftigkeit der paläontologischen Ueberlieferung mit aller Bestimmtheit, dass der genetische Zusammenhang zwischen den einzelnen Faunen ungeachtet vielfacher Störungen durch geologische Ereignisse nie vollständig unterbrochen wurde und dass jede einzelne Thiergesellschaft durch allmähliche Transformation ihrer Elemente aus einer früher vorhandenen hervorgegangen ist und zugleich die Aussaat für die nächst folgenden lieferte. Einzelne der Mikrofauna angehörige Gattungen (*Didelphys*, *Sciurus*, *Myoxus*, *Sorex*) lassen sich zurückverfolgen bis ins Eocaen und haben seit ihrem erstmaligen Erscheinen wohl neue Arten hervorgebracht, aber keine nennenswerthen Umgestaltungen erlebt, wie überhaupt die polyprotodonten Marsupialier, Insektenfresser und Nager die wenigst veränderlichen Säugethiertypen darstellen. Recente Genera von ansehnlicherer Grösse tauchen vom unteren Miocaen in immer stärkerer Zahl auf und dauern theilweise bis auf den heutigen Tag fort.

Unsere ganze thierische und pflanzliche Umgebung wurzelt unbestritten in vergangenen Perioden und bei keiner Thierclasse tritt der enge Zusammenhang zwischen Urzeit und Jetztzeit schärfer zu Tage, als bei den Säugethieren.

Ueber ihre Entstehung und früheste Vertheilung in meso-

zoischer Zeit fehlen leider noch genügende Anhaltspunkte, aber die Gleichförmigkeit der aus Allotherien, polyprotodonten Beutelthieren (oder primitiven, vielleicht marsupialen Insektenfressern) bestehenden jurassischen Säugethierfaunen in Europa und Nord-Amerika, das Vorkommen einer typischen Allotheriengattung in der südafrikanischen Trias und die grosse Aehnlichkeit der obercretaceischen Genera mit ihren jurassischen Vorläufern machen es überaus wahrscheinlich, dass in der mesozoischen Periode eine einzige gleichförmige Säugethierfauna Europa (und wahrscheinlich auch Asien), Nord-Amerika und Afrika bevölkerte. Ob diesem ausgedehnten thiergeographischen Reich damals auch Australien angehörte und ob sich dorthin, wie vielfach angenommen wurde, in späterer Zeit die mesozoischen Formen zurückgezogen haben, lässt sich auf Grund der verfügbaren Dokumente nicht mit Gewissheit entscheiden. Unter allen Umständen hätten sich in diesem Falle die jetzigen australischen Landsäugethiere, wenn sie auch im Allgemeinen hinter ihren Stammesgenossen in anderen Continenten zurückgeblieben sind, sehr stark verändert und nur wenige Züge ihrer uralten Vorfahren bewahrt.

Von der Tertiärzeit an ging die Verbreitung der Landsäugethiere sicherlich von nicht mehr als drei Entwickelungsherden oder sogenannten Schöpfungscentren aus.

I. Das alterthümlichste, am frühesten von den übrigen abgetrennte, noch jetzt am schärfsten begrenzte thiergeographische Reich bildet Australien mit der Nachbarinsel Tasmanien. Trotz grosser Verschiedenheit in klimatischer und meteorologischer Hinsicht und trotz der auffallenden Differenzen in den Nahrungsbedingungen enthält dieses Reich sämmtliche jetzt existirende Monotremen und die Marsupialier mit Ausnahme der heute in Amerika, in der Tertiärzeit auch auf der ganzen nördlichen Hemisphäre verbreiteten Didelphyiden, ausserdem aber nur einige höchst wahrscheinlich in später Zeit von aussen importirte Fledermäuse, Mäuse (*Pseu-*

domys, Hydromys, Acanthomys, Hapalotis, Echiothrix) und den Dingo, eine Varietät des Haushundes. Nach A. Wallace[1]) hatte sich Australien schon am Schluss der mesozoischen Periode von den übrigen Continenten getrennt, umfasste jedoch während eines Theiles der Tertiärzeit noch Neu-Guinea, Celebes, die Salomons- und vielleicht auch die Fidschi-Inseln und besass eine beträchtliche Ausdehnung nach Süden und Westen. Noch heute finden sich auf Neu-Guinea, Celebes, Amboino und sogar Timor australische Beutler mit indischen placentalen Säugethieren vermischt. Für einen einstigen Zusammenhang mit Süd-Amerika kann das reichliche Vorkommen fossiler Beutelthiere in den Santa Cruz-Schichten von Patagonien geltend gemacht werden.

II. Das zweite, ehemals nicht minder streng als Australien abgeschlossene thiergeographische Reich ist Süd-Amerika oder Austro-Columbia.[2]) Bis in die jüngste Tertiärzeit enthält dasselbe nur Edentaten, Toxodontia, Typotheria, einige höchst eigenthümlich differenzirte Perissodactylen, hystricomorphe Nager, platyrhine Affen und Beutelthiere, die jedoch von den australischen sehr erheblich abweichen. Aus diesem Entwicklungsheerd empfing Afrika wahrscheinlich im Beginn der Tertiärzeit einige versprengte Wanderer, wie die Vorläufer von *Orycteropus* und *Manis*, die vielleicht aus gemeinsamer Wurzel mit den Typotherien hervorgegangenen Hyracoidea und einige hystricomorphe Nager. Der einstige Zusammenhang des südamerikanischen oder neotropischen Reichs mit Australien und Süd-Afrika müsste aber sicherlich schon in der älteren Tertiärzeit wieder gelöst worden sein, denn die zu gleichen Ordnungen gehörigen Formen in den drei Continenten haben hinreichend Zeit gehabt, sich in ganz eigenartiger Weise zu specialisiren. Wie am Schluss der

1) Wallace A. R. Die geographische Verbreitung der Thiere. Aus dem Englischen übersetzt von A. B. Meyer. 1876.

2) Huxley Th. Proceed. zool. Soc. London 1868. S. 316.

Tertiärzeit die südliche und nördliche Hälfte von Amerika zu einem Welttheile zusammenwuchsen und wie sich ihre beiderseitigen Faunen durcheinander schoben, ist früher (S. 181, 182) eingehender geschildert worden.

III. Das dritte und grösste thiergeographische Reich, die Arctogaea, umfasst nicht nur Europa, Asien und Afrika, sondern auch Nord-Amerika. Fehlen über die ältere Tertiärzeit bis jetzt auch noch alle paläontologischen Ueberlieferungen aus Asien und Afrika, so erwecken weder die reichhaltige mio-pliocäne Säugethierfauna Asiens, noch die spärlichen Ueberreste aus jüngeren Tertiärbildungen Afrika's, noch die Zusammensetzung der jetzt in Süd-Asien und Afrika existirenden Fauna die Vermuthung, dass neben den im älteren Tertiär von Europa und Nord-Amerika bekannten Säugethierstämmen, noch andere fremdartige in irgend einem Theile von Eurasien entstanden sein müssten. Die bis jetzt bekannten tertiären Formen aus Europa und Nord-Amerika genügen vielmehr vollständig, um die Säugethiere von Europa, Asien, Afrika und Nord-Amerika (mit Ausnahme einiger muthmasslich aus Australien und Süd-Amerika eingewanderten Formen) davon abzuleiten. Das paläarktische, nearktische, äthiopische und indische Reich von Sclater und A. R. Wallace bilden (wie schon Huxley gezeigt)[1]) für die Säugethiere ein einziges Verbreitungsgebiet, das sich freilich schon während der Tertiär- und Diluvialzeit in mehrere Provinzen spaltete. Am frühesten wurde der Zusammenhang mit Nord-Amerika gelockert und schon im Miocän und Pliocän steht die neue Welt der alten als eine selbständige thiergeographische Provinz gegenüber, die freilich nach der Eiszeit wieder einige nordische Gäste wahrscheinlich über Ost-Asien erhielt. Nach Süd-Asien und Afrika zog sich am Schluss der Tertiärzeit ein Theil der wärmeliebenden Formen, namentlich Hufthiere, Raubthiere

1) Huxley Th. Proceed. zool. Soc. London 1868. S. 314.

und Affen zurück und bevölkerte eine Provinz, welche von der Westküste Afrika's bis zum chinesischen Meer reichte und wohl auch noch die Küstengebiete des Mittelmeeres umspannte. Ceylon, die Sunda-Inseln, Philippinen und Madagascar standen in der jüngeren Tertiärzeit ohne Zweifel in Verbindung mit den benachbarten Continenten und erhielten von jenen ihren Vorrath an Landsäugethieren. Afrika und Süd-Asien besitzen noch jetzt eine Menge gemeinsamer Gattungen und enthalten strenge genommen eine einzige einheitliche Säugethierfauna, die sich wahrscheinlich erst in der Diluvialzeit soweit differenzirte, dass sie heute auf zwei selbständige Provinzen vertheilt werden kann. Gleichen Rang mit der indischen und äthiopischen Provinz behauptet Madagascar mit den Mascarenen. Die Landsäugethiere dieses kleinen Gebietes tragen unverkennbare Züge grosser und frühzeitiger Isolirung zur Schau. Abgesehen von dem Schwein und einigen kleinen, in der Regel passiv wandernden Nagern gehören die meisten Säugethiere besonderen, specifisch madagassischen Gattungen an. Die zahlreichen Lemuren erinnern an obereocäne Vorläufer aus Europa und auch die Raubthiere (Cryptoproctiden) und Insektenfresser (Centetiden) weisen auf Ahnen aus dem älteren Tertiär hin. Einheimische Hufthiere fehlen diesem Inselgebiet vollständig.

Im Gegensatz zu dieser alterthümlichen (madagassischen) Provinz besitzen Europa und Nord-Asien (das sogenannte paläarktische Gebiet) die jugendlichste Säugethierfauna. Erst im Diluvium, wahrscheinlich unter Einfluss der Eiszeit, hat sich dieselbe umgestaltet und allmählich einen von der äthiopisch-indischen abweichenden Charakter erhalten. Ob auch die jugendlichste Gestalt in der animalischen Welt, der Mensch, inmitten dieser jüngsten Fauna entstanden ist oder ob seine Wiege, wie Ameghino glaubt, in einem andern Welttheil gesucht werden muss, lässt sich vorläufig mit Sicherheit nicht entscheiden.

Das Erzvorkommen von Cinque valle bei Roncegno im Val Sugana ca. 30 km östlich von Trient.

Von F. v. Sandberger.

(*Eingelaufen 6. Mai.*)

Der Hauptgang, welcher auf eine Erstreckung von 70 m anfänglich in h. 18,10°, weiter westlich aber in h. 16 streicht und mit 75° in N einfällt, setzt mit seinen erzreicheren Partien im Olivin-Gabbro auf, bei dem Uebertritt in den Paragonitschiefer tritt allmählich Vertaubung ein. Der Olivingabbro scheint einen stehenden Stock im Paragonitschiefer zu bilden, welcher unter 30° in NO gegen ihn einfällt. An mehreren Stellen, z. B. am Stumwald und der Portella wird er von einem dem Verrucano sehr ähnlichen Conglomerate mit Brocken von Paragonitschiefer, Gabbro und Porphyr überlagert, welches wohl der Periode des Rothliegenden oder des Buntsandsteins angehört. An anderen Stellen durchbrechen ihn Porphyr und Syenit, die indess mit dem Gange nicht in Berührung kommen. Endlich lagern sich Moränen und Alluvial-Schotter auf.

Zwei von dem Sasso d'argento herabkommende Wildbäche durchbrechen den Stock, jener des Dei masi-Thales im Westen, der des Fontanelle-Thales im Osten.

Hier hat in den dreissiger Jahren dieses Jahrhunderts ein Graf Tannenberg Bergbau betrieben, wie die grossen abgebauten Räume (Alter Mann) an mehreren Stellen im

Verlaufe des Ganges klar darthun. Der Bau wurde aufgegeben, als der Bleiglanz von der damals noch werthlosen Zinkblende mehr und mehr verdrängt wurde, die aber jetzt das Hauptobject der Gewinnungs-Arbeiten bildet. Seit einigen Jahren ist der Bergbau von Herrn Renk in Wien wieder aufgenommen worden und zwar unter Leitung des Herrn J. Haberfelner in Lunz (Niederösterreich). Auf den Wunsch desselben habe ich auf Grund der von ihm eingesandten Gangkarten und zahlreicher Handstücke eine genauere Untersuchung des Ganges durchgeführt, deren Resultat ich hier mittheile. Die bergmännischen Resultate wird Herr Haberfelner anderswo veröffentlichen.

I. Die Gesteine.

Was zunächst das schiefrige Gestein betrifft, welches den eruptiven Stock rings umgibt, so besitzt es eine sehr gleichmässige Beschaffenheit, die sich nur an der Grenze gegen diesen etwas verändert. Es zeigt im frischen Zustande dünnschiefrige Structur und bräunliche Färbung, welche durch die sogleich zu erwähnenden Uebergemengtheile bedingt wird. Der Glimmer desselben erweist sich bei der chemischen Untersuchung sofort als Natronglimmer (Paragonit) von weisser bis gelblichweisser Farbe, in welchem aber grosse Mengen von kleinstrahligem braunem Turmalin und Körner von Titaneisen eingewachsen sind. In dem Schlämmrückstande fanden sich keine weiteren Mineralien, namentlich kein Zirkon.

Häufig durchziehen mit der Schieferung verlaufende Quarzschnüre das Gestein, in dem westlichen Grubenfelde kommen in gleicher Art auch andere harte Zwischenlagen vor. Dieselben sind weiss, feinkörnig, von splitterigem Bruche und also adinolähnlich. Sie schmelzen vor dem Löthrohr schwer und unter gelber Färbung der Flamme zu lichtem Glase. Wo diese feldspathigen Zwischenlagen häufig werden, nimmt das Gestein einen gneissartigen Charakter an.

Die qualitative chemische Untersuchung von ganz frischem, von Schwefelmetallen völlig freiem Schiefer ergab relativ viel Arsen, Zinn, etwas Antimon, Thonerde, Eisenoxydul, Nickeloxydul und wenig Kobalt, sehr wenig Magnesia, Kalk und Kali, aber viel Natron und etwas Wasser.

Die zweite, sehr gleichmässig in dem ganzen Stocke auftretende Felsart ist ein kleinkörniger Olivin-Gabbro von 2,728 spec. Gew. Er besteht aus einem weissen Feldspath, mit welchem ein schwärzliches, niemals deutlich von Flächen umgrenztes Mineral derart gemengt erscheint, dass das ganze Gestein eine schmutzig graue Farbe zeigt. Ein dritter Bestandtheil wird erst in den Schliffen erkennbar.

Das schwärzliche Mineral erscheint im Schliffe schön lauchgrün, zeigt zuweilen noch Spaltbarkeit parallel einem Flächenpaare ($\infty \breve{P} \infty$), wie der Chrysolith, ist aber wasserhaltig und meist vollkommen in Serpentin umgewandelt. Von Salzsäure wird es vollständig zersetzt. Die apfelgrüne Lösung enthält ausser Magnesia und Eisenoxydul viel Nickel, Zink, Blei und etwas Arsen, während Antimon, Kupfer, Kobalt und Wolfram nur in Spuren vorhanden sind. Letzteres lässt sich durch die schöne von Mallet[1]) angegebene Reaction sofort nachweisen.

Der Serpentin ist also Umwandlungsproduct einer bisher noch nicht beobachteten Varietät der Chrysolith-Gruppe, welche sich durch ihren Zinkgehalt zunächst an den Tephroit aus New-Jersey anschliesst. Nickeloxydul, gewöhnlich von einer kleinen Menge Kobalt begleitet, ist in Chrysolithen längst bekannt, beträgt aber nicht über ½ Proc., während in dem vorliegenden Minerale jedenfalls mehr, vielleicht 3 bis 4 Proc. enthalten sein werden.[2])

1) Chim. News XXXI. p. 276 i. A. Fresenius Zeitschrift f. analyt. Chemie Bd. XVI. S. 274.

2) Der Crysolith aus den Olivingabbros von Skye und Mull enthält ebenfalls Nickel und Zink, sowie Blei und Arsen in geringer Menge. (Zusatz während des Drucks.)

Wie oben erwähnt, lässt aber der Gesteinsschliff noch ein drittes Mineral als weiteren, wenngleich untergeordnet auftretenden Bestandtheil des Gesteins erkennen. Dasselbe tritt in gelblichen faserigen Aggregaten auf, welche auf das Genaueste mit dem Schillerspath von der Baste am Harze übereinstimmen. Es ist also ursprünglich Enstatit neben Olivin und Feldspath vorhanden gewesen und damit erscheint der Name Olivin-Gabbro für das Gestein vollständig gerechtfertigt.

Der zweite, öfter überwiegende Haupt-Bestandtheil ist ein Feldspath und zwar farbloser bis weisser Kalknatron-Feldspath, welcher von Salzsäure unter Ausscheidung von Kalk zwar angegriffen, aber nicht zersetzt wird. Er enthält ausser diesem überwiegend Natron, aber auch ein wenig Kali. Man wird ihn wohl für Oligoklas-Albit (Descloizeaux) halten müssen. So deutliche Spaltungsflächen er aber auch zeigt, so ist doch selbst im polarisirten Lichte keine Viellingsstreifung an ihm zu entdecken. Das ist zwar auffallend, aber doch schon öfter beobachtet worden.[1])

Accessorisch finden sich im Gestein von Cinque valle noch farbloser Apatit in wasserhellen im Feldspath eingewachsenen Körnern und sehr kleine Magnetkies-Körnchen, welche sich schon durch den Magneten und durch die Schwefelwasserstoff-Entwickelung bei Einwirkung von Salzsäure zu erkennen geben. Hier und da ist auch ein oft schon in matte weisse Titanit-Substanz umgewandeltes Blättchen von Titaneisen sichtbar. In dem Schlämmrückstande finden sich, aber nicht reichlich, schön ausgebildete Zirkone.

Das Pulver scheinbar sehr frischer Varietäten braust schon etwas mit Salzsäure, was von bereits auf Kosten des

---

1) Z. B. an dem Oligoklase von Grünmorsbach u. a. O. bei Aschaffenburg, am Anorthit des Olivin-Gabbro's der Baste (Streng Jahrb. f. Min. 1862 S. 523) u. s. w.

Feldspaths gebildetem kohlensauren Kalke herrührt. In einem späteren Stadium der Zersetzung durchziehen Schnürchen von Quarz, Kalkspath und schliesslich auch von Mesitinspath von geringer Breite das Gestein.

Wie immer habe ich auch diesmal das Gesteins-Pulver längere Zeit mit destillirtem Wasser ausgelaugt und in der Lösung sehr deutliche Reactionen auf Kalk, Natron und Schwefelsäure, aber nur sehr schwache auf Chlor erhalten. Es liegt daher ein kleiner Gehalt an fertig gebildetem Gyps, schwefelsaurem Natron und Chlornatrium vor.

Was nun die Vergleichung mit sonstigen Olivin-Gabbro's betrifft, so besteht jedenfalls eine nicht unbedeutende Aehnlichkeit mit jenen von den schottischen Inseln Skye und Mull,[1]) aber das Gestein von Cinque valle ist von weit höherem Alter als diese, wie seine Lagerung unter dem sog. Verrucano bestimmt beweist. Es zeigt aber auch eine gewisse Analogie mit dem älteren „Forellenstein" von Neurode in Schlesien.[2]) Der Feldspath des letzteren ist freilich kein Oligoklas, sondern Anorthit, während der aus Chrysolith entstandene Serpentin auch viel Nickel nebst etwas Kobalt, Zink, Kupfer und ein wenig Zinn enthält. Der reichlich eingewachsene Chromeisenstein fehlt unserem Gestein.

Die Art der Verwitterung des letzteren ist sehr charakteristisch und verläuft ganz so, wie sie von Knapp[3]) an gewissen Doleriten der Breitfirst nachgewiesen worden ist.

An einer Menge von Stellen erscheint neben dem Gange sowohl am Liegenden als am Hangenden ein weisses Gestein von der Structur des frischen Gabbro's, welches aber fast nur noch aus Feldspath besteht, in dem vereinzelt schwärz-

---

1) Zirkel. Zeitschrift d. deutschen geolog. Gesellschaft XXIII. S. 58 ff.

2) Streng. Jahrb. f. Min. 1864. S. 257 ff.

3) Die doleritischen Gesteine des Frauenbergs bei Schlüchtern. Inaug.-Diss. Würzburg 1880. S. 19 f.

lich grüne Flecken, vermuthlich Reste des Serpentins, resp. Chrysoliths, auftreten, die schliesslich in ein schmutzig gelbes Pulver zerfallen. Dafür aber sind die Klüfte solcher ausgelaugter Massen zuweilen von hoch nickelhaltigem Kobalt-Manganerze und etwas nickel- und zinkhaltigem Brauneisenstein überzogen. In diesen secundären Körpern erkennt man leicht ausgelaugte Bestandtheile des Gesteins, welche in Folge höherer Oxydation der betreffenden Oxydule wieder auf den offenen Klüften niedergeschlagen worden sind. Besonders auffallend sah ich diess an einem Handstücke, welches dem östlichen Theile des Ganges entnommen war.

II. Der Gang.

Herr Haberfelner theilt mir über das Verhalten desselben genauere Daten mit, die ich wörtlich folgen lasse.

„Die Hauptausfüllung des Ganges, welcher in seiner Mächtigkeit innerhalb der der Beobachtung zugänglichen Erstreckung von 70 m zwischen 1 und 3,5 m wechselt, ist wesentlich Zinkblende, verwachsen mit Bleiglanz und der Gangart Quarz. Schon die Alten müssen aus dem Gange den Bleiglanz seines Silbergehaltes wegen gewonnen haben, worauf der Name Sasso d'argento hindeutet, und in der That findet man drei Stellen, wo der alte Mann umgegangen ist. Wahrscheinlich waren es da reichere Erzfälle von Bleiglanz, die mit Zinkblende wechselten und gewonnen worden sind. Das Vorherrschen der Zinkblende — der Alten Feind —, welche derben Bleiglanz von allen Seiten einschloss oder mit demselben stark verwachsen erschien, dürfte die Veranlassung gewesen sein, dass der Alte die Baue verlassen hat, was auch in dem späteren Versuch, welcher unter Graf Tannenberg vor ungefähr 60 Jahren gemacht wurde, seine Bestätigung gefunden hatte."

„Die neuesten Arbeiten, welche auf dieses Vorkommen im August des Vorjahres wieder aufgenommen wurden und

hauptsächlich der Gewinnung der Zinkblende gelten, hatten vorerst den Zweck, den Schutt, welcher den Gang überall dort, wo die Alten über Tag und in geringer Teufe raubten, wegzuräumen, um den Gang bloszulegen."

„Am westlichen Abraumorte zeigte sich der Gang von der Sohle bis am Tag in der Höhe von 8 m mit massiger Verwachsung von Zinkblende mit Bleiglanz und Quarz in der Mächtigkeit von 2,5 m mit einer Quarzlage von 10 cm im Hangenden und 90 cm Quarzkrusten, zu Theil als Chalcedon erscheinend, im Liegenden ausgefüllt. Das Gewicht eines M^3 dieser massig verwachsenen Erze beträgt 43,3 Mztr. und betragen dieselben $^2/_3$ der Masse mit nur $^1/_3$ Quarz."

„Das unmittelbar Hangende ist zerklüftet, aber wenig der Zersetzung unterworfen und sind diese kleinen Trümmer meist mit Zinkblende, Bleiglanz, Flussspath und Quarz ausgefüllt, gehen aber nicht weit in das Hangende hinaus. Das unmittelbar Liegende ist gleichfalls Gabbro, mehr zerklüftet und zersetzt als im Hangenden, ohne auch hier vom Gange weg tiefer hinein der Zersetzung unterworfen zu sein. Die Klüfte sind hier ganz erzleer. Von diesem westlichen Abraumorte bis zum Bache Val dei masi und von da 8 m weiter sind die Erze des Ganges von den Alten entnommen worden. Letztere lenkten sich, der massigen Erzwand ausweichend, ins mürbe Hangend, teuften ab und trieben gegen Westen vor. Gleich oberhalb, wo der Bach den Gang durchschneidet, kommt ein Gangtrum aus Quarz mit etwas Zinkblende und Bleiglanz zu dem Hauptgange herein, welches wahrscheinlich diesem einen Bleiadel zuführte."

„An der Stelle, wo nach 18 m alter Arbeit der Gang über Tag wieder sichtbar wird, zeigt er im senkrechten Querschnitt folgende Ausfüllung:

5 cm körnig gestreifter Quarz von röthlicher Farbe;
15 „ Zinkblende und Bleiglanz, verwachsen mit Quarz und Chalcedon;
14 „ unregelmässig gestreifter Quarz, auch die darin eingeschlossenen Erze bilden unregelmässige Streifen;
15 „ derselbe Quarz mit gröberen, reicheren Erzeinschlüssen;
10 „ Quarz mit kleinen Erzpartien;
10 „ Erze in reicherer Menge mit Quarz verwachsen;
7 „ Chalcedonlage;
10 „ Erze in reicherer Menge mit Quarz verwachsen;
20 „ erzleerer, gestreifter, körniger Quarz;

1,06 m Gesammtmächtigkeit.

Das Hangende und Liegende bildet etwas zerklüfteter Gabbro."

„Von dieser im Querschnitte sichtbaren Stelle des Ganges um 25 m weiter gegen Ost hat der alte Mann 4 m links vom Bache Fontanelle den Gang quer durchhauen, ist auf 6 m in die Teufe gestiegen und ca. auf 100 m gegen Osten auslenkend, den Bleiglanz abbauend vorgedrungen; gegen West, wo ein Theil gegen Süd verworfen oder vorgebrochen ist, entnahm der Alte die Erze bis auf 12 m Länge dem Gange bis über Tag und liess ihn dann wieder wandab stehen. Die Ausfüllung zeigt sich hier vom Hangenden ausgehend folgendermassen:

12 cm körniger Quarz;
10 „ verwachsene Erze mit Quarz; letzterer Schwerspathumhüllungsformen zeigend;
25 „ Quarz, beiderseits Derberze;
35 „ erzleerer Quarz;
15 „ mit Quarz verwachsene Erze;
7 „ Quarzkrusten;

1,04 m Gesammtmächtigkeit.

Das Hangende und Liegende ist zerklüftet, letzteres am Salband stark zersetzt."

„An der durchhauenen Stelle neben dem Bache Fontanelle zur rechten Seite ergibt sich nachstehendes Bild:

5 cm Quarz;

10 „ Quarz mit Wolfram, Zinkblende und Bleiglanz stark verwachsen;

5 „ Strate, stark zersetztes Nebengestein, talkig aussehend, von blassgelber Farbe;

20 „ Zinkblende mit Bleiglanz und etwas Kupferkies verwachsen, 8 cm Derberze bildend, dann allmählich mit Quarz verwachsen ärmer werdend;

40 „ mächtige Lage, in welcher das Erz bis Wallnussgrösse vom mürben Quarz eingeschlossen und in dessen Zellen ein weisses kaolinartiges Mineral eingelagert ist. In dieser Lage war mithin noch ein anderes Mineral als Begleiter, das ausgelaugt wurde und das weiche Mineral als Rückstand hinterlassen hat. In Drusenräumen fanden sich nebst Zinkblende auch 2,5 cm grosse Bleiglanzkrystalle, welche aber bereits von den lösenden Wässern angegriffen erscheinen;

90 „ tauber Quarz, gegen Osten bald wieder Erze aufnehmend;

1,70 m Gesammtmächtigkeit.

Das Hangende und Liegende ist hier stark zersetzt und setzt im Hangenden ein derartiges Trumm aus dem frischen Gabbro in den Gang herein."

„Im Bachbett des Fontanelle findet in der Hangendquarzlage sowohl eine Ein- als auch Ausbauchung statt, in welcher derber Bleiglanz mit 0,11 Proc. Silbergehalt von Quarz eingeschlossen erscheint. Rechts vom Bache, wohin sich diese Lage nach Osten zieht, begann der Alte seine

Arbeit wieder, über Tag, dem Gange seine Erze entnehmend und wendete sich nach 10 m, wo der Gabbro als Hangendes plötzlich verschwindet und Paragonit, in den unteren Lagen noch erzführend, dann allmählich vertaubend zum unmittelbaren Hangenden wird, quer vom Gange ab ins Hangende. Wie weit er hier vorgedrungen ist und was ihn hiezu veranlasste, darüber lässt sich noch nichts Bestimmtes sagen, da noch zu viel Schuttmassen in seiner Arbeit liegen und sie bedecken, um Beobachtungen machen zu können. Hier lenkt der Gang auch stark nach Süd ab. Stark zersetztes Liegendes, ganz durchschwärmt mit kleinen Erztrümern, schiebt sich als Sattel in den Gang. Derselbe war hier gleichfalls von den Alten von der Sohle bis am Tag auf 8 m als senkrechte Wand stehen gelassen. Das Bild zeigt nachfolgende Lagen:

40 cm Paragonitschiefer mit kleinen Quarzknauern und armen Erzeinschlüssen;
60 „ reichere Erzeinschlüsse in den Quarzknauern;
65 „ Quarz mit Schleifereinschlüssen, sporadisch auch Pyrit, Bleiglanz und Zinkblende;
25 „ Zinkblende mit Bleiglanz verwachsen, nahezu Derberze;
50 „ Quarz mit Schieferstücken und unregelmässigen Einschlüssen von Bleiglanz und Zinkblende an den Blättern und Pyrit in der Mitte;
25 „ talkartiger Schiefer; neu aufgeschossen wurde die
45 „ mächtige Lage von Bleiglanz und Zinkblende in lagenartiger Antheilung zum Theil Derberze bildend und in unregelmässigen Zwischenlagen Flussspath und Quarz mit sich führend;
20 „ Butzen eines stark zersetzten dunklen Schiefers mit Arsenkies; Gabbro als unmittelbar Liegendes.“

„Der vom westlichen Abraumorte um 20 m höher und 30 m weiter gegen West angelegte Stollen setzt in der dort schon den Paragonitschiefer durchsetzenden tauben Quarz-

gangmasse an. Das Hangende und Liegende bilden stark zersetzte Schiefer. Der Quarz ist löcherig, zellig und brüchig, mit Brauneisensteinmulm überzogen oder theilweise damit in den Zellen ausgefüllt. Die Auslaugung der Erze zeigt sich hier in der untrüglichsten Weise, noch unter unseren Augen vor sich gehend. Auch die lösenden Wässer nehmen noch sichtbar in diesem Quarzgerippe rieselnd, von Westen her ihren Weg der Tiefe zu. Nur hie und da steckt ein Knollen Bleiglanz von einer zerfressenen Kruste und Bleimulm umgeben im Quarzgerippe. Zinkblende und Bleiglanz in kleineren Einschlüssen finden sich nur im Chalcedon, der weniger von den lösenden Wässern angegriffen wird, eingeschlossen. Die Erze bilden meist den Kern im knolligen Chalcedon, der concentrisch gebändert dieselben umgibt."

„Dieses Verhältniss zeigt sich unverändert in der ganzen Länge (13 m) des Stollens, nur war in der nach 12 m versuchten Verquerung das unmittelbar Hangende schon Gabbro, das Liegende noch Paragonitschiefer."

„Verfolgt man nun durch die ganze, offen zu Tage liegende Strecke den Gang, so lässt sich demselben ein einheitlicher Charakter nicht zuerkennen; ein Wechsel desselben ist unverkennbar und wird erst im Weiterfortschreiten der Baue mehr Klarheit über die Art der Erzfüllung zu finden sein. Die Erzausfüllung des Ganges im westlichen Abraumorte ist eine gleichförmig-massig verwachsene. Die Erzantheilung und die Gangquarzart werden gegen Osten hin successive lagenartig, welcher Charakter am östlichen Abraumorte sehr deutlich sich ausprägt und eine Neugestaltung des Ganges mit sich bringt. Von den acht Lagen der Neugestaltung sind drei aus der früheren Charakteristik in die Mitte übergegangen. Drei Lagen vom Hangenden und zwei vom Liegenden treten als ganz fremdartig zur bisherigen Gangausfüllung auf. Im Hangenden ein allmählicher Uebergang in den Schiefer, am Liegenden das Fehlen der Quarzkrusten,

Vorherrschen des Quarzes in der Mitte, Hinzutreten des Flussspathes in der untersten Erzlage, deutliche, leicht sich von einander trennende Lagen und Fehlen des Salbandes im Hangenden gehören zur Neucharakteristik des Ganges. 7 m von dieser Neugestalt führt auch die übergetretene vierte Erzlage Wolfram. Wolfram kommt demnach sowohl in der hangenden, als auch liegenden Erzlage, jedoch nicht unter ein und demselben Querschnitte vor. Die so verschieden der Beobachtung zugängliche Erzantheilung in der Gangausfüllung beträgt bis zum östlichen Abraumorte 30 Proc. im Durchschnitt genommen und 70 Proc. die Gangart Quarz, worunter die ärmeren Pocherze an 10 Proc., die reicheren 30 Proc. Erze enthalten. Derberze stehen verhältnissmässig wenig an. Die Ausfüllung ist eine durchaus geschlossene. Drusen sind kaum vorhanden. Das Vorkommen kann demnach als ein sehr schönes und reiches bezeichnet werden."

Ausser dem Hauptgange treten im Osten des Grubenfeldes noch zwei andere, aber fast ganz taube quarzige Erzlagerstätten auf.

III. Näheres über Gangarten und Erze.

1. Quarz. Derber weisser Quarz bildet die herrschende Gangart, in welcher die Erze eingewachsen sind, während die Zersetzungsproducte in Drusen desselben aufgewachsen erscheinen. Nur selten zeigen sich in Höhlungen Krystalle ∞ R. $\pm$ R. meist klein und mit verkürzten Säulenflächen. Nur einmal und zwar im östlichen Theile des Ganges wurden sehr dünne weisse Tafeln beobachtet, welche sich unter verschiedenen Winkeln kreuzen und nur Pseudomorphosen nach Schwerspath sein können, der übrigens im frischen Zustande noch nicht auf dem Gange nachgewiesen worden ist. An vielen Stellen ist der Quarz mit unregelmässigen Hohlräumen erfüllt, die ihm fast ein bienrosiges Aussehen verleihen, wie besonders im Oberbau, wo solche Quarzgerippe,

wie sie Herr Haberfelner bezeichnend nennt, vom Tage bis zu 13 m Entfernung vom Mundloche in dem Stollen vorkommen. Diese Höhlungen, welche zuweilen noch ein hell röthlich braunes Pulver enthalten, rühren zweifellos von ausgewitterter Zinkblende her. Viel seltener als in derben structurlosen Massen findet sich der Quarz in deutliche Lagen gesondert, wie an mehreren Stellen im östlichen Theile des Ganges. Würfelförmige Hohlräume von oft beträchtlichen Dimensionen werden wohl von ausgewittertem Flussspath herherrühren; in solchen sitzen nicht selten kleine Gruppen von jüngerem Bleiglanz.

2. Zinkblende. Lichtbraun und zuweilen in Drusen in erbsengrossen Krystallen ∞ O. $\frac{O}{2}$, selten auch mit $\frac{3\,O\,3}{2}$ combinirt und in Zwillingen dieser Form, meist aber in kleinkörnigen Aggregaten in Quarz eingewachsen. Die Zinkblende enthält ausser Schwefelzink auch Schwefeleisen, sowie kleine Mengen von Cadmium, Zinn[1]) und Kupfer und ist das verbreitetste Erz auf der ganzen Erstreckung des Ganges, welches hier und da auch in derben Massen einbricht. Auffallender Weise hat sich bis jetzt weder kohlensaures noch kieselsaures Zinkoxyd als Zersetzungs-Product der Blende gefunden.

3. Bleiglanz. Hält sich gern an die Nähe des Paragonitschiefers im östlichen Theile des Ganges, fehlt aber in dem westlichen nicht gänzlich. Krystalle ∞ O ∞ . O, seltener O allein oder grossblätterige Massen kommen nur selten vor, der Bleiglanz tritt vielmehr meist feinkörnig auf und bildet zuweilen Gemenge mit feinkörniger Zinkblende. Ausser Blei und Schwefel enthält der Bleiglanz stets eine kleine Menge Antimon. Was den Silbergehalt betrifft, so wurde derselbe bald niedriger, zu 0,125 Proc., bald höher, z. B. im

1) Wie viele andere ältere Zinkblenden. Sandberger Jahrb. f. Min. 1880 I S. 255 f.

reinen grossblätterigen vom Oberbau, zu 0,60 Proc. bestimmt. Als Zersetzungs-Producte sind nur Bleivitriol in weissen mehlartigen Ueberzügen und in kleinen auf Quarz aufgewachsenen Krystallen, sowie Weissbleierz und Molybdänbleierz bekannt. S. diese.

4. Arsenikkies in höchstens 1 mm breiten stark glänzenden Krystallen ∞ P. $^1/_4$ $\breve{P}$ ∞ findet sich in Quarz eingewachsen nur in geringer Menge im östlichen Theile des Ganges. Er ist nicht unbedeutend nickelhaltig, aber frei von Kobalt. Die Menge des Nickels dürfte indessen nicht so gross sein, als in dem Nickel-Arsenikkies von Neusorg im Fichtelgebirge (4,38 Proc.), welchen ich[1]) s. Z. beschrieben habe.

5. Arsennickeleisen. Neben Arsenikkies und Eisenkies erscheint auf dem östlichen Theile des Ganges noch ein neues Mineral in kleinen langgestreckten rhombischen Säulchen von lichtgrauer Farbe in Menge eingewachsen. Als es isolirt wurde, ergab es sich als ein Arsennickeleisen, welches dem Arsenkobalteisen (Safflorit Breithaupt, Spathiopyrit Sandberger)[2]) vollständig parallel steht. Im Glührohre gibt dasselbe einen breiten Arsenspiegel, dem nur an der oberen Grenze ein schwaches Sublimat von Schwefelarsen vorgelagert ist. Die apfelgrüne Lösung enthält neben Eisen sehr viel Nickel und wenig Kobalt. Das Mineral steht demnach in der Mitte zwischen Arseneisen und Weissnickelkiess und wird am besten mit obigem Namen bezeichnet. Nach Angabe des Herrn Haberfelner wurde darin auch 0,002 Proc. Silber gefunden.

6. Eisenkies. Mit Bleiglanz in weissem Quarze in stark gefurchten Pentagonaldodecaëdern eingewachsen, im östlichen Theile des Ganges, nicht häufig.

---

1) Jahrb. f. Min. 1890, Bd. I, S. 99 f.

2) Sandberger Untersuchungen über Erzgänge II. S. 582 ff.

7. Kupferkies. Sehr selten in schmalen Schnürchen mit Bleiglanz verwachsen in weissem Quarze oder krystallisirt auf Zinkblende im östlichen Theile des Ganges. Ist oft schon oberflächlich in schwarzblauen Kupferindig umgewandelt. Nur einmal habe ich einen auf Zinkblende aufsitzenden Krystall $\left(\frac{P}{2}\right)$ gesehen.

8. Molybdänglanz, von Herrn Haberfelner brieflich erwähnt, ist mir nicht in einem Handstücke zugekommen.

9. Wolfram. In zollbreiten derben Massen von deutlicher Spaltbarkeit oder in groben Körnern und Schnüren meist in der Nähe von Zinkblende in weissem Quarze aus dem östlichen Theile des Ganges. Scheint die gewöhnliche Zusammensetzung des Minerals zu besitzen, d. h. keinen Ueberschuss von Manganoxydul gegen Eisenoxydul zu enthalten. Einmal habe ich an einem Stücke auch Zersetzung und Ausfüllung der durch dieselbe entstandenen Hohlräume durch Scheelit in gleicher Weise beobachtet, wie diess schon länger von Zinnwald bekannt ist.

10. Flussspath. In graulichweissen Würfelchen als sehr junge Bildung auf zersetzter Zinkblende. Aelterer Flussspath kommt mit Bleiglanz verwachsen oder in weissen derben Massen im östlichen, mit Quarz und Zinkblende reichlicher im westlichen Theile des Ganges vor.

11. Mesitinspath. Bedeckt in vielen hundert fast rein weissen linsenförmig abgerundeten Rhomboëdern, welche ganz mit den viel grösseren von Traversella übereinstimmen, öfter mit Bleiglanz verwachsen, Klüfte im Quarze des östlichen Theiles des Ganges. Das Mineral enthält als vorwiegenden Bestandtheil kohlensaures Eisenoxydul und Magnesia, dann etwas Manganoxydul und wenig Zinkoxyd, aber fast keinen Kalk, ist daher ein schwach zinkhaltiger Mesitinspath, welcher bisher noch nicht beobachtet war.

12. Eisenspath, nur im östlichen Theile des Ganges stellenweise häufig und ziemlich reich an Kalk.

13. Dolomit. Kommt in weissen trüben Rhomboëdern sehr selten in Drusen des östlichen Gangtheils vor und enthält ausser kohlensaurer Magnesia auch etwas Eisen und viel kohlensauren Kalk. Das Mineral wird in Folge dessen schon von kalter Salzsäure unter Brausen aufgelöst.

14. Bleivitriol ist in kleinen, meist trüben und stark verzerrten Krystallen, an denen man nur die Flächen $\infty \breve{P} \infty$, ∞P und $\bar{P} \infty$ erkennen kann, auf Quarz aufgewachsen nur sehr selten vorgekommen. Ganz klare Krystalle zeigen die Combination $\infty P . \bar{P} \infty$.

15. Weissbleierz. Ist häufig, findet sich aber nur selten unmittelbar auf zersetztem Bleiglanz, dagegen öfter auf Quarz im östlichen Theile des Ganges. In der Richtung der Brachydiagonale stark verlängerte Krystalle $\infty \breve{P} \infty . \breve{P} \infty . P . oP$ herrschen vor; auch Zwillinge nach ∞P sind nicht ungewöhnlich. Schwarzbleierz d. h. durch erdigen Bleiglanz gefärbtes Erz habe ich nur einmal gesehen.

16. Molybdänbleierz sehr selten in stecknadelkopfgrossen orangegelben Kryställchen auf Mesitinspath.

17. Scheelit. In kleinen weissen oder bräunlichen Pyramiden (P). Tritt in Drusen von weissem Quarz, welcher derbe Zinkblende überdeckt, selten im östlichen Theile des Ganges auf.

18. Malachit in erdigen Ueberzügen sehr selten auf zersetztem Kupferkiese.

19. Kupferlasur in kleinen kugeligen Aggregaten ebenfalls sehr selten.

20. Pissophan, d. h. amorphes schwefelsaures Eisenoxydhydrat, etwas nickelhaltig, ist sehr selten, vermuthlich Zersetzungsproduct von Eisenkies.

21. Kobaltmanganerz kommt unter Brauneisenstein zuweilen auf Klüften von stark ausgelaugtem Gabbro vor.

IV. Art der Ausfüllung des Ganges.

Das stark zersetzte resp. ausgelaugte Gestein bildet sowohl in dem abgebauten und angeblich sehr erzreichen Theile des Ganges als auch an anderen Stellen desselben Liegendes oder sowohl Liegendes als Hangendes. Da es keinerlei Schwermetalle mehr enthält, so sind diese zur Ausfüllung des Ganges verwendet worden und zwar in folgender Weise. Die Silicate von Zink und Blei wurden zunächst als solche ausgelaugt und von Schwefelnatrium und Schwefelcalcium als Schwefelmetalle niedergeschlagen. Die Lösungen entstanden aus schwefelsaurem Natron und Gyps, deren Vorkommen in dem Gabbro oben erwähnt wurde, und welche durch die noch jetzt stellenweise im Gange nachweisbare organische Substanz reducirt worden waren. Die abgeschiedene Kieselsäure bildet die grossen Mengen von Quarz, welche die Erze begleiten. Die Wolframsäure wird wohl dem Gange aus dem Gabbro in alkalischer Lösung zugeführt und durch Eisen- und Manganlösungen gefüllt worden sein. Dass Arsenikverbindungen nur im östlichen Theile und in der Nähe des Paragonitschiefers vorkommen, erklärt sich aus dessen Arsengehalt leicht und vollständig. Nickel ist ja neben Eisen sowohl in dem Schiefer als dem Gabbro vorhanden. Kupfer- und Eisenkies spielen nur eine ganz untergeordnete Rolle.

Die relativ geringen Mengen von Eisenspath fallen auf, ebenso die schwache Vertretung stärker kalkhaltiger Verbindungen, welche nur durch den seltenen Dolomit und Flussspath vertreten sind. Der Mesitinspath gehört zu den nur in schmalen Klüftchen der Haupt-Gangmasse vorkommenden Seltenheiten und ist hauptsächlich darum interessant, weil er am reichlichsten zu Traversella in Klüften von zersetztem Serpentin auftritt, also in analoger Art wie hier gefunden wird.

Nachdem der Erzgang während langer Zeiträume in der angegebenen Weise ausgefüllt worden war, unterlag er

an allen Punkten, wo lufthaltige Wasser eindringen konnten, der Zersetzung. Diese ist an manchen Stellen so energisch vor sich gegangen, dass die in dem Quarze eingesprengten Schwefelmetalle vollständig verschwunden und nur die bienenwabenartigen „Quarzgerippe" zurückgeblieben sind, an anderen aber haben sich secundäre metallische Verbindungen, wenngleich in geringer Menge abgesetzt. Aus der Zinkblende scheint trotz ihres reichlichen Vorkommens weder kieselsaures noch kohlensaures Oxyd entstanden zu sein, da zu wenig kohlensaure Salze im Gange vorhanden waren, wohl aber Zinkvitriol, welcher als solcher gelöst und weggeführt worden sein muss, während ihr Eisengehalt als erdiger Brauneisenstein zurückblieb. Der Bleiglanz ist öfter an der Oberfläche in pulveriges schwefelsaures Bleioxyd übergegangen, der nur selten beobachtete krystallisirte Bleivitriol ist aber jünger und sitzt nicht auf Bleiglanz, sondern auf Quarz. Dagegen kommt das nicht seltene Weissbleierz zuweilen unmittelbar auf ihm aufgewachsen, aber doch häufiger in Begleitung von erdigem Brauneisenstein auf Quarz vor. Aus ihm ist local auch das seltene Molybdänbleierz hervorgegangen.

Das Arsennickeleisen, welches neben Nickel auch etwas Kobalt enthält, wird wohl der Ursprungskörper des spärlich gefundenen nickelhaltigen Brauneisensteins und Kobal-Manganerzes sein. Der seltene Scheelit gehört zu den jüngeren Mineralien, er findet sich gewöhnlich nicht unmittelbar auf Wolfram, dem er jedenfalls seine Säure entnommen hat, sondern in Quarzdrusen. Sehr jung ist wohl auch der Mesitinspath, während der Eisenspath und Dolomit mit den älteren Erzen zusammen vorkommen.

Aus den früher angeführten Daten über die Zusammensetzung des Paragonitschiefers und des Gabbros erklärt sich die Ausfüllung des Ganges durch Auslaugung dieser Nebengesteine vollständig und wird meine Theorie wieder einmal vollkommen bestätigt.

Sitzung vom 3. Juni 1893.

1. Herr E. v. Lommel macht eine Mittheilung: „Aequipotential- und Magnetkraftlinien. Zum Hall'schen Phänomen."

2. Herr L. Sohncke berichtet: „über ungewöhnliche mikroskopische Bilder."

Aequipotential- und Magnetkraftlinien.
Zum Hall'schen Phänomen.

Von E. v. Lommel.

(*Eingelaufen 3. Juni.*)

In seiner letzten Mittheilung hat Herr Professor Boltzmann die von ihm zuerst bestrittene Uebereinstimmung der Magnetkraftlinien mit den Aequipotentiallinien, soweit ich sie auf Grund von Versuchsergebnissen behauptet hatte, als zutreffend anerkannt, und die Beziehung dieser beiden Liniensysteme zu einander in werthvollen Darlegungen auch theoretisch erörtert. Auf die Fälle, in welchen die durch Eisenfeilspäne auf einer durchströmten Fläche sichtbar werdenden Magnetkraftlinien nicht mit den Aequipotentiallinien identisch sind, habe ich schon in meiner ersten Mittheilung ausdrücklich hingewiesen. Wenn nämlich die Oberfläche noch unter dem Einfluss eines fremden Magnetfeldes steht, das nicht von der ihr eigenen Strömung herrührt, „so ordnen sich die Feil-

späne in Linien, welche augenscheinlich die Resultanten sind aus den beiden Systemen von Kraftlinien, deren jedes unabhängig für sich bestehen bleibt".[1]) Zu dieser Kategorie aber gehören die von Herrn Boltzmann namhaft gemachten Ausnahmefälle. Als Beispiel dafür diene das Bild Fig. 1, welches

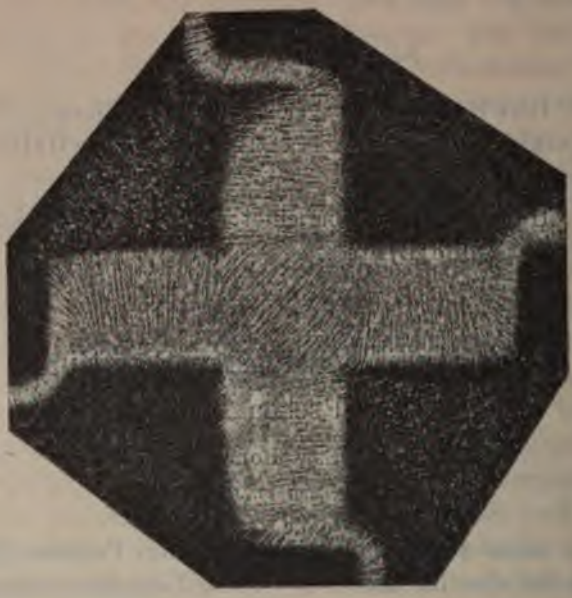


Fig. 1.

auf zwei gekreuzt aufeinander gelegten rechteckigen Streifen von Kupferblech durch Aufstreuen von Eisenfeile entsteht. Der obere der beiden Kupferstreifen ist in eine entsprechende Einbiegung des unteren mittels Schellack eingekittet, so dass

1) Lommel, d. Sitzungsber. XXII, S. 372, 1892. Wied. Ann. XLVIII, S. 463, 1893. — In meinem „Lehrbuch der Experimentalphysik", welches Mitte Februar 1893 erschienen ist, steht S. 370: „Die aequipotentialen Linien einer vom Strom durchflossenen Platte sind zugleich die zur Strömung gehörigen Magnetkraftlinien."

die freien Oberflächen mit der Gypsfläche, in welche das Plattenpaar sammt Zuleitungsdrähten eingebettet ist, in einer Ebene liegen; die Zuleitungsdrähte sind längs den kurzen Seiten der Rechtecke angelöthet. Geht ein Strom durch die beiden mittels des Schellacks von einander isolirten Platten, so ordnen sich die Feilspäne auf dem Quadrat, in welchem sich die beiden Platten überdecken, diagonal, und zwar in Linien parallel der Diagonale, welche die Ecken des Quadrates verbindet, wo die Stromrichtung in der einen Platte auf die Ecke zu, in der anderen Platte von ihr weggeht. Kehrt man den Strom in der einen Platte um, so ordnen sich die Feilspäne parallel zur anderen Diagonale. Die Magnetkraftlinien auf dem gemeinschaftlichen Quadrat stellen sich sonach dar als die Resultanten aus den Magnetkraftlinien jeder Platte für sich, welche auf den freiliegenden Enden der Platten als zu den Quadratseiten parallele Linien hervortreten.

Fig. 2.

Bezüglich des Falles der Fig. 3 (Magnetkraftlinien auf dem Meridianschnitt eines geraden Kreiscylinders) meiner zweiten Mittheilung[1]) beschränke ich mich darauf, statt jener

1) Sitzungsber. XXIII, S. 109, 1893.

schematischen Figur die wirklichen Bilder mitzutheilen, welche auf den Meridianschnitten von Cylindern entstehen, an deren Axenendpunkten die Zuleitungsdrähte angelöthet sind. Die Fig. 2 bezieht sich auf einen massiven, die Fig. 3 auf einen hohlen Halbcylinder aus Kupfer. —

Fig. 3.

Die Aufgabe, die Aequipotentiallinien auf einer Kugelfläche zu finden, auf deren Oberfläche zwei entgegengesetzt gleiche Elektrodenpunkte A und B liegen, bezieht sich nicht auf nur eine Kugel, sondern auf alle Kugeln, welche durch zwei gegebene Punkte A und B gehen, deren Mittelpunkte also in der Ebene liegen, welche auf der Verbindungslinie AB in deren Mitte senkrecht steht. Denkt man sich die Aequipotentiallinien auf allen diesen Kugeln gefunden, so bilden alle Linien, welche demselben Potentialwerthe entsprechen, in ihrer stetigen Aufeinanderfolge von Kugel zu Kugel eine Fläche, welche jede Kugelfläche der Schaar in einer Linie gleichen Potentials schneidet. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass diese Fläche eine Rotationsfläche um die Verbindungslinie AB der beiden gegebenen Elektroden sein muss. Zu jener Schaar von Kugelflächen gehören aber auch die unendlichen Ebenen, welche durch AB gelegt sind. In

einer solchen Ebene sind aber die Aequipotentiallinien bekannt; sie sind Kreise, deren Mittelpunkte in der Geraden AB liegen und diese Gerade in Punkten schneiden, die zu den Punkten A und B harmonisch liegen. Man kennt also zu jenen Rotationsflächen ausser der Drehungsaxe auch die Meridiancurven, und somit die gesuchten Flächen selbst, welche, wie bereits gezeigt worden, auf allen Kugelflächen der gegebenen Schaar senkrecht stehen. Das ursprünglich räumliche Problem ist durch diese Betrachtung auf ein ebenes zurückgeführt; da die Lösung des letzteren Problems bekannt ist, so ist auch jenes auf die einfachste Weise gelöst.

Die so gefundenen Flächen sind nun freilich nicht „Aequipotentialflächen" in demselben Sinne, wie die Aequipotentialflächen in einem mit leitender Masse erfüllten unendlichen Raum. Die Function V der Coordinaten x, y, z, durch deren Constantsetzung ihre Orthogonalgleichung erhalten wird, genügt der Gleichung $\Delta V = 0$ nicht. Ich nannte diese Flächen aber dennoch „Aequipotentialflächen", weil sie die gegebene Flächenschaar in Linien gleichen Potentiales senkrecht schneiden, und somit diese Bezeichnung am nächsten lag. Man könnte sie vielleicht als „Aequipotentialflächen zweiter Art" unterscheiden. —

Dass zum Nachweis des Hall'schen Stromes ein Galvanometer von kleinem Widerstand vortheilhaft ist, scheint mir selbstverständlich.[1]) Damit ist aber nicht gesagt, dass der Halleffect nicht auch bei beliebig grossem Widerstand der Galvanometerleitung zu Stande komme. In dem Ausdruck für die elektromotorische Kraft des Hallstromes

$$\varepsilon = 2e\,\frac{R+r}{r},$$

1) In Müller-Pfaundler's Lehrbuch der Physik 9. Aufl., Bd. III, S. 918 ist bezüglich des beim Hall'schen Versuch zu verwendenden Galvanometers ausdrücklich bemerkt „von kleinem Widerstand".

wo r den Widerstand des Galvanometers, R den der Platte bedeutet, nähert sich mit wachsendem r der Factor $(R + r)/r$ der Einheit, und wird $= 1$ für $r = \infty$, d. h. bei Anwendung eines Voltmeters (r sehr gross) oder eines Elektrometers ($r = \infty$) ergibt sich einfach der Potentialunterschied an den Hallelektroden $\varepsilon = 2e$. Nur unter der Voraussetzung, dass r gegen R vernachlässigt werden kann, wird jener Factor $= R/r$, und die gesammte elektromotorische Kraft des Hallstromes findet sich umgekehrt proportional dem Galvanometerwiderstand r. Unter allen Umständen aber behält der Factor $(R + r)/r$ als Quotient zweier Widerstände den Charakter einer absoluten Zahl von der Dimension Null.

Den Potentialunterschied $2e$ zweier gegenüberliegender Punkte des Plattenrandes (der Hallelektroden), d. i. die Klemmenspannung des daselbst angelegten Galvanometers, habe ich nicht als vom Galvanometerwiderstand unabhängig gefunden, sondern als davon unabhängig angenommen. Denn inwiefern diese durch die Einwirkung des Magnetfeldes auf den Primärstrom in der Platte hervorgerufene Potentialdifferenz von dem Widerstande des Galvanometers, das ja möglicherweise gar nicht vorhanden ist, abhängen soll, ist mir nicht verständlich.

Es ist übrigens zu bemerken, dass die Formel

$$\varepsilon = 2e\frac{R + r}{r}$$

von irgend welchen theoretischen Vorstellungen über die Entstehung des Hall'schen Phänomens völlig unabhängig ist. Bei ihrer Herleitung wurde nichts vorausgesetzt, als das thatsächliche Vorhandensein einer Potentialdifferenz an den Hallelektroden und die Giltigkeit des Ohm'schen Gesetzes.

Ungewöhnliche mikroskopische Bilder.

Von L. Sohncke in München.

(*Eingelaufen 3. Juni.*)

1. Die beobachtete Erscheinung.

Gelegentlich der mikroskopischen Betrachtung einer Abbe'schen Diffraktionsplatte machte ich zufällig die Bemerkung, dass es — bei völlig unverändert gelassenem Mikroskop — doch fünf verschiedene Abstände dieser Platte gab, bei denen mikroskopische Bilder des auf ihr befindlichen Gitters auftraten. Die Bilder sind theils verkehrt, theils aufrecht, und von verschiedenen Vergrösserungen. Die ungewöhnlichen Bilder unterscheiden sich von dem gewöhnlichen durch wesentlich geringere Deutlichkeit, indem bei ihnen das ganze Gesichtsfeld zugleich von allgemeiner Helligkeit erfüllt ist. Die Art der Beleuchtung ist von keinem wesentlichen Einfluss; man kann Himmels- oder nahes Lampenlicht, sowie den Plan- oder Hohlspiegel anwenden.

Die Beobachtung wurde mit einem Zeiss'schen Mikroskop (Objektiv *aa*, Okular IV) gemacht; sie bestätigte sich aber auch bei Anwendung eines Hartnack'schen Mikroskops. Also ist die Erscheinung nicht in der besonderen Beschaffenheit eines bestimmten Mikroskops begründet. Von andern Beugungsgittern (einem Schwerd'schen und einem Nobert'schen) konnten solche

aussergewöhnliche Bilder nicht erhalten werden. Folglich hat die Erscheinung in der Beschaffenheit der Abbe'schen Platte selbst ihren Grund.

Einen Anhaltspunkt für die Erklärung schien zunächst der Umstand zu bieten, dass jene Diffraktionsplatte deutliche Brennpunktseigenschaften zeigt, wie solche zuerst von J. L. Soret[1]) bei gewissen Gittern absichtlich erzielt wurden. Das Gitter wirkt nämlich wie eine Linse mit mehreren verschiedenen Brennweiten, es liefert — gleich einem Soret'schen Gitter — von einem Objekt mehrere in verschiedenen Abständen gelegene Bilder, virtuelle und reelle. Somit muss es auch, gleich einem Soret'schen Gitter, sowohl als Conkav-, wie als Convexspiegel von mehreren verschiedenen Brennweiten wirken können.

Nichtsdestoweniger erwies sich dieser Gedankengang als unzutreffend; denn es stellte sich bald heraus, dass die Erscheinung gänzlich unabhängig von der Gitternatur des Objekts ist. Den Ausschlag gibt vielmehr eine andere Eigenschaft der Platte: Die Gitterstriche sind in eine versilberte Glasplatte eingeritzt. Als ich nun das Gitter vollständig verdeckte und einen in dem Silberspiegel zufällig vorhandenen kleinen isolirten Riss von der Gestalt eines Kommas beobachtete, erhielt ich von diesem Objekt dieselben fünf Bilder. Hiermit war klar, dass ihre Entstehung wesentlich dadurch bedingt sein musste, dass die das Objekt tragende Platte die Eigenschaft eines Spiegels besitzt.

Zu diesem Umstand muss aber noch ein anderer hinzukommen: Als Spiegel kann die Platte nur dann wirken, wenn sie von Seite des Mikroskops her bestrahlt wird. Also müssen auch gewisse Flächen der Mikroskoplinsen spiegelnd wirken. Hierbei können nun offenbar nur Grenzflächen zwischen

---

1) Ueber die durch Kreisgitter erzeugten Beugungsphänomene. Poggendorffs Annal. d. Phys. u. Chemie. 156. 1875, S. 99.

Glas und Luft in Betracht kommen, nicht solche zwischen Glas und Glas, weil in letzterem Falle die reflektirte Intensität viel zu gering ist (vielleicht nur $^1/_{40}$ der Intensität des ersteren Falles). Durch diese doppelte Spiegelung wird dann dem Mikroskop — an Stelle des ursprünglichen Objektes — ein Bild desselben dargeboten, welches von der Frontlinse den richtigen Objektabstand hat, und von welchem das Mikroskop ein Bild von normaler Vergrösserung entwirft. Dass auf diesem Wege die fragliche Erscheinung ihre völlige Erklärung findet, soll nun genauer begründet werden.

Die folgende Tabelle I enthält die Beobachtungsdata über Lage und Grösse der 5 Bilder, die mit dem Zeiss'schen Mikroskop gesehen wurden. Das Mikroskoprohr trägt eine Millimeterskala, die bei Bewegung des Rohres an einer feststehenden Marke vorübergeht. Die Ablesungen an dieser Skala stehen in der zweiten Spalte, während die erste die Nummern der Bilder enthält, von jenem angefangen, das bei geringstem Abstand des Objektes erscheint. Die dritte Spalte gibt die Stellung des Bildes an, wobei die des normalen Bildes (No. IV) als „normal", die umgekehrte als „abnorm" bezeichnet ist. Die vierte Spalte zeigt, wie viele Theile des Okularmikrometers dasselbe Stück des Objekts decken. Als solches Objektstück diente die ganze Breite des von Gitterstrichen bedeckten Theils der Platte.

Tabelle I.

Bildnummer	Einstellung des Rohrs	Stellung des Bildes	Okular-Mikrometer	Bemerkungen
	mm			
I	4,80	normal	90,0	
II	8,45	„	28,0	
III	12,85	abnorm	17,2	
IV	17,00	normal	28,0	das gewöhnliche Bild.
V	29,35	abnorm	30,5	am schwersten sichtbar.

Senkt man das Mikroskoprohr, bis die vorderste Linsenfläche (Frontfläche) auf die Diffraktionsplatte aufstösst, so steht die Marke auf 4,30. Also erhält man die zum Auftreten der 5 Bilder erforderlichen Entfernungen e der Frontfläche von der oberen Fläche der Diffraktionsplatte durch Verminderung der Zahlen der zweiten Spalte um 4,3. (Spalte II der folgenden Tabelle.) In Spalte IV der folgenden Tabelle ist ferner das Verhältniss der Vergrösserung der verschiedenen Bilder zur Vergrösserung des normalen Bildes angegeben.

Tabelle II.

Bild	e	Stellung	Vergrösserungsverhältniss
	mm		
I	0,80	normal	3,21
II	4,15	"	1,00
III	8,55	abnorm	0,61
IV	12,70	normal	1,00
V	25,05	abnorm	1,09

Das Objektiv aa des Zeiss'schen Mikroskops besteht aus zwei Linsensystemen, deren einander zugewandte Glasflächen um 21,4 mm von einander abstehen. Das vorderste dieser Systeme erscheint als eine Plankonvexlinse; ihre Planfläche ist die Frontfläche des ganzen Objektivs; die nach vorn gewandte Fläche des zweiten Systems ist konvex, ihr Krümmungsradius beträgt etwa 15 cm. Es ist für das Folgende nicht nothwendig, die Beschaffenheit beider Linsensysteme genauer zu kennen. Es genügt z. B. schon, das in Wahrheit aus 2 Linsen (einer Sammel- und einer Zerstreuungslinse) zusammengesetzte vorderste System als eine einfache Plankonvexlinse von der thatsächlichen Gesammtdicke 3,5 mm und einem mittleren Brechungsquotienten von 1,56 zu betrachten.

2. Hohlspiegelwirkung einer Plankonvexlinse.

Vor der Ableitung der einzelnen Bilder soll zuerst die Hohlspiegelwirkung einer Plankonvexlinse, welche für das Zustandekommen von zweien der vier ungewöhnlichen Bilder massgebend ist, untersucht werden. Obgleich sich diese Wirkung unschwer aus der allgemeinen Theorie der Bilder eines centrirten Systems brechender (oder spiegelnder) Kugelflächen ableiten lässt, empfiehlt sich doch die folgende direkte Ableitung durch ihre Einfachheit.

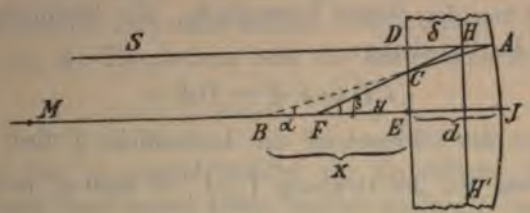


Fig. 1.

Auf die ebene Fläche einer Plankonvexlinse falle senkrecht ein Parallelstrahlenbündel, aus welchem ein Strahl SA verfolgt wird. In die Linse eingedrungen wird SA an der als Hohlspiegel wirkenden Kugelfläche so reflektirt, dass er mit den übrigen reflektirten in B (um den halben Kugelradius $\frac{r}{2}$ von der Kugelfläche entfernt) zusammentreffen würde, wenn er nicht, gleich den übrigen, zuvor an der ebenen Fläche gebrochen würde, so dass alle im Brennpunkte F zusammenkommen.

Für den Strahlenweg ACF gilt die Gleichung $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}$, ($\alpha$ = Einfallswinkel, β = Brechungswinkel, $\frac{1}{n}$ = Brechungsquotient aus der Linse ins umgebende Medium); oder $\beta = n \cdot \alpha$, wenn die Betrachtung — wie üblich — auf so wenig ge-

neigte Strahlen beschränkt wird, dass die dritten Potenzen der Bögen bereits vernachlässigt werden dürfen. Nennt man ferner $BE = x$, $FE = y$, so ist $CE = x \cdot \alpha = y \cdot \beta$, folglich:

$$1) \qquad y = \frac{x}{n}.$$

Hiermit ist die Lage des Brennpunkts F bestimmt, denn x ist $= \frac{r}{2} - d$, wo d die Linsendicke.

Der gebrochene Strahl CF schneidet, rückwärts verlängert, den einfallenden Strahl SA im Punkte H, im Abstande δ von der ebenen Linsenfläche. Zur Bestimmung von δ dient die Beziehung:

$$CD = \delta \cdot \beta = DA \cdot \alpha.$$

Aber der Ueberschuss der Linsendicke d über DA ist eine Grösse von der Ordnung $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, so dass er, mit α multiplicirt, eine bereits zu vernachlässigende Grösse ergibt. Daher ist für $DA \cdot \alpha$ einfach $\alpha \cdot d$ zu setzen, und man hat:

$$2) \qquad \delta = \frac{d}{n}.$$

δ ist somit unabhängig von der besonderen Lage des einfallenden Strahls, also für alle Strahlen des einfallenden Parallelstrahlenbündels dasselbe, so dass eine im Abstande $\delta = \frac{d}{n}$ von der ebenen Linsenfläche entfernte Parallelebene HH' eine besondere Bedeutung besitzt (Hauptebene). Anstatt nämlich den zu einem senkrecht einfallenden Strahl gehörigen reflektirten, aus der Linse austretenden Strahl so wie vorher zu konstruiren, kann man einfacher so verfahren:

„Man verbindet den Punkt, in welchem der einfallende Strahl die um $\frac{d}{n}$ hinter der ebenen Frontfläche gelegene Hauptebene HH' schneidet, mit dem

um $\frac{1}{n}\left(\frac{r}{2} - d\right)$ vor der Frontfläche gelegenen Brennpunkt F.

Umgekehrt findet man für jeden von F ausgehenden Strahl den zugehörigen reflektirten, wenn man ersteren bis zur Hauptebene führt und von diesem Schnittpunkt aus den zur Frontfläche senkrecht verlaufenden Strahl zieht."

Die Plankonvexlinse ist also bezüglich ihrer Hohlspiegelwirkung vollständig ersetzbar durch den Brennpunkt F und die Hauptebene HH', weil zur Bildkonstruktion nur diese beiden Elemente verwendet werden. Der Abstand des Brennpunkts von der Hauptebene oder die Brennweite ist:

$$3) \qquad f = y + \delta = \frac{x + d}{n} = \frac{r}{2n}$$

Um nun zu einem parallel zur Frontfläche liegenden Objekt vom Durchmesser O das zugehörige Bild O' zu finden, verfolgt man nur 2 Strahlen, die von dem einen Endpunkt des Durchmessers O ausgehen: einen ‖ dem Centralstrahl, den anderen durch F gerichtet.

Heissen a und b die Abstände des Objekts und Bildes von der Hauptebene, so ist:

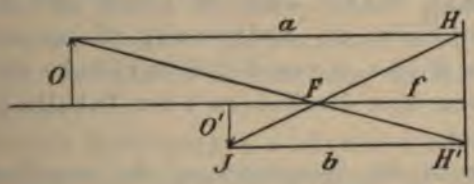


Fig. 2.

$$4) \qquad \frac{O'}{O} = \frac{b}{a}, \text{ weil beide} = \frac{JF}{HF} \text{ sind.}$$

Und aus der Gleichung:

$$\frac{f}{a} = \frac{O'}{O + O'}$$

folgt mit Hilfe der vorigen die Gleichung:

$$5) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

3. Erklärung der Erscheinung.

Es ist nacheinander zu betrachten die spiegelnde Wirkung der im Objektivsystem aufeinander folgenden Grenzflächen von Glas und Luft; diese Flächen sind a) die ebene Frontfläche, b) die hintere Grenzfläche der plankonvexen Linse (vgl. den Schluss von Abschnitt 1), c) die konvexe Vorderfläche des zweiten Theilsystems des Objektivs.

Das als Objekt dienende Spiegelgitter ist von der Frontfläche nicht um die Strecken e (Tabelle II) entfernt, denn die oberste Fläche D der Diffraktionsplatte gehört einem Deckgläschen von der Dicke $\varepsilon = 0{,}15$ mm an, und erst an der Unterfläche desselben befindet sich das Objekt. Dem Mikroskop wird also statt des Objekts ein durch Brechung an der oberen Deckglasfläche D näher gerücktes Bild des Objekts (O) geboten, welches um $\frac{\varepsilon}{n}$ unter der Fläche D liegt. Der Brechungsquotient n aus Luft in dies Glas wird nicht viel von 1,5 abweichen, so dass diese Entfernung $= 0{,}10$ mm beträgt. Man erhält also in jedem der zu untersuchenden Fälle die Entfernung dieses als Objekt dienenden Bildes O von der Frontfläche des Mikroskops, wenn man die Zahlen e der Tabelle II um 0,10 vergrössert.

Ferner ist die Spiegelwirkung des vom Deckgläschen bedeckten Silberspiegels zu untersuchen. Liegt ein Objekt um z mm vor der oberen Fläche D des Deckgläschens, so gelangen die Strahlen so zum Silberspiegel, als kämen sie von einem Punkt, der um nz vor D liegt. Das durch den Silberspiegel erzeugte Bild liegt also um $nz + \varepsilon$ hinter ihm, also um $nz + 2\varepsilon$ hinter D. Beim Austreten der reflektirten

Strahlen aus dem Deckglas in Luft werden sie so gebrochen, dass sie von einem Punkt Ω zu kommen scheinen, der um $\frac{nz + 2\varepsilon}{n}$, d. h. um

$$6) \qquad \Omega D = z + \frac{2\varepsilon}{n}$$

hinter der Fläche D des Deckglases liegt. Wegen $\varepsilon = 0{,}15$ und $n = 1{,}5$ wird $\frac{2\varepsilon}{n} = 0{,}20$ mm.

a) Wirkung der ebenen Frontfläche. Diese Fläche erzeugt ein Spiegelbild O' des als Objekt dienenden Bildes O; das durch den Silberspiegel erzeugte Bild Ω dieses Bildes O' wird dem Mikroskop als Objekt dargeboten. Dies letzte Bild Ω ist gleich gross und gleich gestellt wie das ursprüngliche O. Letztere Eigenschaft besitzt nur das zweite der von mir wahrgenommenen Bilder. Für dieses ist die um 0,10 vergrösserte Entfernung e nach Tab. II $= 4{,}25$ mm. Also ist $\overline{OO'} = 2 \cdot 4{,}25$, also $DO' = z = 8{,}50 - 0{,}10 = 8{,}40$, und $\overline{\Omega D}$ (nach Gl. 6) $= 8{,}40 + 0{,}20 = 8{,}60$. Also liegt Ω von der Mikroskop-Frontfläche entfernt um $8{,}60 + 4{,}15 = 12{,}75$ mm. Dieser Abstand stimmt hinreichend genau mit jenem überein, welchen die Frontfläche von einem Objekt haben muss, das durch's Mikroskop scharf gesehen werden soll, und welcher direkt $= 12{,}80$ ermittelt wurde (vgl. auch Bild IV, Tab. II). Also ist die Entstehung des Bildes II hiermit nachgewiesen.

b) Die als Hohlspiegel wirkende hintere Grenzfläche der plankonvexen Linse erzeugt ein Bild O' von O. Das durch den Silberspiegel erzeugte Bild Ω dieses Bildes O' wird dem Mikroskop als Objekt dargeboten. Je nach der Entfernung des ursprünglichen Objekts vom Hohlspiegel ist das Bild O' virtuell oder reell. Im ersteren Falle ist es von gleicher Stellung wie das Objekt, im zweiten Falle verkehrt. Daher kann der erste Fall nur zur Erklärung des

ersten der von mir wahrgenommenen Bilder dienen; der zweite Fall aber erklärt das dritte.

Nennt man die unbekannte Entfernung HO' des Bildes O' hinter (resp. vor) der Hauptebene $= b$, und beachtet, dass die Hauptebene nach Gl. 2) um $\delta = \frac{d}{n} = \frac{3,5}{1,56} = 2,24$ hinter der Frontfläche liegt, so ist der Abstand des Bildes O' von der Deckglasfläche D

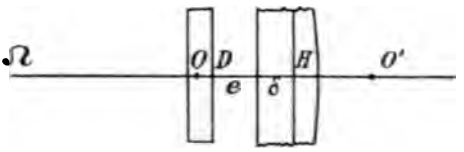


Fig. 3.

$DO' = DH \pm HO' = e + \delta \pm b$, also nach Tab. II

für Bild I: $DO' = z = 0,50 + 2,24 + b$

„ „ III: $DO' = z = 8,55 + 2,24 - b$

Also nach Gl. 6)

für Bild I: $\Omega D = z + 0,20 = 2,94 + b$

„ „ III: $\Omega D = z + 0,20 = 10,99 - b$.

Damit Ω scharf gesehen werde, muss $\Omega D + e = 12,80$ sein, also für Bild I: $2,94 + b + 0,50 = 12,80$

„ „ III: $10,99 - b + 8,55 = 12,80$

Hieraus folgt für Bild I: $b = 9,36$

„ „ III: $b = 6,74$

Hiermit vermag man nun das Grössenverhältniss $\frac{\Omega}{O}$ zu ermitteln; denn es ist: $\Omega = O'$ und nach Gl. 4) $\frac{O'}{O} = \frac{b}{a}$

Es ist aber für Bild I: $a = 0,10 + e + \delta = 2,84$

„ „ III: $a = 0,10 + e + \delta = 10,89$.

Also wird für Bild I: $\frac{\Omega}{O} = \frac{9,36}{2,84} = 3,29$

„ „ III: $\frac{\Omega}{O} = \frac{6,74}{10,89} = 0,62$

Durch direkte Beobachtung sind diese Grössenverhältnisse (Tab. II) für die beiden Bilder bezüglich $= 3{,}21$ und $= 0{,}61$ gefunden. Diese hinlängliche Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe beweist, dass hiermit die Entstehung der Bilder I und III richtig nachgewiesen ist.

Nebenbei kann man auch die Brennweite dieser als Hohlspiegel wirkenden Plankonvexlinse angeben. Denn aus Gl. 5) — in welcher beim virtuellen Bilde das zweite Glied abzuziehen ist — folgt nach den Daten des

$$\text{Bildes I } f = \frac{ab}{b-a} = 4{,}08$$

$$\text{„ III } f = \frac{ab}{a+b} = 4{,}16$$

Die Uebereinstimmung dieser beiden Werthe für dieselbe Grösse kann für hinreichend gelten, wenn man bedenkt, dass thatsächlich ja gar keine einfache Plankonvexlinse, sondern eine Doppellinse vorliegt.

c) Wirkung der konvexen Vorderfläche des zweiten Theilsystems des Objektivs. Das erste Theilsystem, welches bisher nur in seiner Hohlspiegelwirkung betrachtet wurde, ist seiner eigentlichen Bestimmung nach eine Sammellinse; es entwirft von einem innerhalb seiner Brennweite befindlichen Objekt ein virtuelles aufrechtes Bild O'. Von diesem Bilde entwirft die Vorderfläche des zweiten Theilsystems, als Convexspiegel wirkend, ein virtuelles gleichgestelltes Bild O''. Die von diesem Bilde rückkehrenden Strahlen durchsetzen das erste Theilsystem nochmals; dieses erzeugt aber jetzt ein physisches verkehrtes Bild vom vorigen Bilde. Dasselbe kann nicht unmittelbar zu Stande kommen, weil die Strahlen vorher vom Silberspiegel aufgefangen werden. So entsteht schliesslich vor dem Silberspiegel ein verkehrtes physisches Bild Ω, welches dem Mikroskop als Objekt dargeboten wird. Dass das Bild V wirklich in dieser Art zu

Stande kommt, ist jetzt zu beweisen. Zunächst ist seine Stellung eine solche, wie hier verlangt wird.

Die Brennweite des ersten Theilsystems ist etwa $= 27{,}9$ mm. Sieht man es wieder als einfache Planconvexlinse an, so liegt bekanntlich seine erste Hauptebene um $\frac{d}{n} = 2{,}24$ hinter der ebenen Frontfläche, während seine zweite Hauptebene die Convexfläche berührt. Der Abstand des Objekts O von der ersten Hauptebene ist $a = 0{,}10 + \varepsilon + \frac{d}{n}$ oder (mit Rücksicht auf Tab. II Bild V) $a = 0{,}10 + 25{,}05 + 2{,}24 = 27{,}39$, also in der That kleiner als die Brennweite. Die Entfernung des durch diese Linse erzeugten virtuellen Bildes O' vor der zweiten Hauptebene berechnet sich zu 1498,4.

Dies Bild, als Objekt für den Convexspiegel dienend, der um 21,4 hinter der letzten Fläche des ersten Theilsystems liegt, hat von diesem Spiegel den Abstand $a' = 1519{,}8$. Also liegt das virtuelle Bild O'', das der Convexspiegel (mit einer Brennweite von 75 mm) von jenem Bilde O' entwirft, um $b' = 71{,}47$ hinter diesem Spiegel, also $71{,}47 + 21{,}4 = 92{,}87$ hinter der zweiten Fläche der Plankonvexlinse.

Weil dieser Abstand a'' grösser als die Brennweite der Plankonvexlinse ist, so entwirft diese, von den rückkehrenden Strahlen durchsetzt, ein physisches verkehrtes Bild von O'', dessen Abstand von der innerhalb der Planconvexlinse gelegenen Hauptebene sich zu $b'' = 39{,}88$ berechnet. Von derselben Hauptebene steht die Deckglasoberfläche um $25{,}05 + 2{,}24 = 27{,}29$ ab, so dass das Bild also um $39{,}88 - 27{,}29 = 12{,}59$ hinter dieser Ebene D zu Stande kommen würde. Nun lehrt eine Betrachtung, ganz analog jener, die zu Gl. 6) führte, dass statt des vereitelten Bildes das physische Bild Ω in der Entfernung $\alpha - \frac{2\varepsilon}{n} = 12{,}59 - 0{,}20 = 12{,}39$ vor der Fläche D zu Stande kommt. Von der Frontfläche ist es also um $25{,}05 - 12{,}39 = 12{,}66$ mm entfernt. Dieser Abstand

stimmt hinlänglich mit jenem überein (12,80), welchen die Frontfläche von dem scharf zu sehenden Objekte haben muss.

Dasselbe gilt von der Vergrösserung. Denn es ist:

$$\frac{O'}{O} = \frac{b}{a} = \frac{1498,4}{27,39} = 54,7$$

$$\frac{O''}{O'} = \frac{b'}{a'} = \frac{71,47}{1519,8} = 0,047$$

$$\frac{\Omega}{O''} = \frac{b''}{a''} = \frac{39,88}{92,87} = 0,43$$

folglich $\frac{\Omega}{O} = 1,10$. Die direkte Beobachtung hat dieses Vergrösserungsverhältniss zu 1,09 ergeben (Tab. II Bild V). — Somit ist auch die Entstehung dieses Bildes völlig erklärt.

Sitzung vom 8. Juli 1893.

Herr E. v. LOMMEL legt zwei Mittheilungen vor:

1. von Professor Dr. L. GRAETZ: „eine neue Methode zur Messung von Selbstpotentialen und Induktionscoefficienten“;
2. von Professor Dr. L. GRAETZ und Dr. L. FOMM: „über ein Instrument zur Messung der Spannung bei elektrischen Oscillationen“.

Eine neue Methode zur Messung von Selbstpotentialen und Induktionscoefficienten.

Von L. Graetz.

(*Eingelaufen 8. Juli.*)

Für die jetzt im Vordergrund des Interesses stehenden elektrischen Oscillationen, sowie für die praktisch immer häufiger angewendeten elektrischen Wechselströme spielt das Selbstpotential von Drähten und Rollen eine ebenso wichtige Rolle wie für Gleichströme der Widerstand. Und doch ist die Messung und Vergleichung von Selbstpotentialen bisher noch eine recht schwierige Aufgabe der messenden Physik. Die von Maxwell herrührenden Methoden für diese Messungen setzen ein äusserst empfindliches Galvanometer und günstige äussere Umstände voraus und liefern auch dann nur durch recht mühsame doppelte Abgleichung ein Resultat, wenn es sich um ziemlich grosse Werthe des Selbstpotentials handelt; bei kleinen Werthen desselben versagen sie ganz. Die Methode von Oberbeck,[1]) bei welcher die beiden Rollen eines Elektrodynamometers von Wechselströmen mit der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ durchflossen werden, erfordert zwar diese doppelten Abgleichungen nicht;

1) Oberbeck Wied. Ann. 17. 816. 1040. 1882.

dagegen ist bei ihr die Anwendung reiner Sinusschwingungen nothwendig und sowohl die Erzeugung derselben, wie insbesondere auch die für die Messung nothwendige genaue Bestimmung der Periode dieser Schwingungen macht diese Methode nicht weniger mühsam, als die vorher erwähnten. Bei sorgfältiger Behandlung ergab sie allerdings in den Händen von Oberbeck selbst, dann von Puluj[1]) und Troje[2]) gut brauchbare Resultate. Dieselbe Schwierigkeit der genauen Zeitmessung haftet auch der Methode von Wien[3]) an, welcher das optische Telephon für diese Messungen benutzte.

Einfachere Verhältnisse lassen sich herstellen, wenn man das zuerst von Hughes eingeführte, aber allerdings von ihm ganz incorrekt behandelte Hilfsmittel benützt, dass man in eine Stromverzweigung, welche das zu messende Selbstpotential enthält, noch eine variable Induktion einführt, sei es wieder eine Selbstinduktion oder eine gegenseitige Induktion. Die Irrthümer in der Hughes'schen Interpretation seiner Messungen sind von Heaviside,[4]) Rayleigh[5]) und H. F. Weber[6]) aufgedeckt worden. Sie bestehen darin, dass Hughes annahm, dass bei der Abgleichung in der Wheatstone'schen Brücke, bei welcher ein Telephon nicht bloss ein Minimum des Tones giebt, sondern vollständig verstummt, nicht bloss die Widerstände zu beiden Seiten der Brücke, sondern auch die Induktionen sich jede für sich gegenseitig compensiren, während in Wirklichkeit dann im allgemeinen eine complicirte Beziehung zwischen den Induktionen und den Widerständen stattfindet, die auch noch von der Schwingungszahl der Wechselsröme abhängt. Indess lässt sich der Gedanke

1) Puluj, Elektrotechn. Zeitschrift 12 S. 346. 1891.
2) Troje, Wied. Ann. 47 p. 501. 1892.
3) Wien, Wied. Ann. 44 p. 689. 1891.
4) Heaviside, Phil. Mag (5) 22 1886.
5) Rayleigh, Journ. Tel. Eng. 15 p. 54. 1886.
6) H. F. Weber, Rep. Phys. 22 p. 290. 1886.

von Hughes, wie zuerst Lord Rayleigh[1]) zeigte, durch andere Schaltung verwirklichen. Rayleigh selbst wendete nach manchen anderen Versuchen folgende Schaltung an. In der Wheatstone'schen Brücke wurden die Zweige 3 und 4 aus gleichen Widerständen von je $^1/_2$ Ohm gebildet. Zwischen den Zweigen 1 und 2 befand sich ein ausgespannter Draht mit verschiebbarem Contakt. In den Zweig 1 wurde eine Rolle von passender Selbstinduktion und ein Rheostat (ohne Selbstinduktion) gebracht, in den Zweig 2 die zu messende Selbstinduktion und eine variable Selbstinduktion, bestehend aus zwei hinter einander geschalteten in einander drehbaren Rollen, für die das variable Selbstpotential für jede Lage bestimmt war. In die Brücke kam ein Telephon. Konnte man durch Aenderung des Widerstandes und der Induktion das Telephon zum Schweigen bringen, so mussten sich die beiden Zweige 1 und 2 sowohl in Bezug auf Widerstand, wie in Bezug auf Induktion gleich verhalten. Die Methode ist sehr gut, wenn die variable Selbstinduktion genügend verschiedene Werthe derselben giebt, um in weiten Grenzen die Compensation hervorzubringen. Das ist nur dann möglich, wenn der Widerstand derselben auch ziemlich erheblich ist, wodurch die Methode in der Anwendbarkeit doch recht beschränkt erscheint. Ayrton und Perry[2]) haben auf Grund dieser Methode jüngst ein von ihnen „Secohmmeter" und ein „Standard of Selfinduction" genanntes Instrument construirt, welche solche Messungen für technische Zwecke gestatten sollen. Ihre Standardrolle, die das Inter-

1) Rayleigh, Phil. Mag (5) 22 p. 469. 1886.
2) Ayrton und Perry. Lum. él. 24 p. 401. 1887.

vall von $8 \cdot 10^6$ bis $40 \cdot 10^6$ cm umfasst, hat schon 12 Ohm Widerstand.

Einfacher und in der Anwendung umfassender erschien es, die Schaltung so einzurichten, dass in der Wirkung auf das Telephon ein Theil der Induktion durch den Widerstand compensirt wird und nur der übrig bleibende Theil durch eine variable Induktion. Man konnte dadurch zunächst mit kleineren Apparaten arbeiten. Ferner erschien es vortheilhaft, variable Contakte vollständig in den Brückenzweig zu verlegen, in welchem sie keine Unsicherheit hervorbringen können.

Es wurde daher folgende Methode ausgearbeitet:

Hat man in den Zweigen 1 und 2 der Wheatstone'schen Combination beliebige Selbstpotentiale L_1 und L_2 und ausserdem beliebige gegenseitige Induktionen M_1 und M_2, so schaltet man zunächst die inducirten Rollen alle in den Telephonzweig und zwar so, dass der Strom in allen dieselbe Richtung hat in Bezug auf den sie inducirenden Strom. Die Zweige 2 und 3 bestehen aus einem ausgespannten Draht, dessen Selbstinduktion beliebig klein gemacht und daher vernachlässigt werden kann. Die Stromquelle des Wechselstroms kann beliebig sein. Es wurden dieselben Resultate gefunden mit einer Wechselstrommaschine, einem durch Stimmgabelunterbrecher und einem durch gewöhnlichen Hammer getriebenen Induktionsapparat. Die Gleichungen des Systemes lassen sich dann — unter Berücksichtigung aller Induktionen — leicht aufstellen und ergeben als Bedingung für die Ruhe des Telephons:

$$w_1 \, w_4 - w_2 \, w_3 = 0$$

$$w_4 \, L_1 - (w_3 + w_4) \, (M_1 + M_2) = w_3 \, L_2 .$$

Bei dieser Anordnung ist es nun möglich, die Messung von Selbstpotentialen und von gegenseitigen Induktionscoefficienten in ganz derselben Weise einzurichten, wie es

bei Widerstandsmessungen sich schon lange als vortheilhaft bewährt hat, nämlich durch Construktion eines Induktionskastens, ganz entsprechend den Widerstandskästen. Man muss dazu nur ein bekanntes Selbstpotential und eine bekannte gegenseitige Induktion haben. Durch passende Wickelung zweier Rollen von bekannten Dimensionen liessen diese sich herstellen und ihre Coefficienten durch Rechnung finden. Dabei sind die von Maxwell herrührenden Formeln für die gegenseitige Induktion mit Sicherheit zu benutzen. Die Formeln für die Selbstinduktion sind von Rayleigh, Stefan, Weinstein etwas verschieden angegeben und es liefern die verschiedenen Berechnungen nur Werthe, die bis auf 1—2 % übereinstimmen. Auch die Beobachtung nach der Rayleigh-Dorn'schen Methode giebt keine genaueren Werthe, so dass dies vorläufig die Grenze für die Genauigkeit der Bestimmungen ist. Ist S das bekannte Selbstpotential, G das bekannte gegenseitige Potential, so bringt man zunächst in den Zweig 1 und 2 je einen Induktor mit variabler Induktion. Am bequemsten bestehen dieselben aus einer kreisförmigen festen Rolle und einer in dieser drehbaren beweglichen Rolle, welche in den Telephonkreis eingeschaltet wird. Der Drehungswinkel wird an einem getheilten Kreis durch Zeiger bis auf 0,1 Grad abgelesen. Bei der senkrechten Stellung dieser Rollen ist ihre gegenseitige Induktion 0, bei paralleler ein Maximum oder Minimum. Man kann die den verschiedenen Winkeln entsprechenden Induktionen relativ finden, da man nach der obigen Formel irgend eine Drehung des einen Induktors beliebig auf beide Induktoren vertheilen kann und so die Abweichungen der Induktion von der Proportionalität mit der Winkeldrehung gradweise bestimmen kann. Ist α die gegenseitige Induktion, welche einem Grad der Induktoren entspricht, sind ferner P_1 und P_2 die Selbstpotentiale der beiden Induktoren, so macht man drei Messungen, indem man 1) in 1 und 2 nur je einen In-

duktor, 2) in 2 etwa noch S und 3) in 2 S und G einschaltet. Sind n_1 n_2 n_3 die Summen der Winkeldrehungen der Induktoren und wird das Verhältniss $\frac{w_3}{w_4}$ in den drei Fällen mit γ_1 γ_2 γ_3 bezeichnet, wobei $\gamma_3 = \gamma_2$ ist, so hat man folgende Gleichungen:

$$P_1 - (1 + \gamma_1)\, n_1 \alpha = \gamma_1 P_2$$
$$P_1 - (1 + \gamma_2)\, n_2 \alpha = \gamma_2\, (P_2 + S)$$
$$P_1 - (1 + \gamma_2)\, (n_3 \alpha + G) = \gamma_2\, (P_2 + S)$$

aus welchen P_1 P_2 und α ein für allemal absolut ermittelt werden. Es sind das die Constanten des Apparates. Die Messung irgend eines anderen Selbstpotentials x ergiebt sich dann sofort, indem man in den Zweig 1 etwa einen Induktor, in den Zweig 2 den anderen Induktor und x einschaltet. Ist γ das Widerstandsverhältniss $\frac{w_3}{w_4}$, n die Winkeldrehung der Induktoren, so ist

$$P_1 - (1 + \gamma)\, \alpha n = \gamma\, (P_2 + x).$$

Ebenso wird eine gegenseitige Induktion y gemessen durch

$$P_1 - (1 + \gamma)\, (\alpha n + y) = \gamma\, (P_2 + x).$$

So kann man von Rollen jeder Art durch einfache Messungen die Induktionscoefficienten in Centimetern oder Erdquadranten bestimmen und hat so die Möglichkeit, Rollen von abgemessenen Selbstpotential herzustellen und sie in derselben Weise anzuordnen, wie die Widerstandsrollen eines Widerstandskastens. Ein solcher Induktionskasten wird am besten so construirt, dass zwei Rollen von gleichem Widerstand immer nebeneinander stehen, von denen die eine bifilar gewickelt ist und geringe, die andere unifilar gewickelt ist und grosse Selbstinduktion besitzt. Durch gleichzeitiges Einschalten der einen Rolle auf die eine Seite, der anderen auf die andere Seite der Brücke kann man die Selbstinduktion

bedeutend ändern, ohne das Widerstandsverhältniss wesentlich zu alteriren und so stets die grösste Empfindlichkeit der Einstellungen erzielen. Vorausgesetzt ist dabei, dass die bifilar gewickelten Rollen keine merkbare Capacität besitzen. Das ist bei kleineren Rollen an sich der Fall, bei grösseren tritt zweckmässig die Chaperon'sche Wickelung ein, welche nach F. Kohlrausch vorzügliche Resultate giebt. Die Herstellung solcher Induktionskasten ist im physikalischen Institut der Universität im Gange. Darüber, wie über die Construction der von Dr. Edelmann ausgeführten Induktoren wird an anderer Stelle berichtet werden.

München, Physik. Inst. d. Universität,
Juli 1893.

Ueber ein Instrument zur Messung der Spannung bei elektrischen Oscillationen.

Von L. Graetz und L. Fomm.

(*Eingelaufen 8. Juli.*)

Die Spannungsverhältnisse, welche bei den raschen elektrischen Oscillationen geöffneter Induktionsapparate und Leydener Flaschen auftreten, lassen sich mit den gewöhnlichen Methoden nicht leicht messend verfolgen. Die dynamometrischen Methoden versagen wegen der geringen Quantitäten von Elektricität und wegen des enormen Einflusses der Selbstinduktion, die elektrometrischen, wenn man nicht ganz besondere Einrichtungen trifft, wegen der hohen Spannungen und der dadurch hervorgerufenen Funkenentladungen im Elektrometer. Bei Gelegenheit einer Untersuchung über die Bewegungsantriebe, welche ein Dielektrikum in einem homogenen, von elektrischen Oscillationen durchzogenen elektrischen Felde erhält, haben wir ein einfaches, leicht herzustellendes und sehr empfindliches Instrument construirt, welches solche Spannungen mit Leichtigkeit zu messen gestattet, welches aber auch für niedrige Spannungen und langsame Oscillationen vortheilhaft zu verwenden ist.

In einem nicht homogenen Felde unterliegt ein dielektrischer Körper Anziehungs- und Abstossungskräften und er-

hält dadurch gewisse Bewegungsantriebe, welche von Boltzmann[1]) ausführlich untersucht wurden und aus welchen er eine Methode zur Messung von Dielektricitätsconstanten ausarbeitete. In einem homogenen elektrischen Felde treten solche fortschreitende Bewegungen nicht auf, wohl aber kann man die Anordnung so machen, dass drehende Bewegungen entstehen. Hängt man nämlich in ein homogenes elektrisches Feld einen aus einem Dielektrikum bestehenden Körper (dessen Dielektricitätsconstante von 1 abweicht) hinein, so entstehen bei gewissen Lagen des Körpers Kräftepaare, welche eine Drehung des Körpers hervorbringen.[2]) Damit nun zunächst das elektrische Feld homogen bleibe, auch nach der Einführung des Dielektrikums, ist nothwendig, dass der eingeführte Körper die Form eines Ellipsoids habe. Nur in diesem Falle wird die Homogenität des Feldes nicht gestört. Man wird also den Körpern die Form von dünnen Stäbchen oder von dünnen kreisförmigen Platten geben. Hängt man ein solches Stäbchen so zwischen zwei Condensatorplatten auf, dass seine Axe einen Winkel von 45° mit den Kraftlinien bildet, so sucht sich das Stäbchen mit seiner Axe in die Richtung der Kraftlinien zu stellen. Entsprechend sucht eine dünne, vertikal hängende Kreisplatte sich mit ihrer Ebene in die Richtung der Kraftlinien einzustellen. Um sicher homogene Felder zu haben, haben wir zuerst Condensatorplatten von 30 cm Durchmesser und wenigen Centimetern Abstand genommen, sind jedoch später, als die Erscheinungen hierbei constatirt waren, zu kleineren Dimensionen übergegangen. Verbindet man mit dem Dielektrikum einen Spiegel und hängt das ganze System unifilar oder besser bifilar auf, so kann man in gewöhnlicher Weise die Drehung des Dielektrikums verfolgen.

---

1) Boltzmann, Wien. Ber. 68 (2) p. 81. 1873.

2) Manche Theorieen der Dielektrika verneinen zwar solche Wirkungen, sie sind aber thatsächlich vorhanden und leicht zu constatiren.

Falls die Condensatorplatten statisch geladen werden, so hängen die beiden Kräfte des Kräftepaares ab erstens von den durch Influenz im Dielektrikum erzeugten elektrischen Polarisationen, welche den auf den Platten vorhandenen Elektricitätsmengen und daher auch den auf ihnen vorhandenen Potentialen proportional sind, zweitens aber auch von den auf dem Dielektrikum schon vor der Influenzirung etwa vorhandenen freien Elektricitätsmengen, welche sich durch die Flamme allerdings gewöhnlich beseitigen lassen. Ist V die Potentialdifferenz der Platten, so wird in diesem Falle bei Commutirung der Condensatorplatten die Drehung an Grösse und eventuell auch an Richtung verschieden sein. Sie wird nämlich in dem einen Falle sein: $\alpha = lV + mV^2$, im anderen Falle $\alpha_1 = -lV + mV^2$, worin l ein Mass für die freie Ladung des Dielektrikums, m ein Mass für die Polarisirung desselben ist.

Falls dagegen das Feld von elektrischen Schwingungen durchzogen wird, so heben sich, wenn nur die Schwingungen rasch genug gegen die Oscillationsdauer des aufgehängten Systems stattfinden, die von den freien Elektrisirungen erzeugten Drehmomente auf und man erhält Ausschläge des Körpers, welche dem Quadrat der Potentialdifferenz proportional sein und immer nach derselben Richtung gehen müssen. So lange die Oscillationen nicht allzu rasch werden, kann man die elektrischen Bewegungen als quasistatische ansehen. Bei sehr raschen Oscillationen treten abweichende Vorgänge auf, welche übrigens das quadratische Gesetz nicht beeinflussen. Ueber diese werden wir demnächst berichten. Es ist also die Potentialdifferenz der Platten $V = C\sqrt{\alpha}$, wo α der Drehungswinkel und C der Reduktionsfaktor ist. Ist letzterer durch einen Vergleich mit absoluten Messungen bestimmt, so lassen sich die Spannungen direkt in Volts ausdrücken. Das Instrument, welches wir kurz als „dielektrischen Spannungsmesser" be-

zeichnen möchten, hat sein elektromagnetisches Analogon in dem Elektrodynamometer von Bellati-Giltay. Durch Veränderung des Abstandes der Condensatorplatten kann man die Empfindlichkeit des Apparates in sehr weiten Grenzen variiren.

Bei dem von uns ausgeführten Instrument wurde als Dielektrikum Schwefel angewendet, wegen der hohen Dielektricitätsconstante und der geringen elektrischen Nachwirkung derselben, die übrigens, selbst wenn sie auftritt, durch Neubestimmung der Ruhelage nach jeder Messung eliminirt wird. Eine dünne kreisförmige Platte aus Schwefel (Gewicht 0,660 gr, Durchmesser 21 mm, Dicke 0,95 mm) wird in einen Doppelhaken aus Ebonit befestigt. (Stäbchen von 20 mm Länge und 1—2 mm Durchmesser wurden in eine Ebonitgabel eingelegt.) In den Ebonithaken ist ein gefirnisstes Glasstäbchen eingekittet, das in den Spiegel mit zwei Haken eingehängt ist. Letzterer hängt an einem Haken in dem Aufhängecocon. Von einer Dämpfung wurde abgesehen. Der Condensator besteht aus kreisförmigen, am Rande abgerundeten Platten von 15 cm Durchmesser, die in beliebigen Abstand von einander gebracht werden können. Das Ganze befindet sich in einem Gehäuse, welches durch ein Drahtnetz vor äusseren Einwirkungen geschützt werden kann.

Die Drehungswinkel der Platte (und des Stäbchens) ergaben sich, wie es sein muss, den Quadraten der Potentialdifferenzen proportional. Um dieses zu constatiren, wurde eine Leydener Flasche durch einen Induktionsapparat geladen und durch ein Funkenmikrometer oscillirend entladen. Die Kugeln desselben hatten 1,1 cm Durchmesser. Die Entladungen des Induktoriums waren durchaus nicht regelmässig, wie das bei den Unterbrechungen durch einen Hammer nicht anders zu erwarten war. Das Instrument folgt aber jeder Veränderung des Hammers und der

Funkenstrecke unmittelbar und genau. Im Mittel aus einer Reihe von Beobachtungen ergaben sich folgende Zahlen:

Funkenlänge im Mikrometer	Ausschlag α	Ausschlag reducirt auf Winkel	Spannung berechnet
1 mm	37,65	37,63	1
2 „	116,6	116,4	1,759
3 „	193,0	191,7	2,257
4 „	322,5	316,7	2,901
5 „	428,8	408,2	3,353

Der Abstand von Spiegel und Skala war 1430 mm. Die letzten Zahlen der Columne sind unter der Annahme $V = C\sqrt{\alpha}$ berechnet, indem die Spannung für 1 mm = 1 gesetzt wurde.

Zum Vergleich mit den letzten Zahlen können die Versuche von Baille,[1]) Freyberg,[2]) Quincke,[3]) Paschen,[4]) Bichat und Blondlot,[5]) Heydweiller[6]) und Anderen dienen, welche zum Theil ebenfalls mit Kugeln von demselben Durchmesser gearbeitet haben und absolute Elektrometer benützt haben. Die Zusammenstellung der Zahlen von Baille und Bichat und Blondlot mit den unserigen ergiebt z. B.

Funkenlänge	Baille	Bichat und Blondlot	Graetz und Fomm
1 mm	1	1	1
2 „	1,739	1,708	1,759
3 „	2,447	2,373	2,257
4 „	2,940	2,963	2,901
5 „	3,572	3,497	3,353

1) Baille, Ann. chim. phys. (5) **25** p. 531. 1882.
2) Freyberg, Wied. Ann. **38** p. 231. 1889.
3) Quincke, Wied. Ann. **19** p. 562. 1883.
4) Paschen, Wied. Ann. **37** p. 69. 1889.
5) Bichat und Blondlot, Arch. de Gen. (3) **28** p. 40. 1892.
6) Heydweiller, Wied. Ann. 40 pag. 464. 1890.

Da die Potentialdifferenz bei 1 mm Funkenlänge nach Baille's Messungen 15,25, nach Bichat und Blondlot 16,1 elektrostatische Einheiten, also im Mittel 4700 Volt ist, so umfassen die obigen Messungen ein Intervall von 4700 bis 15300 Volt, ein Intervall, welches durch Aenderung des Plattenabstandes nach unten und oben beträchtlich ausgedehnt werden kann. Wir konnten mit diesem Instrument die Spannung einer Wechselstrommaschine von 60 Volt noch bequemen messen, so wie andererseits die Spannung von Funken von mehreren Centimetern Länge.

Die principiell wichtigen Fragen, durch welche Eigenschaften der Dielektrika diese Erscheinungen zu erklären sind und ob die hier auftretenden Kräfte nur statischer oder besser quasistatischer Art sind oder ob nicht vielmehr auch bereits elektrodynamische Kräfte im Dielektrikum auftreten, sollen einer folgenden Mittheilung vorbehalten bleiben, ebenso wie die Benutzung der hier auftretenden Kräfte zur Vergleichung der Dielektricitätsconstanten von Körpern, von denen man nur kleine Proben zur Verfügung hat.

München, Physik. Institut der Univers.
Juli 1893.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1893.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. 14. Band. 1892. 8⁰.

Société d'émulation in Abbeville:

Mémoires. Tom. XVIII. 1892. 8⁰.
Bulletin. Année 1891, No. 4. 1892, No. 1. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations 1890. 1892. 4⁰.

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XV, 2. XVI, 1. 1892. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Band 111, 112. 1892. 8⁰.
Monumenta. Vol. XXIII. 1892. 8⁰.
Ljetopis. Jahrg. 1892. 8⁰.

Archäologische Gesellschaft in Agram:

Viestnik. Band XIV, 4. 1892. 8⁰.

State Library in Albany:

Bulletin No. 3, January 1893. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Tom. XVII, 1891, pag. 555—621. Tom. XVIII, 1892, No. 1. 1891/92. 8⁰.

Historischer Verein in Augsburg:

Zeitschrift. XIX. Jahrgang. 1892. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XII, No. 102—105. 1893. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XII, 4. XIII, 1—3. 1891/92. 8⁰.

American Chemical Journal. Vol. 47, No. 2—7. 1892. 8⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XIV, No. 2, 3. 1892. 4⁰.
Studies in Historical and Political Science. X. Ser., No. 4—11. 1892. 8⁰.

Sternwarte in Bamberg:

Ueber die Untersuchung der Scalen eines Heliometers von Gerhard Lorentzen. Kiel 1892. 4⁰.

Historischer Verein in Bamberg:

52. und 53. Bericht für die Jahre 1890 und 1891. 1891/92. 8⁰.

Bataviaasch Genotschap von Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 36, aflev. 2. 1892. 8⁰.
Notulen. Deel 30, aflev. 3. 1892. 8⁰.
Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811. Deel X, 1776—1787. 1892. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Spomenik. XIX. 1892. 4⁰.
Glas. XXXVI, XXXVII. 1893. 8⁰.

Museum in Bergen:

Aarsberetning for 1891. 1892. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Politische Correspondenz König Friedrich's II. Bd. XIX. 1892. 8⁰.
Corpus inscriptionum Atticarum. Vol. II, pars 2. 1893. fol.
Sitzungsberichte 1892, No. 41—55. 4⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen zur geologischen Spezialkarte von Preussen. Bd. X, Heft 4. 1892. 4⁰.
Abhandlungen der k. preussischen geolog. Landesanstalt. Neue Folge, Heft 6—8 und 13. 1892. 4⁰.
Jahrbuch für das Jahr 1891. 1893. 8⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 25. Jahrg., No. 19, 20. 26. Jahrg., No. 1—11. 1892/93. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 44, Heft 3. 1892. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Jahrgang 1892 Band XXIII. 1893. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1886. 42. Jahrg. in 3 Abth. 1892. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. VI, No. 19—26. Bd. VII, No. 1—3. 1892/93. 8⁰.
Verhandlungen 1892—93. No. 1. 1893. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Die Entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur, von E. Lampe. 1893. 4⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:
Jahrbuch. Band VII, Heft 4 (1892). 1893. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:
Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1892. Heft II. 1893. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:
Jahrbuch. Bd. XXII, Heft 1, 2. Berlin 1893. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Berlin:
Vorschläge zu gesetzlichen Bestimmungen über elektrische Maasseinheiten, von E. Dorn. 1893. 4⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:
Wochenschrift 1892, No. 52. 1893, No. 1—18. Berlin. 4⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:
13. Jahrgang 1893, Heft 1—5, und Beiheft zum Jahrgang 1893. 8⁰.

Société d'émulation du Doubs in Besançon:
Mémoires. VI. Serie, Vol. 6, 1891. 1892. 8⁰.

Philosophical Society in Birmingham:
Proceedings. Vol. VIII, part 1. 1891/92. 8⁰.

Gewerbeschule in Bistriz:
XVII. Jahresbericht für 1891/92. 1892. 8⁰.

Accademia delle Scienze in Bologna:
Memorie. Serie V, Tom. 1. 1890. 4⁰.

Naturhistorischer Verein in Bonn:
Verhandlungen. 49. Jahrgang, 2. Hälfte. 1892. 8.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:
Bulletin. 1892, No. 23, 24. 1893, No. 1—7. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:
Actes. Vol. 44. 1891. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:
Mémoires. Série IV, Tom. II avec un appendice. 1891. 8⁰.

Public Library in Boston:
41. annual Report 1892. 1893. 8⁰.

Society of natural history in Boston:
Proceedings. Vol. XXV, parts 3, 4. 1892. 8⁰.
Memoirs. Vol. IV, No. 10. 1892. 4⁰.

Stadtarchiv in Braunschweig:
Heinrich Nentwig, Die Wiegendrucke in der Stadtbibliothek zu Braunschweig. Wolfenbüttel 1891. 8⁰.
Derselbe, Die mittelalterlichen Handschriften in der Stadtbibliothek zu Braunschweig. Wolfenbüttel 1893. 8⁰.

Meteorologische Station in Bremen:
Ergebnisse der meteorol. Beobachtung. Jahrg. II. 1892. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XII, Heft 3 und Beilage zu Bd. XII. 1893. 8⁰.

Historisch-statistische Sektion der mähr. Ackerbau-Gesellschaft in Brünn:

Dr. Balthasar Hubmaier von Johann Loserth. 1893. 8⁰.
Christian Ritter d'Elvert, Gedenkblätter zu s. 90. Geburtstage. 1893. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Brünn:

Verhandlungen. Band 30. 1892. 8⁰.
X. Bericht der meteorologischen Commission. 1892. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série, Tom. VI, No. 10, 11, Tom. VII, No. 1—5. 1892/93. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. 3. Série, Tom. 24, No. 12, Tom. 25, No. 1—4. 1892/93. 8⁰.

Bibliothèque Royale de Belgique in Brüssel:

Rapport, années 1890—1891. 1892. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XII, fasc. 1—3. 1893. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 34, 35. 1890/91. 8⁰.
Mémoires. Tom. I. 1892. 8⁰.

Société malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 25, 26. Année 1890, 1891. 8⁰.
Procès-verbaux 1891 et 1892, p. I—LXVI. 8⁰.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Ungarische Revue. 1892, Heft 10, 1893, Heft 1—5. 8⁰.

Academia nacional de Ciencias in Buenos Aires:

Boletin. Tom. X, entr. 4. 1890. 8⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Analele. Ser. II, Tom. 12. Memoriile. Tom 14. Partea administrativa. 1893. 4⁰.
S. Fl. Marianŭ, Inmormintarea la Romani. 1892. 8⁰.
S. Fl. Marianŭ, Nasterea la Romani. 1892. 8⁰.
Etymologicum Magnum Romaniae. Vol. III, Fasc. 1. 1893. 4⁰.

Institut météorologique de Roumanie in Bukarest:

Annales. Tom. VI. 1890, 1893. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 4. Série, Vol. 6, Fasc. 1—4. 1892. 8⁰.
Mémoires. Vol. 17, fasc. 3. 1892. 4.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Report on the Administration in 1891—92. 1892. fol.
Monthly Weather Review, June—October 1892. 1892. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. V, part 2. 1892. fol.
Meteorological Observations 1892, August, Sept., October. fol.
The Indian Weather Review for the year 1891. 1892. fol.
Report on the Meteorology of India in 1891. 1892. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Proceedings. 1892, No. 8, 9. 8⁰.
Journal. N. Ser., Vol. 61, No. 318. 1892. 8⁰.
Bibliotheca Indica. New Series 821, 823—826. 1892—93. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXV, part 4. Vol. XXVI, 1. 1892/93. 4⁰.
Palaeontologia Indica. Index by W. Theobald. 1892. fol.
Contents and Index of the first 20 Volumes of the Memoirs 1859—1883. By W. Theobald. 1892. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VIII, 1. 1893. 8⁰.

Museum of Comparative Zoology in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. XXIII, No. 4—6. XXIV, No. 1—3. XVI, No. 11, 12. 1892/93. 8⁰.
Annual Report for 1891—92. 1892. 8⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

47th annual Report for 1891—92. 1892. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 5. 1892. 4⁰.
Bullettino mensile. Nuova Ser., fasc. 30—32. (Dec. 1892 e Gennaio e Marzo 1893.) 8⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Jahr 1891. II. Hälfte. 1892. 4⁰.
D. Klima des Königr. Sachsen v. Paul Schreiber. Heft 1, 2. 1892/93. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 28. 1892. 8⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 3, No. 2, 3. 1893. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court":

The Open Court. No. 277—298. Chicago 1892/93. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlinger 1891. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft von Graubünden in Chur:

Jahresbericht. XXII. Jahrgang. 1892. 8⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1892, No. 101—105. 1893, No. 1—29, 32—41. Cöthen. fol.

Academia Nacional de ciencias in Córdoba (República Argentina):

Boletin. Tom. XI, entr. 4. Buenos Aires 1889. 8⁰.

Universität Czernowitz:

Verzeichniss der öffentlichen Vorlesungen. Somm.-Sem. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Darmstadt:

Quartalblätter. 1892, 4 Hefte. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver:

On a series of peculiar schists near Salida, Colorado, by Whitmann Cross. 1893. 8⁰.

The Production of Columbous and Tungstonsoxides. 1893. 8⁰.
Irving Hale, The latest Method of electric car control. 1893. 8⁰.
L. D. Godshall, A Review of the Russell Process. 1893. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Band 6, Theil 3. 1893. 8⁰.

Gelehrte estnische Gesellschaft in Dorpat:

Sitzungsberichte 1892. 1893. 8⁰.
Verhandlungen. Band XVI, 2. 1892. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XII, Septb.—Decemb. 1891. Tom. XIII, Janv.—Juin 1892. 1892. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:

XXII. Jahresbericht. 1892. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. III. Series, Vol. II, No. 3. 1892. 8⁰.
Transactions. Vol. 30, part 1—4. 1892/93. 4⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XIX, pag. 81—295. 1892. 8⁰.

Royal physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session CXXI, pag. 173—308. 1892. 8⁰.

Carl Friedrichs-Gymnasium in Eisenach:

Jahresbericht von 1892—1893. 4⁰.

Gesellschaft f. bildende Kunst u. vaterländische Altertümer in Emden:

Jahrbuch. Band X, Heft 1. 1892. 8⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F., Band 18. 1892. 8⁰.

R. Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. 4. Ser., Vol. XV, 3, 4. Vol. XVI, 1. 1892/93. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:

Abhandlungen. Band XVIII, Heft 1. 1892. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:

Helios. 10. Jahrgang, No. 9. 1892. 8⁰.
Societatum Litterae. Jahrgang 1892, No. 11, 12. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Band 6, Heft 1—4. 1891/92. 8⁰.

Kirchlich-historischer Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diöcesan-Archiv. 23. Band. 1893. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land." Jahrgang 17, Heft 1, 2. 1892. fol.

Universität in Freiburg (Schweiz):

Index lectionum per menses hiemales 1892—93. 4⁰.

Congresso botanico internazionale in Genua:

Atti 1892. 1893. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:
Annali. Ser. II, Vol. XII. 1892. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:
Abhandlungen. Band XX. 1893. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Band 68, Heft 2. 1892. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Gelehrte Anzeigen. 1892, No. 21—26. 1893, No. 1—6. gr. 8⁰.
Nachrichten. 1892, No. 13—16. 1893, No. 1—3. gr. 8⁰.
Abhandlungen. Band 38. 1892. 4⁰.

Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha:
64. Jahresbericht f. d. Jahr 1892. 1893. 8⁰.

Denison University in Granville, Ohio.
The Journal of Comparative Neurology. Vol. II, p. 137—192. Vol. III, p. 1—34. 1892/93. 8⁰.
Scientific Laboratories. Bulletin. Vol. VII. 1892. 8⁰.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz:
Mittheilungen. XXIX. Jahr 1892. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:
Mittheilungen. Heft 28, 1891. 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:
Mittheilungen. 24. Jahrgang. Berlin 1892. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:
Jahresbericht von 1892—93. 4⁰.

Universität Groningen:
Jaarboek 1877/78—1891/92 1879—1893. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:
Bijdragen. V. Reeks, Deel VIII, aflev. 1, 2. 1893. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldino-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:
Leopoldina. Heft 28, No. 21—24, Heft 29, No. 1—6. 1892/93. 4⁰.

Deutsche Morgenländische Gesellschaft in Halle a. S.:
Zeitschrift. Band 46, Heft 4. Band 47, Heft 1. Leipzig 1892/93. 8⁰.
Abhandlungen f. d. Kunde d. Morgenlandes. Bd. IX, 4. Leipz. 1893. 8⁰.

Universität Halle:
Index scholarum per aestatem 1893 habendarum. 4⁰.

Naturwissensch. Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 65. Leipzig 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:
Abhandlungen. Band XII, Heft 1. 1893. 4⁰.

Wetterauische Gesellschaft für Naturkunde in Hanau:
Bericht. 1. April 1889 bis 30. November 1892. 1893. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:
Zeitschrift. Jahrgang 1892. 8⁰.

Teylers godgeleerd Genootschap in Harlem:
Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst. N. S., Deel XIII. 1893. 8⁰.

Société Hollandaise des sciences in Harlem:
Archives Néerlandaises. Tom. 26. Livr. 4, 5. 1893. 8⁰.
Oeuvres complètes de Christiaan Huygens. Tom. V. La Haye 1893. 4⁰.

Universität Heidelberg:
Idee und Grundlinien einer allgemeinen Geschichte der Mystik, von Adalbert Merx. 1893. 4⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:
Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrgang III, Heft 1. 1893. 8⁰.

Naturforschender medicinischer Verein in Heidelberg:
Verhandlungen. N. F., Band V, Heft 1. 1893. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:
Fennia. Tom. 6, 7. 1892. 8⁰.

Société finno-ougrienne in Helsingfors:
Mémoires, IV. 1892. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:
Reden zur Eröffnung der 43.—45. Generalversammlung. 1890—92. 8⁰.
Jahresbericht für 1891/92. 8⁰.
Archiv. N. F., Band 24, Heft 3. 1893. 8.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:
Jahrbuch. 20. Jahrgang 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein in Innsbruck:
Berichte. 20. Jahrgang 1891/92. 1893. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:
Jenaische Zeitschrift f. Naturwissenschaften. Bd. 27, Heft 3, 4. 1893. 4⁰.

Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie in Karlsruhe:
Jahresbericht für 1892. 1893. 4⁰.

Grossherzogliche Sternwarte in Karlsruhe:
Veröffentlichungen. Heft 4. 1892. 4⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:
Bulletin. II. Série, Tom. I, No. 3. Tom. II, No. 4. 1893. 8⁰.

Universität in Kasan:
Utschenia Sapiski. Band 60, Heft 1—3. 1893. 8⁰.
Abhandlungen der vierten Versammlung der russischen Naturforscher in Kasan im Jahre 1873. 5 Hefte. 1875. 4⁰.

Verein für hessische Geschichte in Kassel:
Mittheilungen. Jahrgang 1890 und 1891. 8⁰.
Zeitschrift. N. F., Bd. 16, 17. 1891—92. 8⁰.

Section médicale de la société des sciences expérimentales in Kharkow:
Travaux. 1892, Heft 1. 8⁰.

Université Impériale de Kharkow:

Annales. Vol. I. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Band 22. 1892. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Band XXXII, 11, 12. XXXIII, No. 1—5. 1892/93. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:

Értesitö. 5 Hefte. 1892. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:

Mittheilungen. Heft 1—22. 1883—1892. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Führer durch die geologischen Sammlungen des Provinzialmuseums von Alfr. Jentzsch. 1892. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1892. No. 2. 8⁰.
Skrifter, 5ᵉ Raekke, Historisk Afd. Bd. V, No. 4. 6ᵉ Raekke, Naturvidenskabelig Afd. Bd. VI, No. 6. 1892. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Nordiske Fortidsminder. Heft 2. 1893. 4⁰.
Aarböger, II. Raekke. Bd. VII, Heft 3, 4. Bd. VIII, Heft 1. 1892/93. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1892, Dezember. 1893, Januar—April. 8⁰.
Rocznik. Rok 1890. 1891/92. 8⁰.
Biblioteka pisarzów polskich. Tom. XXIII. 1892. 8⁰.
L. Teichmann, Elephantiasis. 1892. Text in 4⁰ und Tafeln in fol.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 3. Série, Vol. XXVIII, No. 109, 110. 1892/93. 8⁰.

Société d'histoire de la Suisse romande in Lausanne:

Mémoires et Documents. Tom. 37. 1893. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie, Deel XII, aflev. 1, 2. 1893. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil XI, Heft 4. XII, 1. Leipzig 1892/93. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Publikation XX. 1892. 4⁰.
Vierteljahresschrift. 27. Jahrgang, Heft 4. 1892. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Bd. XIII, No. 5, 6. 1893. 4⁰.
Abhandlungen der mathem.-physikalischen Classe. Bd. XIX. 1893. 8⁰.
Berichte der philol.-histor. Classe. 1892, III. 1893. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. 1892, IV—VI. 1893, I. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F., Bd. 46, No. 23, 24. Bd. 47, No. 1—8. 1893. 8⁰.

K. K. Bergakademie in Leoben:

Programm für das Studienjahr 1893/94. 8⁰.

Universität Lille:

Travaux et Mémoires. Tom. II, No. 7—9. 1892. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin of the agricultural Experiment Station, No. 25-27. 1892/93. 8⁰.
6th annual Report for 1892. 1893. 8⁰.

Commissao dos trabalhos geologicos de Portugal in Lissabon:

Communicações. Tom. II, fasc. 2. 1892. 8⁰.

Observatory in Liverpool:

Meteorological Results during the years 1889—1891. 1893. 8⁰.

Université Catholique in Loewen:

Annuaire 1893, 8⁰ und 3 theologische Dissertationen. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tom. VIII, fasc. 2. 1892. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XIII, part 3, No. 86. 1893. 8⁰.
List of the Membres. 1892. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Histor. Review. Vol. VIII, No. 29, 30. 1893. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. LII, No. 317—322. 1893. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 53, No. 2—7. 1892/93. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal 1892. Supplementary Number. 1893, No. 362—367. (Jan.—June.) 8⁰.
List of the Fellows. 1892. 8⁰.
Proceedings. Session 1892—93. No. 117—122. Session 1893—94. No. 123—124. 1893. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1893. Part 1, 2. 8⁰.

Zoological Society in London:

Transactions. Vol. XIII, 5, 6. 1893. 4⁰.
Proceedings. 1892. Part 4. 1893. Part 1. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 47, No. 1207—1221. Vol. 48, No. 1227. 1892/93. 4⁰.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom. 28, Afdel I u. II. 1891/92. 4⁰.

Université in Lyon:

Annales. Tom. II, 4. IV. VI, 1, 2. Paris 1892 93. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:

Publications. Vol. 6, parts 3 and 4. 1892. 8⁰.

Government Obseratory in Madras:

Results of Observations of the fixed Stars. Vol. VI. 1893. 4⁰.
Hourly Meteorological Observations made at the Madras Observatory 1856 to 1861. 1893. 4⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. XXII, No. 1—5. 1893. 8⁰.

Società italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 34, fasc. 1. 1892. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio storico Lombardo. Ser. II, Anno XIX, fasc. 4. Anno XX, fasc. 1. 1892/93. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. VI, 4. Series. 1892. 8⁰.

Historischer Verein in Marienwerder:

Zeitschrift. Heft 30. 1893. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. I (suite et fin). Tom. II, fasc. 1—6. 1892. 4⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen:

Mittheilungen. Band III, Heft 1. 1891. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. 4. Jahrgang, II. Hälfte. 1892. 4⁰.

Sociedad científica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias. Tom. VI, No. 3—8. 1892/93. 8⁰.

Società dei Naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III, Vol. XI, fasc. 3. 1893. 8⁰.

Société Impér. des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1892, No. 3, 4. 1893. 8⁰.

Les Musées public et Roumiantzow in Moskau:

Compte-rendu des Musées pour les années 1889—91. 1892. 8⁰.
Description systématique des collections du Musée Ethnographique Daschkow. Livr. 3. 1893. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie und Urgeschichte in Berlin und München:

Korrespondenzblatt. 1892, No. 11, 12. 1893, No. 1, 3, 5. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:

Personalstand. Somm.-Sem. 1893. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit f. d. J. 1893. 8⁰.

Universität München:

Dissertationen aus den Jahren 1891/92. 4⁰ und 8⁰.
Amtliches Verzeichniss des Personals. Somm.-Sem. 1893. 8⁰.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte II, 1892. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Monatsschrift. Januar bis Juni 1893. 8⁰.

Kaufmännischer Verein in München:
19. Jahresbericht. 1893. 8⁰.

Westfälischer Provinzialverein in Münster:
20. Jahresbericht für 1891. 1892. 8⁰.

Verein für Geschichte Westfalens in Münster:
Zeitschrift. Band 50. 1892. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:
Mémoires. 142e année, 5e Série, Tom. IX. 1892. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Tom. XII, fasc. 26. 1892. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche in Neapel:
Rendiconto. Ser. II, Vol. VI, fasc. 7—12, Vol. VII, fasc. 1—5. 1892/93. 4⁰.

Reale Accademia di scienze morali e politiche in Neapel:
Atti. Vol. 24, 25. 1891/92. 8⁰.
Rendiconto. Anno 28—30 (1889—91). Anno 31 (1892 Jan.—Juni). 1890—92. 8⁰.

Società di storia patria in Neapel:
Archivio storico per le Provincie Napoletane. Anno 17, fasc. 4. 1892. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg:
Kollektaneen-Blatt. 55. Jahrgang. 1892. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-upon-Tyne:
Transactions. Vol. 41, part 6. Vol. 42, part 1—3. 1892/93. 8⁰.
Annual report for the year 1891 - 92. 1892. 8⁰.

Connecticut Academy of Arts and Sciences in New-Haven:
Transactions. Vol. VIII, 2. IX, 1. 1892/93. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. Vol. 44, No. 263, 264, Nov.—Dec. 1892. Vol. 45, No. 265 bis 268, Jan.—April 1893. 8⁰.

Astronomical Observatory of Yale University in New-Haven:
Transactions. Vol. I, part 3 and 4. 1893. 4⁰.

American Oriental Society in New-Haven:
Journal. Vol. XV, 3. 1893. 8⁰.

Astor Library in New-York:
44 th annual Report for the year 1892. 1893. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Vol. IV. 1892. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:
Journal. Vol. XIV, No. 8—10. XV, No. 1. 1892/93. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. XXIV, No. 4. Vol. XXV, No. 1. 1892/93. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:
Anzeiger. Jahrgang 1892.
Mittheilungen. Jahrgang 1892. 8⁰.
Katalog der Holzstöcke vom XV.—XVIII. Jahrh. Theil I. 1892. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:
Sapiski. Tom. XVII, 2, 3. 1892/93. 8⁰.

Verein für Geschichte von Osnabrück in Osnabrück:
Mittheilungen. Band. 17. 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Osnabrück:
9. Jahresbericht für die Jahre 1891 und 1892. 1893. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:
Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. I, part 4. 1892. 8⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Paderborn:
Verzeichniss der Büchersammlung des Vereins. 1893. 8⁰.

Reale Accademia di scienze in Padua:
Atti e Memorie. N. S., Vol. 8. 1893. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:
Atti. Ser. II, Vol. I, fasc. 1. 1893. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:
Rendiconti. Tom. VI, fasc. 6. Tom. VII, fasc. 1, 2. 1892/93. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:
Atti, Annata 14. 1891, Maggio—Dicembre. 1891. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:
Bulletin. 1892, No. 52. 1893, No. 1—23. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Série I, Tom. VII. 1892. 4⁰.
Comptes rendus. Tom. 115, No. 26. Tom. 116, No. 1—23. 1892. 4⁰.

Bibliothèque nationale in Paris:
Catalogue des monnaies musulmanes. Espagne et Afrique. 1891. 8⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:
Procès-verbaux des séances de 1891. 1892. 8⁰.
Quinzième Rapport. 1892. 4⁰.

Commission permanente du Répertoire des sciences mathémat. in Paris:
Index du Répertoire. 1893. 8⁰.

École polytechnique in Paris:
Journal. Cahier 61, 62. 1891—92. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:
Moniteur. Livr. 613—618, Janv.—June 1893. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:
Annales in 4⁰. Tom. 19—21. 1892. 4⁰.
Annales (Bibliothèque d'études) in 8⁰. Tom. I. 1892. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tom. 24, No. 3. Tom. 25, No. 1—3. Tom. 26, No. 1. 1891/92. 8⁰.
Introduction au Catalogue du Musée Guimet. 1891. 8⁰.

Société d'anthropologie in Paris:
Mémoires. II. Série, Tom. 4, fasc. 3. 1892. 8⁰.
Bulletins. IV. Série, Tom. 2, fasc. 4. Tom. 3, fasc. 1, 2. 1891/92. 8⁰.
Catalogue de la Bibliothèque. Partie I, II. 1891. 8⁰.
La détermination de la taille par L. Manouvrier. 1892. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus 1892, No. 17, 18. 1893, No. 1—10. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 20, No. 7, 8. Tom. 21, No. 1—4. 1892/93. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 17, No. 8. 1892. 8⁰.
Mémoires. Tom. 5, partie 5. 1892. 8⁰.

Zeitschrift „L'Electricien" in Paris:

L'Electricien, No. 105—126, 2. Ser. 1892/93. 4⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Bulletin. Nouv. Série, Tom. III, No. 1—3. 1893. 4⁰.
Mémoires. Tom. 38, No. 14. Tom. 40, No. 1, 2. Tom. 41, No. 1. 1892. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Vol. XII, 2. 1893. 8⁰.

K. russische archäolog. Gesellschaft in Petersburg:

Sapiski. Bd. V, Heft 3, 4. 1892. 4⁰.

Chemisch-physikalische Gesellschaft an der k. russ. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXIV, No. 9. XXV, No. 1—4. 1892/93. 8⁰.

Institut Impérial de médecine experimentale in St. Petersburg:

Archives des sciences biologiques. Tom. I, No. 4. 1892. 4⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen, 1891. Theil I und II. 1892. 4⁰.
Repertorium der Meteorologie. Band XV. 1892. 4⁰.

Société des Naturalistes de St. Petersbourg:

Travaux. Section de zoologie. Tom. XXIII, 1, 2. Section de botanique. Tom. XXII. 1892. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Ottschet. 1892. 1893. 8⁰.
Protokoly No. 46, 47. 1893. 8⁰.
M. J. Sweschnikow, Grundriss und Ziel der Selbstverwaltung. 1892. 8⁰.
A. O. Iwanowsky, Ueber die chinesische Uebersetzung des buddhistischen Sammelwerks Jātakamata. 1893. 8⁰.
Derselbe, Kupfergeld in der Mandschurei. 1893. 8⁰.
Sergei Georgiewski, Mythische Anschauungen und Mythen der Chinesen (in russischer Sprache). 1893. 8⁰.
Sapiski (Histor.-philol. Fakultät). Vol. 31. 1893. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. Series II, Vol. IX, part 3. 1892. fol.
Proceedings. 1892, part II, III. 1892. 8⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. 40th annual Meeting 1892. 8⁰.

Geographical Club in Philadelphia:

Bulletin. Vol. I, Nr. 1. 1893. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XVI, No. 3, 4. XVII, No. 1. 1892/93. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. XXX, No. 139. 1892. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti, Processi verbali. Vol. VIII, pag. 157—176. 1892. 4⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für das Jahr 1892/93. 4⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Die europäische Längengradmessung im 52. Grad Breite von Greenwich bis Warschau. Heft I. Berlin 1893. 4⁰.

Jahresbericht des geodätischen Instituts 1891—92. Berlin 1892. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef Akademie der Wissenschaften, Literatur und Kunst in Prag:

Almanach. Ročnik I—III. 1891-93. 8⁰.

Rozprawy I. (Philosophische und historische Abtheilung). Jahrgang I. 1891/92 in 4 Heften. 8⁰.

Rozprawy II. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Abtheilung). Jahrgang I. 1891/92 in 42 Heften. 8⁰.

Rozprawy III. (Philologische Abtheilung.) Jahrgang I. 1891/92 in 5 Heften. 8⁰.

(Abhandlungen). I. Abtheilung 1 Band. II. Abtheilung 3 Bände. III. Abtheilung 1 Band. 8⁰.

Historiký Archiv. Band I. 1893. 8⁰.

Vestník. Band I in 12 Heften. 1891/92. 8⁰.

Mappy staré Prahy. (Karte des alten Prag von 1200—1419). 1892. fol.

V. E. Mourek, Kronika Dalimilova. 1892. 8⁰.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Sitzungsberichte. a) philos.-hist.-philologische Klasse 1892. 1893. 8⁰.
b) mathem.-naturwissensch. Klasse 1892. 1893. 8⁰.

Jahresbericht für das Jahr 1892. 1893. 8⁰.

Regesta diplomatica Bohemiae et Moraviae. Pars IV. 1892. 8⁰.

Hermenegildus Jireček, Antiquae Boemiae topographia historica. Vindobonae 1893. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Casopis. Band 22, Heft 1—4. 1893. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1892. 1893. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:

Casopis. Band 66, No. 1—4. 1892. 8⁰.

Deutsche Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Sem. 1893. 8⁰.

Instituto historico e geographico in Rio de Janeiro:

Revista trimensal. Tom. 54, parte 2. Tom. 55, parte 1. 1892. 8⁰.

J. M. Pereira da Silva, Christovam Colombo. 1892. 8⁰.

Colombo, Poema por Manoel de Araujo Porto-Alegre. 1892. 4⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario. Anno VIII. 1892. 8⁰.
Le climat de Rio de Janeiro par L. Cruls. 1892. 4⁰.

Rochester Academy of Science in Rochester. N. Y.:

Proceedings. Vol. II, part 1. 1892. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester. N. Y.:

Bulletin. Vol. III. 1892. 8⁰.

Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1893. 8⁰.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. I, 2. semestre, fasc. 11, 12. Vol. II, 1. semestre, fasc. 1—7. 1892/93. 4⁰.
Atti. Serie IV, classe di scienze morali. Vol. X, parte 2. Notizie degli scavi Settembre, Ottbre. e Nov. 1892. 1892. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali e filologiche. Serie V, Vol. I, fasc. 10—12, Vol. II, fasc. 1, 2. 1892/93. 8⁰.

Biblioteca Vaticana Rom:

Regesti Clementis Papae V Appendices. Tom. I. 1892. fol.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1892, No. 3, 4. 1893, No. 1. 8⁰.
Memorie. Vol. IV, parte 2. Firenze 1893. 4⁰.

Archäologisches Institut (römische Abtheilung) in Rom:

Mittheilungen. Band VII, fasc. 3, 4. 1893. 8⁰.

Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XV, fasc. 3, 4. 1892. 8⁰.

Società Romana per gli studi zoologici in Rom:

Bollettino. Vol. I, No. 6. 1892. 8⁰.

Ufficio centrale meteorologico in Rom:

Annali. Vol. VI, parte 1, 2, 1889. 1893. 4⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis des travaux, année 1890—91. 1892. 8⁰.

University of California in Sacramento:

Contributions from the Lick-Observatory, No. III. 1893. 8⁰.

American Association for the Advancement of science in Salem:

Proceedings. 41 st Meeting held at Rochester, August 1892. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 32. Vereinsjahr 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht. Vereinsjahr 1890/91. 1892. 8⁰.

California Academy of sciences in San Francisco:

Occasional Papers. III. 1893. 8⁰.
Zoe, a biological Journal. Vol. I, II. 1890—91. 8⁰.

Geographical Society of California in San Francisco:

Bulletin. Vol. 1, part 1. 1893. 8⁰.

Société scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tom. II, 3. 1893. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di archeologia. Anno XV, No. 10—12. Anno XVI, No. 1—4. 1892/93. 8⁰.

K. Bibliothek in Stockholm:

Accessions-Katalog No. 7, 1892. 1893. 8⁰.

Nordiska Museet in Stockholm:

Skansen och Nordiska Museets Anläggningar, of Herman A. Ring. 1893. 8⁰.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. 26, fasc. 10. Tom. 27, fasc. 1—5. 1892/93. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württembergische Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F., Jahrgang I, Heft 3, 4. 1892. 8⁰.

K. Statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württemberg. Jahrbücher f. Statistik u. Landeskunde. Jahrg. 1892. 4⁰.
Beschreibung der Oberämter Ehingen und Reutlingen. 1893. 8⁰.

Department of Mines in Sydney:

Records of the geological Survey. Vol. III, part 2. 1892. 4⁰.

Royal Society of New-South Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. 26. 1892. 8⁰.

College of Science, Imperial University in Tokyo, Japan:

The Journal. Vol. V, part 3. VI, part 1. 1893. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. III, part 1. 1892. 8⁰.

Società Adriatica di scienze naturali in Triest:

Bollettino. Vol. XIV. 1893. 8⁰.

Korrespondenzblatt für die Gelehrten und Realschulen Württembergs in Tübingen:

Korrespondenzblatt. Jahrg. 39, Heft 9—12. Jahrg. 40, Heft 1, 2. 1892/93. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. XXVIII, disp. 1—8. 1892/93. 8⁰.
Memorie. Serie II, Tom. 42. 1892. 4⁰.

Gesellschaft der humanistischen Wissenschaften in Upsala:

Skrifter. Band I. 1890—92. 8⁰.

Observatoire météorologique de l'Université in Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. 24. 1892. fol.

Physiologisches Laboratorium in Utrecht:

Onderzoekingen. IV. Reeks. Deel II, 2. 1893. 8⁰.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Serie XIV, Vol. 2, fasc. 1—6. Serie XV, Vol. 1, fasc. 1—6. Serie XV, Vol. 2, fasc. 1—6. 1890/91. 8⁰.

Reale Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Memorie. Vol. 23, 24. 1887 und 1891. 4⁰.
Atti. Tom. 38 = Serie VII. Tom. 2, disp. 1—10. 1890/92. 8⁰.

National Academy of sciences in Washington:

Memoirs. Vol. V. 1891. 4⁰.

Bureau of Ethnology in Washington:

Contributions to North American Ethnologie. Vol. VII. 1890. 4⁰.
VII th annual Report 1885—1886. 1891. 4⁰.
Bibliography of the Athapascan Languages by J. C. Pilling. 1892. 8⁰.

Volta Bureau in Washington:

Education of the Deaf by Jos. Claybaugh Gordon. 1892. 8⁰.

U. S. Department of Agriculture, Division of Ornithology in Washington:

Bulletin No. 3. 1893. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Washington:

Meteorological Observations. 1892, June, July. fol.
Monthly Weather Review. 1892, July, August. fol.

Smithsonian Institution in Washington:

Report of the U. S. National Museum for the year ending June 30, 1890. 1891. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year ending June 30, 1892. 8⁰.

Nautical Almanac Office in Washington:

Astronomical Papers of the American Ephemeris. Vol. II u. III. 1891. 4⁰.

Surgeon General's Office U. S. Army in Washington:

Index Catalogue. Vol. XIII. 1892. 4⁰.

Grossherzogliche Bibliothek in Weimar:

Zuwachs in den Jahren 1889—1892. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes in Wernigerode:

Schriften. 7. Jahrg. 1892. 8⁰.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Denkschriften. Philos.-hist. Classe, Bd. 41. 1892. 4⁰.
Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe, Bd. 126. 8⁰.
Sitzungsberichte. Mathem.-naturwissensch. Classe. Abtheilung I, 1891, No. 8—10. 1892, No. 1—6. Abtheilung IIa, 1891, No. 8—10. 1892, No. 1—5. Abtheilung IIb, 1891, No. 8—10. 1892, No. 1—5. Abtheilung III, 1891, No. 8—10. 1892, No. 1—5. 8⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 78, I. Hälfte. 1892. 8⁰.
Fontes rerum austriacarum. Abtheil. II, Bd. 46 u. 47, I. Hälfte. 1892. 8⁰.
Almanach. 42. Jahrgang. 1892. 8⁰.
Venetianische Depeschen vom Kaiserhofe. Band 2. 1892. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1892, No. 11—18. 1893, No. 1—5. 4⁰.
Jahrbuch. Jahrg. 1892, Band 42, Heft 2—4. 1893. 4⁰.

K. K. Hofbibliothek in Wien:

Tabulae codicum manu scriptorum. Tom. VIII. 1893. 8⁰.
Verzeichniss der im grossen Saale ausgestellten Schaustücke. 1893. 8⁰.

K. K. Gradmessungs-Bureau in Wien:

Astronomische Arbeiten d. K. K. Gradmessungs-Bureau. Bd. 4. 1892. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1893, No. 1—21. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band XXII, Heft 6. XXIII, 1—3. 1892/93. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 35. 1892. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Jahrg. 1892, Bd. 42, Quartal III u. IV. 1892/93. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. VII, No. 4. Bd. VIII, No. 1. 1892/93. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 32. Bd., Jahrg. 1891/92 mit einem Nachtrag. 1892. 8⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde in Wiesbaden:

Annalen. 25. Band. 1893. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Band XXIV, No. 6—8. 1893. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1892, No. 7—10. 1893. 8⁰.

Schweizerische meteorol. Centralanstalt in Zürich:

Annalen. 1890. 4⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band XXIII, 5. Leipzig 1893. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrschrift. 37. Jahrg., Heft 3, 4. 1892. 8⁰.

Universität in Zürich:

Schriften a. d. J. 1892—93. 4⁰ und 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

S. H. Albert I., Fürst von Monaco:

Projet d'observations météorologiques sur l'Océan Atlantique. Paris 1893. 4⁰.
Résultats de campagnes scientifiques, fasc. 3, 4. 1892/93. fol.
Zur Erforschung der Meere und ihrer Bewohner, aus dem Französ. von E. v. Marenzeller. Wien 1891. 8⁰.

M. Berthelot in Paris:

Traité pratique de calorimétrie chimique. 1893. 8⁰.

Hartmann Caviezel in Chur:

Register dils mastrals (mistrali) dil cumin d'Ortenstein. 1892. 8⁰.
General-Lieutenant Johann Peter Stoppa. 1893. 8⁰.

H. Fritsche in Petersburg:

Ueber die Bestimmung der geographischen Länge und Breite in Asien und Europa 1867—1891. 1893. 8⁰.

Anton Ganser in Graz:

Der reine Gottesbegriff und dessen Wichtigkeit. 1892. 8⁰.

Hugo Gyldén in Stockholm:

Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes. 1892. 4⁰.

H. v. Helmholtz in Berlin:

Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung. 1892. 8⁰.
Zusätze und Berichtigungen zu vorigem Aufsatze. 1893. 8⁰.

Karl Holder in Freiburg in der Schweiz:

Die Designation der Nachfolger durch die Päpste. 1892. 8⁰.

Jos. Bernh. Jack in Konstanz:

Botanischer Ausflug in's obere Donauthal. 1892. 8⁰.

Friedrich Keinz in München:

Ein Verzeichniss der Augsburger Meistersinger des XVI. Jahrhunderts. 1893. 8⁰.

Nicolai von Kokscharow in St. Petersburg:

Materialien zur Mineralogie Russlands. Vol. XI, p. 97—137. 1893. 8⁰.

J. V. Kull in München:

Repertorium zur Münzkunde Bayerns. Heft III. 1892. 8⁰.

S. N. Katna in Przemysl:

Die Schöpfungslehre der mosaischen Urkunde. 1892. 8⁰.

Monsignor Fréd. La China in Vittoria (Sicilia):

Uomini e cose. Dialoghi. 2 Voll. 1893. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

The Absolution Formula of the Templars. Sep.-Abdruck. 1893. 8⁰.

A. Legrelle in Paris:

Une négotiation inconnüe entre Berwick et Marlborough. 1893. 8⁰.

Emile Lemoine in Paris:

La géométrographie. 1892. 8⁰.
3 mathematische Broschüren. 1893. 8⁰.

Alexander Macfarlani in Austin, Texas:

The Imaginary of Algebra. Salem. 1892. 8⁰.
The fundamental Theorems of Analysis. Boston 1893. 8⁰.

T. C. Mendenhall in Washington:

Determinations of Gravity with half-second pendulums. 1892. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 51, No. 1, 2. Tom. 52, No. 1. Paris 1893. 8⁰.

Jules Oppert in Paris:

La fixation exacte de la chronologie des derniers rois de Babylone. 1893. 8⁰.

C. Schmidt in Strassburg:

Herrade de Landsberg. 1893. 8⁰.

H. Schuermans in Lüttich:

La pragmatique sanction de Saint Louis. Fasc. 4, 5. Bruxelles 1892. 8⁰.

T. J. J. See aus Columbia, Missouri, in Berlin:

Die Entwickelung der Doppelstern-Systeme. 1893. 4⁰.

Simon Sepp in Freising:

Pyrrhonëische Studien. 1893. 8⁰.

L. Serrurier in Leyden:

Japanese-English Dictionary. Vol. III. 1892. 8⁰.
Professor Schlegel's Criticism of Japanese-English Dictionary. 1893. 8⁰.

Christian Friedrich Seybold in Tübingen:

Lexicon Hispano-Guaranicum. Stuttgart 1893. 8⁰.

Michele Stossich in Triest:

Il genere Angiostomum Dujardin. 1893. 8⁰.
Osservazioni elmitologiche. Zagreb 1892. 8⁰.

J. de Mendizábal Tamborrel in Paris:

Tables des Logarithmes. 1891. fol.

Colonel J. F. Tennant in Calcutta:

Report on the preparations for, and observations of the Transit of Venus, on Dec. 8, 1874. 1877. 4⁰.

G. H. Otto Volger, Warte Sonnenblick am Taunus:

Die Lichtstrahlen, allgemein verständliche Begründung eines wichtigen Abschnittes der physiologischen Optik. Emden 1892. 8⁰.

Frau Gerhard vom Rath in Bonn:

Sach- und Orts-Verzeichniss zu den mineralogischen u. geologischen Arbeiten von Gerhard vom Rath, von W. Bruhns u. K. Busz. Leipzig 1893. 8⁰.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. LXXXI. 1893. 8⁰.

Silvestro Zinno in Neapel:

Nuovi studii sperimentali sultricloruro di boro. 1893. 4⁰.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathemathisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 4. November 1893.

1. Herr E. v. LOMMEL legt eine Mittheilung der Herren Prof. Dr. L. GRAETZ und Dr. L. FOMM: „Ueber die Bewegung dielektrischer Körper im homogenen elektrostatischen Feld“ vor.

2. Herr K. A. v. ZITTEL übergibt der Classe ein Werk von Prof. Dr. RICHARD LEPSIUS in Darmstadt: „Geologie von Attika“ und bespricht den wesentlichen Inhalt desselben.

3. Herr AD. v. BAEYER berichtet in längerem Vortrage über den Fortgang seiner Arbeiten über die Terpene.

4. Herr PAUL GROTH macht Mittheilungen über seine Reise nach Nordamerika und die dabei für die mineralogische Sammlung erhaltenen reichhaltigen und werthvollen Geschenke.

Ueber die Bewegung dielektrischer Körper im homogenen elektrostatischen Feld.

Von L. Graetz und L. Fomm.

(Eingelaufen 4. November.)

Wenn eine sehr kleine, dielektrische, homogene Kugel in ein homogenes elektrostatisches Feld gebracht wird, so erhält sie nach allgemeiner Annahme, welche jeder Theorie der Dielektrika zu Grunde gelegt wird, ein dielektrisches Moment, dessen Richtung mit der Richtung der Kraftlinien des Feldes übereinstimmt. Eine solche Kugel kann daher weder eine fortschreitende, noch wenn sie drehbar aufgehängt ist, eine drehende Bewegung in dem Felde ausführen. Ebenso wie eine Kugel wird ein jedes Ellipsoid in einem homogenen Feld gleichmässig elektrisch.[1]) Welche Richtung die Axe des dielektrischen Moments dabei erhält, hängt von weiteren Annahmen ab. Mascart und Joubert[2]) nehmen an, dass die kleinen leitenden Körperchen, welche in einem

1) s. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus, herausgegeben von Planck, S. 163. Der dort für die magnetische Induktion gegebene Beweis gilt wörtlich auch für die dielektrische Polarisation.

2) Mascart und Joubert, Elektricität und Magnetismus I § 182 (deutsche Ausgabe S. 162).

Dielektrikum sich befinden sollen, keine Kräfte auf einander ausüben. Dann fällt die Axe der Dielektrisirung mit der Richtung der Kraftlinien zusammen und sie behaupten daher, dass, welche Lage auch ein solches Ellipsoid im Felde haben möge, es weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung ausführen kann. Dieser Schluss gilt nicht mehr, falls man zwischen den polarisirten Elementen des Dielektrikums innere Kräfte annimmt, wie es z. B. die von Thomson modificirte Theorie von Poisson thut. Die Thatsache, ob Drehungen stattfinden oder nicht, ist dann ein Kriterium dafür, ob innere Kräfte in Wirksamkeit kommen oder nicht. Die Maxwell-Hertz'sche Theorie der Dielektrika, nach welcher ein dielektrischer Körper durchweg als dielektrisch homogen betrachtet wird, kennt solche inneren Kräfte nicht. Ihre Grundgleichungen stimmen aber mit denen der Thomson'schen Theorie überein, und sie erfordert daher eine besondere Untersuchung darüber, warum solche Drehungen stattfinden.

Den angeführten Behauptungen von Mascart und Joubert wird nun vom Experiment in der vollkommensten Weise widersprochen. Dünne Stäbchen und dünne Kreisscheiben, die beide specielle Fälle von Ellipsoiden sind, drehen sich, wenn sie drehbar aufgehängt sind, in ganz homogenen Feldern stets und zwar so, dass sich die Stäbchen mit ihrer Axe, die Scheiben mit ihrer Ebene, beide also sich mit der Richtung ihrer grössten Ausdehnung, in die Richtung der Kraftlinien zu stellen suchen. Die Erscheinungen sind so regelmässig und die Drehung so streng proportional dem Quadrat der Potentialdifferenz der Condensatorplatten, dass, wie wir in unserer letzten Mittheilung gezeigt haben[1]), man ein Instrument zur Messung der Spannung elektrischer Oscillationen darauf gründen kann. Wir haben für die

1) Graetz und Fomm oben p. 245.

folgenden Beobachtungen, um jeden Zweifel an der Homogenität unserer Felder auszuschliessen, immer mit grossen Kohlrausch'schen Condensatoren gearbeitet, deren Platten 15 cm Durchmesser und höchstens 3 cm Abstand hatten. Die Aufhängung der Platten und Stäbchen war dieselbe bifilare, wie in unserer früheren Mittheilung; wir haben uns speciell überzeugt, dass die sehr feinen Aufhängestäbchen keine erkennbare Drehung im Felde zeigten. Da die Drehung dem Quadrat der Potentialdifferenz proportional ist, diese Potentialdifferenz aber, wenn man mit den Entladungsfunken einer Leydener Flasche arbeitet, ziemlich beträchtlichen Schwankungen unterliegt, so haben wir für die folgenden Messungen zwei parallel geschaltete Apparate angewendet, deren einer uns das Mass für die gemeinschaftliche Potentialdifferenz der Platten gab, während an dem zweiten die Drehung verschiedener Substanzen gemessen wurde. Beide Instrumente bestanden aus Kohlrausch'schen Condensatoren, zwischen deren Platten die dielektrischen Körper bifilar hingen. In dem ersten, welches wir kurz das Standardinstrument nennen wollen, befand sich eine dünne Kreisscheibe aus Schwefel von 716 mgr Gewicht, 20 mm Durchmesser, 1,14 mm Dicke. Das Gewicht der Aufhängung, (welches für das Direktionsmoment in Betracht kommt), betrug 1093 mgr. Die Platten beider Condensatoren wurden oscillirend durch die Entladungsfunken einer Leydener Flasche geladen, die durch einen Ruhmkorff geladen und durch ein Funkenmikrometer entladen wurde. Die Funkenstrecke wurde für die folgenden Versuche jedesmal $^1/_2$, 1, $1^1/_2$ mm weit genommen. Die Drehung des untersuchten Körper D, dividirt durch die gleichzeitige Drehung D_s im Standardinstrument, ist diejenige Grösse α, welche im folgenden angegeben ist. Wenn das Gesetz von dem Quadrat der Potentialdifferenz für alle Scheiben und alle Stäbchen richtig ist, muss sich α constant für alle Funkenlängen ergeben.

A. Versuche mit Kreisscheiben.

Die Aufhängungsvorrichtung der Scheiben hatte ein Gewicht von 1018 mgr.

I. Paraffinplatte I.

Gewicht 364 mgr, Durchmesser 20 mm, Dicke 1,30 mm.

Funkenlänge	0,5 mm	1 mm	1,5 mm
$\alpha =$	0,6421	0,6195	0,6298
	0,6236	0,6145	0,6236
	0,6213	0,6106	0,6221
Mittel	0,6290	0,6149	0,6252

II. Paraffinplatte II.

Gewicht 925 mgr, Durchmesser 20 mm, Dicke 3,31 mm.

Funkenlänge	0,5 mm	1 mm	1,5 mm
$\alpha =$	0,8950	0,8922	0,8970
	0,9118	0,9033	0,8874
	0,9064	0,8824	0,8915
Mittel	0,9011	0,8926	0,8920

III. Schwefelplatte I.

Gewicht 882 mgr, Durchmesser 20 mm, Dicke 1,40 mm

Funkenlänge	0,5 mm	1 mm	1,40 mm
$\alpha =$	1,244	1,243	1,235
	1,278	1,222	1,239
	1,225	1,246	1,219
Mittel	1,249	1,237	1,231

IV. Schwefelplatte II.

Gewicht 1735 mgr, Durchmesser 20 mm, Dicke 2,76 mm.

Funkenlänge	0,5 mm	1 mm	1,5 mm
$\alpha =$	1,795	1,772	1,752
	1,807	1,774	1,785
	1,794	1,771	1,740
Mittel	1,798	1,772	1,759

B. Versuche mit Stäbchen.

Die Aufhängungsvorrichtung der Stäbchen wog 1102 mgr.

V. Paraffinstäbchen I.

Gewicht 221 mgr, Länge 20 mm, Durchmesser 3,97 mm.

Funkenlänge	0,5 mm	1 mm	1,5 mm
$\alpha =$	0,1881	0,1808	0,1800
	0,1917	0,1772	0,1795
	0,1869	0,1749	—
Mittel	0,1889	0,1776	0,1798

VI. Paraffinstäbchen II.

Gewicht 406 mgr, Länge 20 mm, Durchmesser 5,39 mm.

Funkenlänge	0,5 mm	1 mm	1,5 mm
$\alpha =$	0,2306	0,2291	0,2318
	0,2328	0,2321	0,2350
	0,2336	0,2261	0,2338
Mittel	0,2323	0,2291	0,2335

VII. Schwefelstäbchen I.

Gewicht 499 mgr, Länge 20 mm, Durchmesser 3,98 mm.

Funkenlänge	0,5 mm	1 mm	1,5 mm
$\alpha =$	0,3740	0,3997	0,3985
	0,3808	0,4053	0,3969
	0,3838	0,4111	0,3921
Mittel	0,3795	0,4053	0,3958

VIII. Schwefelstäbchen II.

Gewicht 906 mgr, Länge 20 mm, Durchmesser 5,37 mm.

Funkenlänge	0,5 mm	1 mm	1,5 mm
$\alpha =$	0,4552	0,4528	0,4258
	0,4638	0,4549	0,4471
	0,4511	0,4520	0,4471
Mittel	0,4567	0,4532	0,4400

Aus diesen Zahlen ersieht man zunächst, dass thatsächlich in dem homogenen Feld unter diesen Bedingungen regelmässige Drehungen stattfinden, die in allen Fällen dem Quadrat der Potentialdifferenz proportional sind.

Dass die Mitte eines elektrostatischen Feldes, welches von zwei Platten der angegebenen Grösse gebildet wird, homogen ist, wird nicht bestritten werden. Man wird aber vielleicht sagen können, dass zwar bei dauernder Ladung räumliche Homogenität vorhanden wäre, dass aber bei den raschen Oscillationen der Entladungen der Leydener Flasche zunächst eine zeitliche und dadurch im Felde auch eine räumliche Inhomogenität entstehen könne. Es würde das heissen, dass für die hier in Betracht kommenden Schwingungen

in dem Raum zwischen den Condensatorplatten schon merkliche Verschiedenheiten der Phasen auftreten. An sich ist diese Vermuthung wohl berechtigt und wir glauben auch in einer späteren Mittheilung das Mitwirken dieser Verhältnisse beweisen zu können. Eine solche Phasendifferenz würde eine räumliche Inhomogenität in den verschiedenen aufeinander folgenden Schichten parallel den Condensatorplatten (nicht innerhalb jeder solchen Schicht) hervorbringen und könnte dadurch immerhin drehende Wirkungen verursachen. Dass aber die Ursache der Erscheinungen darin nicht liegt, wird dadurch bewiesen, dass wir dieselben Resultate auch bei ganz langsamen Oscillationen (cirka 60 pro Sekunde) und auch bei rein statischer Ladung erhielten. Um sehr langsame Oscillationen anzuwenden, brauchten wir blos die Kugeln des Funkenmikrometers so weit auseinander zu schieben, dass kein Funke mehr überging. Dann folgten sich die Ladungen nur in dem Tempo, in dem der Unterbrecher des Ruhmkorff spielte. Wir erhielten dabei je nach der angewendeten Spannung Drehungen von derselben Grösse, wie bei raschen Oscillationen und z. B. bei den obigen Substanzen folgende Werthe von α

Paraffinplatte I	Paraffinplatte II	Schwefelplatte I	Schwefelplatte II
0,6152	0,8739	1,260	1,684
Paraffinstäbchen I	**Paraffinstäbchen II**	**Schwefelstäbchen I**	**Schwefelstäbchen II**
0,1656	0,2281	0,3625	0,4834

Durch die Oscillationen ist also die Erscheinung nicht bedingt. Eine weitere Vermuthung könnte dahin gehen, dass die Erscheinungen durch Rückstandsbildung oder Hysteresis verursacht sind. Man wird diese Vermuthung nicht anwenden können auf den Schwefel, von dem Boltzmann gezeigt hat, dass er keine Nachwirkung zeigt. In

unseren Versuchen würde sich die Nachwirkung in der Weise aussprechen, dass das Dielektrikum unter dem Einfluss der Oscillationen selbst geladen wird und daher je nach seiner Ladung eine andere Stellung im Feld annimmt. Die Hysteresis würde sich also durch eine Veränderung der Nulllage nach jedem Versuch kenntlich machen. Eine solche zeigte sich thatsächlich in manchen Fällen, bei Schwefel aber nie, und auch bei Paraffin, wo sie deutlich war, betrug die Nullpunktverschiebung nach längerer Einwirkung der Ladungen nur einen oder einige Skalentheile. Also auch darauf können die Erscheinungen nicht beruhen.

Der Einwand, dass Leitung vorhanden wäre, wird bei solchen Isolatoren wie Schwefel, Paraffin, Schellack und Celluloid, (mit denen wir ganz ebensolche Resultate erhielten), nicht erhoben werden können. Auch sind die Erscheinungen bei Vorhandensein von Leitung wesentlich andere, wie wir an Glas constatirten. Ebenso wenig wird man die Erscheinungen auf etwaige Krystallstruktur schieben können, da sie sich in Schellack ebenso wie bei Schwefel ergaben. Durch Elektrostriktion werden die Körper allerdings etwas deformirt, doch sind die Kräfte zu klein, um wesentliche Deformationen hervorzubringen und ausserdem müssten die Drehungen dann den vierten Potenzen der Potentialdifferenz, nicht den Quadraten proportional sein.

Wir können daher aussprechen, dass es eine Eigenschaft vollkommen homogener und isotroper dielektrischer Körper ist, im homogenen elektrostatischen Felde Drehungsbewegungen auszuführen.

Nach den oben angeführten Betrachtungen erfordert dieses Resultat, wenn man die Maxwell-Hertz'sche Theorie der Dielektrika annimmt, eine besondere Erklärung, da diese einen dielektrischen Körper als einen ganz stetigen ansieht, ohne auf die Molekularstruktur desselben Rücksicht zu nehmen, da sie also, wie Fresnel es für das Licht that, die durchsich-

tigen Körper ersetzt durch einen idealen homogenen Aether von besonderer Elasticität. In der Theorie, die Poisson für die magnetische Induktion aufgestellt hat und die von Mosotti und Faraday für die Dielektrika acceptirt wurde, findet man zunächst auch keine Erklärung, wenn man, wie Mascart und Joubert, das Dielektrikum aus leitenden Partikeln (Kugeln) bestehen lässt, welche in einen nicht leitenden Stoff eingeschlossen sind und sich gegenseitig nicht beeinflussen. Die Schwierigkeit, die diese Theorie bei der magnetischen Induktion wegen der möglichen Raumerfüllung hat, ist bei dielektrischen Körpern mit nicht zu grosser Dielektricitätsconstante bekanntlich nicht vorhanden. Es lässt sich aber leicht einsehen, dass, wenn die leitenden Partikeln keine Einwirkung auf einander ausüben, dass dann bei dieser Theorie von einer Drehung, sogar bei einem beliebig gestalteten dielektrischen Körper keine Rede sein kann. Denn in jeder Kugel bilden sich die beiden Pole in der Richtung der Kraftlinien des Feldes und es ist daher kein Grund für eine Drehung vorhanden.[1])

Wenn dagegen, wie es bei der Nähe der leitenden Partikel sein muss,[2]) eine gegenseitige Einwirkung derselben auf einander angenommen wird, so sind unsere Erscheinungen verständlich. Denken wir uns nämlich eine Reihe von leitenden Kugeln auf einer nicht leitenden Axe befestigt und in ein elektrostatisches Feld gebracht, dessen Kraftlinien den Winkel δ mit der Axe bilden. Die Kugeln sollen auf einander einwirken. Dann ist die elektrische Axe jeder Kugel nicht den Kraftlinien parallel, sondern sie bildet kleinere Winkel als δ mit der gemeinsamen Axe der Kugeln, Winkel, die von Kugel zu Kugel variiren können. Daher sind die

---

1) s. Mascart, Handbuch der statischen Elektricität (deutsch von Wallentin) I S. 618.

2) Mascart und Joubert, Elektricität und Magnetismus I § 167.

einzelnen Kugeln nicht im Gleichgewicht im Felde, sondern es wirkt auf sie und daher auf das ganze System ein Kräftepaar, welches die gemeinsame Axe den Kraftlinien parallel zu stellen sucht.

Dies ist aber gerade das Ergebniss unserer Beobachtungen. Betrachtet man die leitenden Kugeln als von molekularer Grösse, so hat diese Constitution eines Dielektrikums nichts, was nicht unseren allgemeinen Anschauungen über die Molekularconstitution der Körper entspricht. Es erscheint aber immerhin merkwürdig, dass diese einfachen Versuche, die oben geschildert wurden, sich anschaulich zunächst nur durch eine Molekularconstitution der Dielektrika erklären lassen.

München, Physikalisches Institut der Universität.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 22. November 1893.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die heutige Festsitzung der Akademie der Wissenschaften findet statt zu Ehren ihres Protectors, Sr. K. Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold, des Königreichs Bayern Verweser. Als sprechender Beweis des Wohlwollens, mit dem unser allergnädigster Protector auf das von seinen Ahnen gegründete Institut herabblickt, sehen wir heute zwei Geschenke Allerhöchstdesselben, welche ich bereits in der letzten öffentlichen Sitzung angekündigt hatte, vollendet vor Augen, das Bildniss Sr. K. Hoheit selbst, vom Kunstmaler Emil Keck gemalt, und die Marmorbüste unsres hochverehrten Ehrenmitgliedes, I. K. Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern, welche unsre heutige Sitzung mit Ihrer Gegenwart beehrt, von der Hand des Professors Wilhelm v. Rümann.

Ein Denkmal, bei dessen Errichtung sich alle Mitglieder unsrer Akademie und weitere Kreise, Mitglieder des Reichsrathes, der Universität, des Maximilians-Ordens, der Stadtverwaltung u. s. w. betheiligt hatten, erstand zu Allerheiligen

dieses Jahres auf dem südlichen Friedhofe dahier, das Grabmal meines Vorgängers, des Reichsrathes und Stiftspropstes Ignaz v. Döllinger, des hochberühmten langjährigen Präsidenten unsrer Akademie. Nach Döllingers Heimgang am 10. Januar 1890 veranstaltete ein aus Vertretern jener Corporationen, welchen der Dahingeschiedene angehört hatte, gebildetes Comité eine Sammlung von Beiträgen. Nachdem etwa 5000 Mark eingegangen waren, beschloss das Comité, das Zeichen der Ehrung des Verewigten mit dem im südlichen Friedhofe bereits vorhandenen Denkmal auf dem Grabe der Familie Döllinger zu verbinden, in dem er selbst ruht, wie sein berühmter Vater, der Anatom Döllinger, der zu den Begründern der Embryologie gehört. Man war bestrebt, das Familiengrab pietätvoll so viel als möglich zu erhalten, und krönte es desshalb nur mit einem passenden Aufsatz und mit der Marmorbüste des geistig bedeutendsten Mitgliedes der Familie, unsres letzten Präsidenten Ignatius v. Döllinger. Die Ausführung dieses Planes wurde der Meisterhand des Professors Adolf Hildebrand anvertraut.

Unter den akademischen Ereignissen der letzten Monate verdient zunächst Erwähnung das Gelingen eines Versuchs engerer Verbindung der grösseren wissenschaftlichen Körperschaften Deutschlands und Oesterreichs, nämlich der Akademien zu Berlin, Wien und München und der königlichen Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen und zu Leipzig, behufs Ausführung grösserer wissenschaftlicher Arbeiten und Unternehmungen. Es ist öfter vorgekommen, dass gewisse Arbeiten theils aus dem Kreise der Geisteswissenschaften, theils aus dem der Naturwissenschaften von zwei Akademien gleichzeitig unternommen wurden, ohne dass die Bearbeiter über den Gegenstand unter einander verkehren konnten, was viele Nachtheile mit sich brachte.

Die amtliche Anregung zu einem solchen Verbande ging von Wien aus und wurde von unsrer Akademie freudig be-

grüsst; stimmte sie doch genau überein mit dem Wortlaut unsres Statuts vom Jahre 1827, nach welchem „die Herstellung und Fortführung einer ununterbrochenen, freien, jedoch rein wissenschaftlichen Verbindung mit gelehrten Instituten und Gesellschaften des In- und Auslandes“ zu den Aufgaben gehört, welche unsrer Akademie durch ihre allerhöchsten Stifter bezeichnet wurden.

Delegirte der genannten wissenschaftlichen Körperschaften haben sich in Leipzig berathen. Die Wünsche nach Vereinbarung gingen vielfach weiter, als sie das von den Körperschaften zu Wien, Göttingen, Leipzig und München vereinbarte Statut schliesslich zum Ausdruck brachte — aber auch dieser Anfang ist schon erfreulich. Die königliche Akademie in Berlin hat zwar Bedenken geäussert, sich zur Zeit an das verabredete Statut zu binden, aber ihre Geneigtheit erklärt, mit den anderen vier Körperschaften von Fall zu Fall sich über ein Zusammenwirken zu verständigen.

Dieses Anerbieten benutzend, hat dann unsre Akademie vorgeschlagen, als ein für ein solches Zusammenwirken geeignetes Unternehmen die Herausgabe eines neuen grossen lateinischen Wörterbuches, Thesaurus linguae latinae, zu bezeichnen. Die Körperschaften von Wien, Göttingen, Leipzig und Berlin sind auf diese Anregung eingegangen und sind Delegirte zur Berathung zusammengetreten. Der Plan ist ausgearbeitet, die Kosten veranschlagt. Zur Deckung derselben hat sich unsre Akademie an das königliche Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten und dieses an den zur Zeit tagenden Landtag gewandt. Wir hoffen zuversichtlich, keine Fehlbitte gethan zu haben.

Wunsch und Bitte der Akademie geht freilich noch über den Thesaurus linguae latinae hinaus. Schon vor 2 Jahren und in diesem Sommer aufs neue hat die Akademie bei ihren Anträgen zum Budget den dringenden Wunsch ausgesprochen, es möchten ihr reichlichere Mittel zur Verfügung gestellt

werden, um wissenschaftliche Unternehmungen selbst ins Leben zu rufen oder von Anderen geplante und ausgeführte zu unterstützen, ferner um die wissenschaftlichen Sammlungen des Staates in reichlicherem Maasse vermehren zu können, als dies zur Zeit mit den äusserst bescheidenen Etatsmitteln und dem kleinen aus dem sogenannten Mannheimer Fonds fliessenden Zuschuss von jährlich etwa 7000 M. möglich ist.

Mit einer Art von Neid blicken wir auf die Berliner und die Wiener Akademie, von welchen zum Beispiel die erstgenannte jährlich über 30,000 M. zur Förderung wissenschaftlicher Unternehmungen verwenden kann.

Der Wunsch unsrer Akademie geht nun dahin, entweder ein Capital von 500,000 M. zu erhalten, welches festzulegen und dessen Zinsen für die bezeichneten Zwecke zu verwenden wären, oder statt dessen jährlich 20,000 M. im Etat verwenden zu können. Daraus könnte dann auch das Unternehmen des Thesaurus linguae latinae weiter bestritten werden, zu dessen Durchführung sich die fünf grossen wissenschaftlichen Corporationen verbunden haben.

Die mathematisch-physikalische Classe hat eine Reihe von Beispielen aufgestellt, welche zeigen, wie nothwendig und nützlich die Unterstützung solcher wissenschaftlichen Untersuchungen und Unternehmungen wäre.

So sind z. B. zu den so wichtigen Untersuchungen über die Physik der Atmosphäre heutzutage Ballonfahrten und gewisse Instrumente unerlässlich, aber wir besitzen keine Mittel dafür. Es wurde weiter darauf aufmerksam gemacht, dass seit Martius kein bayerischer Botaniker fremde Erdtheile besucht habe, um Materialien für die hiesige Sammlung zu gewinnen. Diese Materialien dienen zum Tauschverkehr mit auswärtigen Herbarien. Da das von Martius vor mehr als 60 Jahren aus Brasilien Gebrachte längst aufgebraucht ist, erhalten wir keine Zusendungen mehr von

auswärts, da wir keine Gegenleistung dafür mehr machen können. Entwicklungsgeschichtliche, pflanzenphysiologische und pflanzenchemische Arbeiten in den Tropen ausgeführt, sind von besonderem wissenschaftlichen und praktischen Werth; vor nicht langem hat hiefür die Berliner Akademie 5000 M. aufgewendet, indem sie einen jüngeren Botaniker dahin entsendete. — Das Gleiche wie auf botanischem Gebiet wird auf zoologischem empfunden. Man staunt, von Sachverständigen zu hören, wie die Entwicklungsgeschichte der meisten Hausthiere noch im Argen liegt, dass z. B. die Entwicklungsgeschichte des Pferdes noch so gut wie unbekannt sei, weil diese Thiere im trächtigen Zustande nie geschlachtet werden, dem Embryologen aber die Mittel fehlen, zeitweise solche Schlachtungen zu veranlassen. Die Berliner Akademie hat jüngst einem Anatomen 1000 M. gewährt, um nur die Embryologie des Schweines zu studiren. Embryologische Studien mit Fischen ergeben Resultate, welche unmittelbar in der Fischzucht praktisch zu verwerthen sind. Die Fortpflanzung des Aales ist noch unbekannt.

Wenn auch nicht jedesmal das Resultat einer wissenschaftlichen Untersuchung sofort praktisch zu verwerthen ist, so hat sie doch immer eine Bedeutung als ein neuer Zweig am grossen Baume der Erkenntniss, welchem Zweige oft erst später eine Blüthe oder Frucht entspriesst. Grosse Dinge fangen, wie aus der Entwicklungsgeschichte der verschiedenen Wissenschaften, der Technik und Industrie Jedermann bekannt ist, oft sehr klein an.

Gestatten Sie mir, zum Schluss noch einiger Gegenstände kurz zu gedenken, welche mit der Akademie der Wissenschaften zusammenhängen.

Ein von unsrer Akademie von Anfang an aufs wärmste vertretenes Unternehmen, die Erforschung des römischen Grenzwalles, des Limes im alten Germanien, ist bekanntlich schliesslich Reichssache geworden, indem das Reich die er-

forderlichen Mittel (130,000 M., auf 5 Jahre vertheilt) übernommen hat und eine Reichs-Limes-Commission eingerichtet wurde. Doch ist unsrer Akademie noch immer ein würdiger Platz innerhalb derselben eingeräumt, indem eines der sieben ständigen Mitglieder der Commission von unsrer Akademie gewählt wird. Ein bayerischer Officier und Gelehrter, der Generalmajor a. D. Karl Popp, hat sich bei diesem Unternehmen besonders ausgezeichnet.

Wenn im Namen unsrer Akademie noch nicht erfüllte Wünsche an Regierung und Landtag gelangen, wie unsre Wirksamkeit erhöht und damit der Wissenschaft und dem Vaterlande gedient werden könnte, dann darf auch nicht unerwähnt bleiben, wie manches Gute durch das Entgegenkommen von Staatsregierung und Landtag in den letzten Jahren neu eingerichtet worden ist. Beispielsweise erwähne ich die Etatsposition für Beschickung wissenschaftlicher internationaler Congresse im Betrage von jährlich 3000 M. Aus ihr wurden in diesem Jahre 1000 M. für die in München abgehaltene Mathematiker-Versammlung und 2000 M. für Ermöglichung einer Reise des Conservators der mineralogischen Sammlung nach England und Nordamerika und zum Besuch der Weltausstellung in Chicago verwendet. Unserm Collegen Professor Dr. Groth ist es gelungen, reich beschenkt mit kostbaren Exemplaren für die mineralogische Sammlung, namentlich auch für die technologische Abtheilung derselben heimzukehren.

Seit dem Jahre 1892 ist die Position für Erforschung der Urgeschichte Bayerns auf 4000 M. erhöht worden, wodurch unsre Akademie in Stand gesetzt ist, die noch im Boden ruhenden reichen prähistorischen Alterthümer des Königreichs in ausgedehnter und systematischer Weise zu heben und dadurch einerseits die junge Wissenschaft der Prähistorie und Anthropologie zu fördern, andrerseits unsre prähistorische Staatssammlung zu bereichern.

Indem ich an dieser Stelle der Staatsregierung und dem Landtage aus vollem Herzen danke für das auf diesen und anderen Gebieten bewiesene einsichtsvolle Entgegenkommen, spreche ich den Wunsch und die Hoffnung aus, dass auch fernerhin sämmtliche im Landtag vertretene Richtungen mit einander wetteifern werden, durch Unterstützung der ersten wissenschaftlichen Körperschaft des Landes die gemeinsamen, Alle einigenden Interessen wahrer Wissenschaft zu fördern.

Schliesslich erwähne ich noch, dass seit der letzten öffentlichen Sitzung unsrer Akademie die bei derselben bestehende Liebig-Stiftung zwei silberne Liebig-Medaillen verliehen hat, eine an Dr. Eugen Hilgard, Professor der Landwirthschaft an der Universität Berkeley in Californien, wegen seiner verdienstvollen Arbeiten zur Erforschung der physikalischen und chemischen Eigenschaften des jungfräulichen Bodens des Far-West (Hilgard ist, nebenbei bemerkt, ein geborner Bayer, ein Neffe des um unsern Eisenbahnbau hochverdienten Oberbaudirectors v. Pauli); — die andere den Begründern und Leitern der Versuchsfarm zu Rothamsted in England, Sir John Bennet Lawes und Dr. Henry Gilbert, aus Anlass des 50jährigen Jubiläums dieser verdienstvollen Anstalt.

Wahlen.

Der Classensecretär, Herr C. v. Voit, gibt sodann die von der Akademie vorgenommenen und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigten Wahlen bekannt. Es wurden in der mathematisch-physikalischen Classe gewählt:

zu ausserordentlichen Mitgliedern:

Herr Dr. Johannes Ranke, o. Professor der Anthropologie und allgemeinen Naturgeschichte an der Universität München, Conservator der prähistorischen Sammlung des Staates;

Herr Dr. Robert Hartig, o. Professor der Anatomie, Physiologie und Pathologie der Pflanzen an der Universität München;

Herr Dr. Johannes Rückert, Professor für Anatomie, Histologie und Entwicklungsgeschichte an der thierärztlichen Hochschule dahier;

zu correspondirenden Mitgliedern:

Herr Dr. Heinrich Rudolf Hertz, o. Professor für Physik an der Universität Bonn;

Herr Dr. Eugen Warming, Professor der Botanik und Mitglied der dänischen Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen;

Herr Dr. Melchior Treub, Direktor des botanischen Gartens in Buitenzorg auf Java.

Sitzung vom 2. Dezember 1893.

1. Herr W. v. Gümbel bespricht die wesentlichen Ergebnisse einer Untersuchung: „Die Amberger Eisenerzformation."

2. Herr L. Boltzmann macht eine Mittheilung: „Ueber den Begriff der absoluten Temperatur."

3. Herr A. v. Baeyer hält einen Vortrag: „Ueber die geometrischen Isomerien in der Terpenreihe."

Die Amberger Eisenerzformation.

Von W. v. Gümbel.

(Eingelaufen 2. Dezember.)

Das Vorkommen von Eisenerzen im Gebiete des fränkisch-oberpfälzischen Juragebirgs war vielleicht schon in prähistorischer Zeit, sicher im hohen Alterthum bekannt. Darauf deuten die Schlackenhalden hin, welche man häufig im Frauen- und Pointener Forste, dann im Kastenamtsgehölze und im Gemeindewald auf der Höhe bei Kelheim und an mehreren Orten durch das Gebirge zerstreut bis nach Königsfeld hinauf antrifft. Sie scheinen von einem Windofen- oder Zerrennherdbetrieb herzurühren, durch welche man in frühester Zeit schmiedbares Eisen herzustellen pflegte. Manche dieser Schlacken besitzen ein krystallinisches Gefüge

und umschliessen zuweilen nadelförmige Krystalle, die denen des Olivins entsprechen.

Am berühmtesten war in alter Zeit die Ablagerung am Erz- oder Arzberg bei Amberg, welcher diese Stadt ihre Entstehung verdankt. Alte Chroniken melden, dass 970 n. Chr. an der Stelle, wo jetzt Amberg steht, noch Eichen- und Tannenwald sich vorfand und an der Vils, da wo die Strasse von Regensburg nach Nürnberg über dieselbe führte, eine Hammerschmiede sich angesiedelt hatte. Ihr gesellte sich wegen des regen Verkehrs mit Fuhrwerken erst ein Wirthshaus, dann ein Kirchlein hinzu, neben denen nach und nach noch andere Anwesen der günstigen Lage wegen Platz fanden. Schon 1163 erhielt diese Ansiedlung, da auch von dieser Stelle an die Vils schiffbar wurde, Stadtgerechtsame und durch Kaiser Friedrich I. für ihren Eisenhandel Zollfreiheit[1]) durch das ganze Reich.

Kaiser Ludwig der Bayer erneuerte 1326 das Zollrecht auf den Erzberg und 1350 ertheilte Pfalzgraf Rupert der Erste den Amberger Bürgern einen Freiheitsbrief mit dem Rechte, überall im Lande Eisenerz suchen und gewinnen zu dürfen.

Inzwischen hatte sich die Eisenindustrie in der Oberpfalz beträchtlich entwickelt. Schon damals waren hier so zahlreiche Hammerwerke im Betrieb, dass 1387 die Städte Amberg und Sulzbach mit 64 oberpfälzischen Hammerwerken die sogen. Hammervereinigung schliessen konnten, durch welche das gesammte Eisenhüttenwesen, der Bezug der Erze, ihre Verwendung und Verwerthung ganz genau geregelt wurde. Erst auf 4 Jahre abgeschlossen, wurde sie nach und nach mehrmals auf 10 Jahre verlängert. Dadurch erhob sich Amberg zum Mittelpunkt des Eisenhandels damaliger Zeit für grosse Ländergebiete, selbst bis nach Frank-

1) Flurl, Beschreibung der Gebirge von Bayern etc. S. 533 u. ff. Lori, Einleitung in die bayer. Bergrechtsgeschichte. Riemann, Geschichte des Eisens. Lampadius, Hüttenkunde II 433.

reich, Italien und die Niederlande. Auf diese Weise verbreitete sich ein grosser Wohlstand und Reichthum in der Oberpfalz, der sich aber rasch abminderte, als, auch abgesehen von den Kriegsverwüstungen, in anderen Ländern Eisenhütten errichtet wurden, welche wohlfeiler produzirten, weil namentlich die Landfracht das Oberpfälzer Eisen sehr vertheuerte und auch die Wälder nach und nach nicht mehr das erforderliche Kohlholz zu so mässigem Preise wie früher lieferten.

In Amberg selbst geriethen die Bürger um die Mitte des 15. Jahrhunderts unter sich in Zwist, so dass der Bergbau am Arzberg eine Zeit lang ganz in Verfall gerieth und Kurfürst Friedrich I. neue Privilegien ertheilen musste, um die Erzgruben wieder zu erheben und in Betrieb zu setzen. Es wurde daraufhin 1464 eine neue Hammervereinigung zu Stande gebracht, welche eine Periode erneuerten Aufschwungs des Berg- und Hüttenbetriebes in der Oberpfalz hervorrief. Damals stand der Bergbau am Erzberg in voller Blüthe und die Quantitäten der Erzeugnisse an Stabeisen und Blechen waren sehr beträchtlich, bis die Unruhen des 30jährigen Krieges hereinbrachen.[1]) Doch waren schon vorher dadurch vielfache Wirren entstanden, dass neben dem Magistrat Ambergs auch einzelne Bürger selbstständig für sich Bergbau zu betreiben begannen und auch die Herrschaft zeitweise die Gruben für sich in Anspruch nahm. Dies beschleunigte den Verfall des Bergbaues am Erzberg der Art, dass derselbe endlich ganz einging und erst durch Maximilian II. wieder erhoben werden konnte. In der Folge wurde der Bergbau zur Hälfte vom Staat und von Gnadenwegen zur Hälfte von dem Magistrat der Stadt Amberg unter sehr wechselndem Verhältnisse bis ins 19. Jahr-

1) Doch standen bei dem Einzuge von Kaiser Karl V. in Amberg (1532) noch 150—200 Bergleute zur Parade.

hundert fortbetrieben. Später setzte sich das Aerar in den Alleinbesitz der Erzberger Gruben, die es auch heute noch ausbeutet.

Flurl schätzt (1773) die während 6 Jahrhunderte geförderten Eisenerze[1]) auf einige Millionen Seidel[2]), was auf einen sehr beträchtlichen Erzreichthum schliessen lässt. Dieser vortreffliche Beobachter schildert das Erzvorkommen als ein flötzweises, das auf den Oberpfälzer Sandstein aufruhend über Altenricht, Engelsdorf, Krumbach, Siebeneichen bis nach Sulzbach sich hinziehe. Er gibt an, dass man die Schächte von Tag herein, durch ein gegen 3 Lachter[3]) mächtiges Sandflötz, dann durch eisenschüssigen, bräunlichen und zuweilen ziegelrothen Thon von 18 und mehr Lachter Mächtigkeit abteuft und dass dann erst das Erzflötz mit 3—4 Lachter angefahren wird. Dasselbe besteht aus dichten thonigen, oft in einander übergehenden Abänderungen von Brauneisenstein, welcher von einem mulmigen eisenschüssigen Thon eingehüllt wird. Dazu gesellen sich thonig mulmige Erze, sog. Lebererze, stängelige Abänderungen, sog. Nagelerze, Eisenocker und Sandeisenstein. Auch Hornsteinknollen und plastischer hellfarbiger Thon, welch' letzteren man zur Fayence-Fabrikation zu verwenden versucht hat, gehören zu den nicht seltenen Erscheinungen. Die ockergelbe Erde,

---

1) Die Erze wurden in früherer Zeit in den zahlreichen oberpfälzischen Hammerwerken auf sogen. Zerrennherden gleich zu schmiedbarem Eisen zu Gute gemacht. Erst später verschmolz man das Erz in sogen. Bla- oder Blauöfen in Pilnhofen, Fronhammer, Dechantsees, Trefesen, Warmensteinach und Steining (v. Voith, das k. Berg- und Hüttenamt Bodenwöhr 1841). Zu Bodenwöhr bestand schon am Ende des 17. Jahrhunderts (1692) ein Hochofen mit offener Brust zur Erzeugung von Gusseisen; daneben war aber auch noch das Zerrennfeuer in Benützung, das bis in die neuere Zeit sich erhielt.

2) 1 Seidel Eisenerz vom Amberg wiegt gegen 375 Pfd. bayer.; neuerdings rechnet man nach Hektoliter zu 4 Zollzentner.

3) 1 Lachter = 1,97 Meter.

welche namentlich bei Egelsee sich vorfindet und gewonnen wird, kommt als Farberde mit der Bezeichnung Amberger Gelb in den Handel.

Ueber das Verhältniss dieser Erzablagerungen zu andern Gesteinsbildungen spricht sich Flurl nicht näher aus, bemerkt nur in Bezug auf die Entstehung der bei Amberg so häufig vorkommenden Versteinerungen, die Lage der Gegend scheine darauf hinzudeuten, dass, da sie ringsum von hohen Bergrücken eingeschlossen sei, das zur Fluthzeit zurücktretende Wasser die Bewohner desselben (Versteinerungen) in diese tiefere Gegend herabgeführt und daselbst mit dem feinen Schlamm abgesetzt habe.

Später hat sich auch Oberbergrath v. Voith[1]) in mehreren Schriften über diese Erzablagerung ausgesprochen und der Ansicht Ausdruck gegeben, dass dieselbe zwischen Jurakalk und Grünsandstein ihre Stelle finde. Bestimmter äussert sich derselbe in dem Werkchen „Das k. b. Berg- und Hüttenamt Bodenwöhr 1841" Seite 25, wo er anführt: „Dieses Eisenflötz gehört, wie seine Lagerungsverhältnisse bei Amberg und weiter gegen Westen hin unwidersprechlich bestätigen, als untergeordnetes Glied zur Kreideformation." Dieser Ausspruch verliert aber dadurch an Werth, dass v. Voith fast alle Eisenerzvorkommnisse in der Oberpfalz zusammenwirft, z. B. die unzweifelhaft liasische von Keilberg bei Regensburg und von Buch bei Bodenwöhr. Seit dieser Zeit wurden die geologischen Verhältnisse der Erzbildung bei Amberg bis in die neueste Zeit kaum mehr näher erörtert und in den amtlichen Berichten sind die Ablagerungen bald dem Lias, bald dem Jura, der Kreide oder dem Tertiär zugetheilt worden.

---

1) Seine Schilderung der Flötzeisensteinformation in der Oberpfalz (N. Jahrb. d. Berg- und Hüttenkunde von Moll 1824, V. S. 1) bezieht sich nicht auf die Amberger Erzablagerung.

Erst bei der geognostischen Landesaufnahme der Gegend (1854 und 1856) ist die Stellung der nunmehr unter der Bezeichnung Amberger Schichten zusammengefassten Bildungen, welche sich über den ganzen Jura verbreitet erwiesen haben, einer gründlichen Untersuchung unterzogen worden.

Hierbei ergab sich mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass die Amberger Erzbildung der tiefsten Stufe des im südöstlichen Juragebiet mächtig auftretenden cenomanen Procän- oder cretacischen (Kreide-)Systems angehöre und jener Ablagerung gleichzustellen sei, welche an anderer Stelle als Kluftausfüllung, in Böhmen insbesondere als Pflanzenblätter beherbergende sog. Perutzer Schichten[1]) sich darstellt. Doch erst die in neuester Zeit durch den Frankenjura gelegten Eisenbahnlinien haben in zahlreichen tiefen Einschnitten Profile blossgelegt, welche auch für das geologisch nicht geübte Auge keinen Zweifel mehr darüber lassen, dass eine grossartig ausgedehnte Brauneisenerzformation constant auf jurassischen Kalkschichten aufgelagert ist und von Cenomangrünsandstein oder von entsprechenden tiefsten Oberprocänbildungen unmittelbar bedeckt wird.

Es erübrigt nunmehr den Beweis zu führen, dass diese Erzformation, welche sich über die fränkische Alb ausdehnt, als eine einheitliche Bildung ein zusammenhängendes geologisches Ganzes ausmacht und dass auch die Amberger Eisenerzablagerung derselben angehört.

Die lehrreichsten Aufschlüsse bot der grosse Gebirgsanschnitt im Bahnhof Neukirchen bei Sulzbach. Hier zeigt sich an einer Stelle gegen Sulzbach zu aus der Tiefe allmählich ansteigend eine Felskuppe von Frankendolomit. Die Oberfläche desselben ist sehr uneben, mit rasch wechselnden Erhöhungen und Vertiefungen versehen und deutlich vor Ablagerung der darüber ausgebreiteten jüngeren Bildungen

1) Gümbel, in Bavaria. Bd. III, 9. Buch, S. 66.

ausgenagt und abgewaschen. Zunächst erweist sich die Oberfläche mit einer Brauneisensteinkruste überzogen. Dann legt sich in den kesselartigen Vertiefungen ein Gemeng von unregelmässig geschichtetem, grobem, weissem Sand, gelben Letten und zahlreichen Hornsteinknollen, die dem benachbarten Jura entstammen, an. Gegen die buckelförmigen Erhöhungen hin verläuft diese Ablagerung in eine vorherrschend thonige Masse ohne Hornsteinbeimengungen. Die Mächtigkeit dieser ersten Deckschicht beträgt $^1/_2$—$1^1/_2$ m je nach der Unebenheit des Untergrundes. Auf diese erste Lage folgt, im Bahnhof von Nenkirchen gut entblöst, das eigentliche Brauneisensteinflötz mit theils dichtem Brauneisenstein, theils mulmig thonigem Eisenocker, sog. Gelbfarberde. Der erstere bildet meist unregelmässig verlaufende Schalen, Butzen und Knollen in letzteren, mit dem er durch alle möglichen Uebergänge eng verbunden ist. Nebenbei treten auch manganhaltige Nester und Streifen von schwarzer Farbe auf und verleihen der ganzen Erzablagerung ein streifig fleckiges Aussehen. Die Mächtigkeit des Erzflötzes erreicht hier nur 0,25—0,5 m, verringert sich an den buckelförmigen Erhöhungen des Untergrundes, nimmt dagegen in den buchtenförmigen Vertiefungen oft wieder beträchtlich an Stärke zu.

Die Decke wird hier von gelbem und weissem grobkörnigen Sand gebildet, der stellenweise ganz lose angehäuft, eine Art Schwimmsand darstellt, stellenweise gebunden in einen Sandstein verläuft und dabei eine Neigung zu kugeligen Absonderungen wahrnehmen lässt. In diesem Sand von beiläufig 1,5—2 m Mächtigkeit liegen einzelne Streifen von grauem, seltener rothem Thon. Derselbe gleicht in seiner Beschaffenheit der sog. Kluftausfüllung der Umgegend von Regensburg. Endlich breitet sich über das Ganze in gleichförmig concordanter Lagerung typischer Grünsandstein aus, von dem es nicht zweifelhaft ist, dass er den tiefsten Lagen des Cenoman-Grünsandsteins von Regensburg entspricht.

Durch diese Lagerungsverhältnisse ist die Zugehörigkeit der Brauneisenerzformation zum oberen cretacischen System sichergestellt. Aehnliche Profile wiederholen sich noch mehrfach an der Eisenbahnlinie Neukirchen-Weiden, in denen bald Dolomit, bald Jurakalk oder Dogger die Unterlage der Eisenerzbildung ausmacht. Bemerkenswerth ist nur noch besonders der Aufschluss in einer Füllgrube bei dem sog. Einzelhof, wo die Erzablagerung in einen grauen bis schwärzlichen Letten verläuft, der voll von Glaukonitkörnchen zugleich einzelne weisse Trümmer von Bivalvenschalen umschliesst.

Die oben beschriebene Eisenerzformation am Bahnhof von Neukirchen lässt sich deutlich gegen das Dorf und gegen die diesem benachbarten Einbuchtungen am Grasberg zu verfolgen und bestimmt erkennen, dass die in letzterer reichlich vorhandenen Erzablagerungen eine unmittelbare Fortsetzung jener am Bahnhof sind. In dieser Mulde bauen mehrere Zechen (Felix, Eintracht, Clara) den mit Farberde verwachsenen Eisenstein in unterirdischen Gruben ab. In der sog. Mohrenzeche gewinnt man hauptsächlich die mulmige manganreiche Erzmasse.

Ueberall stösst man hier in den abgeteuften Schächten unter der Ockererde zunächst auf Sand und darunter erst auf das Eisenerzlager und unter diesen, wo man weiter abgeteuft hat, auf weissen Thon oder ein Hornsteinknollenlager und zuletzt auf Jurakalk oder Dolomit, genau in der gleichen Weise, wie am Bahnhof von Neukirchen. Diese Lagerungsverhältnisse wiederholen sich in den zahlreichen Erzgruben der Nachbarschaft, von denen zur Zeit noch die Zechen Segen Gottes bei Vögelas, Leonhard bei Riglashof, Walburga bei Namsreuth, Willibald bei Pruppach, Katharina bei Neidstein, Joseph bei Gaissach, Anna bei Schmidtstadt und Michael bei Riglashof im Betrieb stehen. Doch erfolgen ununterbrochen neue Muthungen.

Bei Achtel und namentlich bei Königstein finden sich zahlreiche Gruben, welche in früherer Zeit stark belegt waren und von denen einzelne selbst jetzt noch bebaut werden, wie alte Hoffnung bei Achtel, Johann und Hans bei Königstein. Aus diesen Zechen wird ausgezeichnete gelbe Farberde gewonnen. An allen diesen Orten liegen die Erze führenden Schichten horizontal mit zahllosen, den Unebenheiten der Unterlage entsprechenden Wölbungen und Biegungen, die aber nicht als Folge von Verwerfungen anzusehen sind. Nur in der Gegend von Eschenfelden ist man auf geneigte Lagen gestossen, deren Schichtenstörung als eine Fortsetzung der Dislokationen längs der später näher zu beschreibenden Verwerfungsspalte von Amberg zu betrachten sein dürfte.

Einer auffallenden Erscheinung begegnen wir in dieser Gegend bei Steinbach im N.O. von Neukirchen. Hier liegen grosse abgerundete Blöcke eines den Braunkohlen-Quarziten ähnlichen Sandsteines angehäuft über der Oberfläche zerstreut. Es sind offenbar aus der sandigen Ueberdeckung ausgewaschene Sandsteinconcretionen, wie wir solche in dem Aufschluss am Bahnhof von Sulzbach bereits kennen gelernt haben. Auch auf der Höhe zwischen Weissenberg und Weissenbach S.W. von Vilseck kommen ähnliche runde Blöcke von quarzitischem Sandstein vor, welche durch die Einschlüsse von *Exogyra columba* sich sicher als cretacisch zu erkennen geben.

Ueberall liegen hier in der Nähe auch alte Eisenerzgruben, so N.O. von Steinbach, bei Schnellersdorf, Edelsfeld, Ober- und Unterweissenbach, welche die Zugehörigkeit zu dieser eigenartigen Sandsteinbildung bestätigen.

Wenden wir uns von Neukirchen in O.-Richtung dem älteren Gebirge zu, so stösst man bei Oberreinbach auf jene merkwürdige Vorgebirg-ähnliche Ecke, an welcher die älteren Schichten in ihrem Ausstreichen plötzlich von ihrer bis-

herigen S.O.—N.W.-Richtung fast rechtwinkelig nach N.O. umbiegen und sich gegen Vilseck wenden. Zugleich zeigen sich an den Rändern dieser Umbiegungen Schichtenstörungen, welche gegen Vilseck hin schwächer, desto stärker aber in der Richtung gegen Sulzbach und Amberg sich bemerkbar machen. Mit letzteren treten zugleich auch die Spuren jener Eisenerzbildung zu Tage, welche man von Neukirchen her verfolgen kann und für gleichartig mit der erwähnten Erzablagerung bei Neukirchen anzusehen hat.

Grossartig entwickelt tritt uns diese Eisenerzformation sodann bei Etzmannsberg entgegen, wo ein ausgedehnter Grubenbau stattfindet. Erst in jüngster Zeit hat man durch Bohrversuche ermittelt, dass diese reiche Lagerstätte noch weiter nach N.W. gegen Kleinfalz und Frankengehaig zu, also gegen das oben erwähnte Gebirgseck hin, wo oberflächlich die Ablagerung bis jetzt nicht bekannt war, fortstreicht. Ebenso deutlich wie lehrreich sind die Aufschlüsse, welche der ausgedehnte Grubenbau der Zeche Etzmannsberg gewährt. Die Erzmasse, welche hier söhlig gemessen eine Mächtigkeit von 10—30 m erreicht und mit 60—65° nach S.W. einschiesst, gleicht einem stehenden Stock und ist, wie durch die zwei 107 m tiefen Schächte, die Querschläge und Strecken sich erweist, unter einer mächtigen Decke von meist Schwimmsand-artiger, locker gebundener Sandmasse auf Doggeroolith und Jurakalk ungleichmässig aufgelagert. Es ist klar, dass diese Erzmasse sich nicht in der steilen Lage gebildet haben kann, in welcher wir dieselbe jetzt vorfinden. Noch weniger ist dies von dem lockeren Sand denkbar. Dass aber hier eine grossartige Schichtenverrückung vorliegt, wird durch die ähnliche Steilstellung der zunächst unterlagernden jurassischen Gesteinsbänke bewiesen, die bis zu Tag ausstreichen und in entsprechender Lagerung über St. Anna bis nach Amberg hinaus meist in sehr steil geneigten Schichten sich fortziehen.

Der aus dem Haupt- oder Maxschacht getriebene Querschlag steht vom Schacht aus zuerst in Eisenoolithkalk des Doggers, durchquert dann grauen Thon und Mergel der Ornatenstufe auf ungefähr 8 m Länge, dann grauen, röthlich gefleckten, klotzigen Malmkalk und darüber grauen, plattigen Jurakalk des untersten Malms in Schichten, welche auch hier mit 60—63° nach S.W. einfallen. Eine deutliche Absonderungsfläche, welche diese Schichten schief abschneidet, bringt gelben, streifenweise röthlichen Letten (0,25 bis 0,75 m) mit einem schwachen Manganerzflötzchen vor Ort. Darauf folgt das eigentliche Eisenerzflötz in grosser linsenförmiger Ausdehnung und unregelmässiger Mächtigkeit. Nach N.W. und S.O. verschmälert sich die Erzlinse auf eine Länge von 350 m, um aber, wie neueste Versuche ergeben haben, dann wieder anzuschwellen. Die Erzmasse ist vorwaltend mild mit vielen drusigen, festen Partien und Glaskopfausscheidungen zwischen gelber Farberde, weissem Thon und einzelnen Streifen von Hornsteinknollen gelagert. Die meist sehr hochhaltigen Erze sind leicht zu gewinnen, indem man 2 m hohe Strecken bis zur Abbaugrenze treibt und dann rückwärts durch Querbau die 2 m hohen Pfeiler heraushaut, dann um 2 m tiefer niedergeht und dieselbe Abbaumethode wiederholt.

Das Hangende des Erzflötzes, welches schief gegen die unterliegenden Juraschichten sich anlegt, war in dem alten, später eingegangenen Karlsschacht sehr gut aufgeschlossen. Dieser Schacht durchteufte von Tag herein losen, meist grobkörnigen Sand auf 25 m, darunter schwärzlichen Letten und Thon (6 m), losen, hellfarbigen Sand, z. Th. Schwimmsand (11 m), darunter röthlichen und braunen Letten ($2^1/_2$ m) und dann das Erz, hier 7,5 m mächtig und mit 60—65° nach S.W. geneigt, während gegen das Ausgehende der Fallwinkel bis auf 70° steigt.

Alle diese Verhältnisse gleichen jenen der Ablagerung

auf dem Erzberg bei Amberg auf das Genaueste. Beide gehören unzweideutig ein und derselben Erzformation an. Der Etzmannsberger Zeche schliesst sich zunächst in S.O.-Richtung die grosse Erzhühl am Judenkirchhof bei Sulzbach an, wo ein sehr mächtiges Wiederanschwellen des Erzflötzes zu einem sehr ausgedehnten Bergbau Veranlassung gegeben hat. Näheres über den sehr alten Bergbau an dieser Stelle, welcher nur einen weiten, tiefen, kesselförmigen, wasserreichen Einbruch, die sog. Erzhühl, zurückgelassen hat, ist nicht bekannt. Neuerdings wurde dieser Flötztheil wieder durch die Carolinenzeche mit Erfolg aufgeschlossen. Die Verhältnisse sind im Allgemeinen dieselben wie bei der Etzmannsberger Zeche.

Erzspuren und alte Baue leiten von hier über die St. Annakapelle nach Lohhof. Hier breitet sich das Erzlager wieder, wenn auch weniger mächtig, weniger tief niedergehend und im Streichenden weniger ausgedehnt zu einer durch die St. Felixzeche in Abbau genommene Linse aus, die gegenwärtig als nahezu erschöpft gilt.

Das breite und tiefe Thal bei Rosenberg unterbricht die Fortsetzung des Erzzuges weiter in S.O.-Richtung. Hier scheinen überdies grossartige Schichtenstörungen und Absenkungen stattgefunden zu haben, durch welche der Frankendolomit bis in den Thaleinschnitt niedergezogen worden ist. Erst gegen Siebeneichen hin sammeln sich die Erzspuren wieder und es nimmt hier die grossartigste und ausgedehnteste Erzablagerung, welche bis zum Naabthal fortstreichend das berühmte Erzrevier von Amberg ausmacht, ihren Anfang. Seit nahe einem Jahrtausend wurden auf diesem Zuge in unzähligen alten Gruben und Grübchen, die meist von Tag herein nur geringe Tiefe erreichten, stellenweise aber doch bis in erstaunliche Tiefe, selbst bis zur jetzigen ersten Tiefbausohle vorgedrungen sind, Eisenerze gewonnen. Die ganze Oberfläche des Erzbergs ist von solchen alten Gruben durch-

wühlt. Erst durch die in neuerer Zeit ausgeführten Grubenbaue, den tiefen Theresienstollen und den Maschinen-Ludwigsschacht, wurde ein einheitlicher, regelmässiger Betrieb von Seite des Aerars in dem südöstlichen Felde dieses Erzstockes eingeleitet, während auf Siebeneichen innerhalb der in Privatbesitz gebliebenen nordwestlichsten Abtheilung ein getrennter Betrieb geführt worden ist. Um zunächst von letzteren zu sprechen, so ist zu bemerken, dass hier das in oberer Teufe mächtige Erzlager bis auf die dermalige Sohle, in der man auf Jurakalk stiess, abgebaut und daher die Grube einstweilen verlassen wurde.

In dem ärarialischen, 3189 Hektar grossen Grubenfelde, dem sog. Erzberg, durchschneidet der erwähnte tiefste Theresienstollen, der im Ganzen auf eine Länge von 1570 m in's Feld getrieben ist, von Tag herein bis zum sog. Umbruchsort den auch zu Tag ausstreichenden Eisensandstein des Doggers mit vielen Sandeisensteinschwarten und Butzen von Braun- und Rotheisenerz neben Spuren des dieser Bildung eigenthümlichen oolithischen Rotheisenerzflötzes. Einzelne lockere, Bindemittel-arme Sandzwischenlagen, die zur Bildung von Schwimmsand neigen, und thonige Einbettungen erschwerten vielfach die Instandhaltung des Stollens und gaben zur Anlage eines Umbruchortes Veranlassung. Bis zu dieser Strecke zeigt sich mehrfach eine Anreicherung der sehr festen, sandigen Brauneisensteine, welche derbe Stufferze darstellen. Solche härtere Partien bezeichnet man als Wand und die hier anstehenden, z. Th. gewinnbaren Erze als Wanderze oder rauhe Erze (zwischen Querschlag III und IV), welche gleichsam eine 2. liegende Erzregion im Querschlag III und IV ausmachen, aber nicht aushalten. Ueber der Umbruchsstelle hinaus wurde das Stollenort theils im Eisensandstein, theils in der Flötzregion selbst weiter fortgeschlagen. Mit dem im Hangenden abgeteuften Maschinenschacht ist der Stollen durch einen Querschlag verbunden, wie denn

zahlreiche Querschläge vom Stollen aus zu dem im Hangenden aufsetzenden eigentlichen, z. Th. lettigen, bröcklich weichen, z. Th. festeren Erzflötze mit derbem Brauneisenstein getrieben wurden. Dadurch ist eine grosse Unregelmässigkeit der Gesteinsmasse nachgewiesen, welche als Grundlage der Erzformation angesprochen werden muss und als ein alter, unebener, ausgefurchter und abgespülter Meeresboden aufzufassen ist. Es liegt die Erzformation bald unmittelbar auf dem Sandeisenstein auf und durchdringt diesen an der Grenze mit Brauneisensubstanz (Sanderze), bald sind Kalkschollen von Doggeroolith und selbst Ornatenthon als anstehende Schichtenköpfe dazwischen eingekeilt, wie z. B. im Schachtquerschlage. Weisser Jura- oder Malmkalk dagegen wurde, soviel bekannt ist, in der Grube nur in Querschlag V angefahren. Da nun letzterer in der Nähe des Pulverthurms in ziemlich mächtigen Lagen zu Tage ausgeht und als Felsrippen in S.O.-Richtung gegen das Stollenmundloch fortstreicht, so muss man daraus folgern, dass der Kalk gegen die Tiefe weggebrochen war, ehe die Eisenerzschichten sich hier abgesetzt haben und dass dieser Abbruch der ältern Gebirgsschichten die verschiedenen Lagen der letzteren durchschnitten hat. Damit stimmt auch die Thatsache überein, dass die unterlagernden Jurabildungen und die Erzschichte, obwohl beide steil geneigt sind, doch oft discordant zu einander gestellt sich erweisen. In dem Querschlag V sind aber die angetroffenen Brocken von Malmkalk so wirr gelagert, dass sie den Eindruck machen, als seien sie in eine Kluft oder Spalte hineingestürzt.

Was nun die Zusammensetzung der eigentlichen Erzformation anbelangt, so unterliegt diese in Beziehung auf Mächtigkeit grossen Schwankungen. In der Aufeinanderfolge der verschiedenen Lagen dagegen gibt sich eine ziemlich übereinstimmende Anordnung zu erkennen. Im Allgemeinen beginnt die Ablagerung über dem unebenen Untergrund der älteren Juraschichten mit Lettenmassen von gelber,

weisser, seltener rother Farbe. In denselben finden sich Manganerze — Hartmangan oder mulmiger Pyrolusit — theils in ziemlich regelmässigen Streifen, theils in Butzen und Nestern eingebettet. Auch einzelne Hornsteinknollen und verkieselte Juraversteinerungen, namentlich *Dysaster carinatus*, kommen darin vor. Dieser Thon ist plastisch und kann, wenn er rein weiss ist, zur Fabrikation von Thonwaaren verwendet werden, wie dies früher mit einem Material vom Erzberg thatsächlich der Fall war.

Darauf folgt nun das eigentliche Erzflötz von ungleicher bis zu 45 m (Querschlag) reichender Mächtigkeit; es hat von Tag herein eine Neigung mit 33°, tiefer jedoch nur unter 25° nach S.W. Streckenweise ist das Erzflötz durch Lettenstreifen und Hornsteinknollen selbst bis zur Unbauwürdigkeit verschlechtert. Ohne scharfe Abgrenzung geht die eisenreiche Lage nach oben in einen gelben, weissen und rothen, buntstreifigen Letten über, der nach und nach Sandkörner aufnimmt und $1^1/_4$ bis $1^1/_2$ m von dem Eisenerzflötz durch Sand ersetzt wird. Dieser hangende Sand ist vorherrschend bindemittelarm, meist zur Bildung von Schwimmsand geneigt, entweder gleichförmig fein (Putzsand) oder grobkörnig und oft zu festem Sandstein verkittet und zu kugeliger Masse vereinigt. Man hat solche Sandmassen in einer Mächtigkeit bis zu 50 m durchfahren (Querschlag VI), wo sich dann gegen Egelsee hin auch ein Tripel-ähnliches Gestein anlegt.

Nachdem die Erze über der Stollensohle, welche meist in von den Alten stehen gelassenen, weniger guten oder ihnen unbekannt gebliebenen Pfeilern bestanden, abgebaut waren, schritt man zur Anlage zweier Tiefbausohlen, die erste 20 m unter dem Theresienstollen und die zweite 15 m tiefer, und zur Anlage eines im Ganzen 114 m tiefen Hauptschachtes (Barbara) im Liegenden, von dem aus ein Querschlag zum Hinansfördern der Erze auf die Gichtsohle des benachbarten

Hochofens geführt ist. Der Schacht ist im Eisensandstein angesetzt, der bis zu 53 m Teufe anhält und von da stellt sich Opalinusthon bis zum Schachtsumpf ein. An der Oberfläche geht in der Richtung gegen den Pulverthurm und den alten Ludwigsschacht über dem Eisensandstein erst Doggeroolithkalk (6 m), dann Ornatenthon (4 m) und endlich grauer Jura- (Malmkalk) (12 m) zu Tage aus. Im Liegenden zeigt sich am Abhang gegen den Hochofen hin unter dem Opalinusthon erst liasischer Posidonomyenschiefer (3 m), der sehr schön in den Gräben des benachbarten Wäldchens (Götterhain) ansteht, darunter mittlerer Lias, Mergel und sandige Mergelkalke, voll der bekannten grossen *Gryphaea cymbium (gigas)* (2,5 m) und als letztes Liasglied eisenschüssiger, grober Arietensandstein und feinkörniger, gelber Angulatensandstein (1,5 m). Darunter ragt in einer vorstehenden Rippe weisser, grobkörniger Bausandstein des obersten Keupers über der Oberfläche vor (13 m), unter dem weitere Keuperschichten durch ein Bohrloch in der Nähe des Zechenhauses bis zu einer Gesammttiefe von 147 m nachgewiesen wurden.

Die Eisenerze des im Ganzen sowohl in der Streich- wie Fallrichtung sehr ungleich mächtigen und absätzigen Lagers gehören grossen Theils dem wasserreicheren Brauneisenstein — Göthit — an, der jedoch ganz unregelmässig mit Limonit verwachsen vorkommt. In den festeren Sorten, sog. Stufferzen enthalten sie durchschnittlich 88% Fe^2O^3; 0,35% MnO; 1,023 P^2O^5; 9% H^2O und 1,8% in Säuren unlöslichen Rest. Die weichen sog. Klarerze bestehen durchschnittlich aus 71% Fe^2O^3; 0,61% MnO; 1,98% P^2O^5; 2,93% Al^2O^3; 12,8% SiO^2; das übrige ist Wasser und Unlösliches. Nur ausnahmsweise und auf ganz geringe Mengen beschränkt hat sich in der grössten Tiefe auch feinkörniger Spatheisenstein, sog. Weisserz, vorgefunden, das sich durch seinen hohen Gehalt an Phosphorsäuren (4,79 %) auszeichnet, wie denn Phosphate, so namentlich Wavellit,

Kakoxen und Vivianit nicht gerade zu den seltenen, aber immer doch nur in geringen Mengen vorkommenden Mineralien des Erzbergs gehören. Den ersten trifft man in rundlichen faserigen Anflügen auf Klüften, den Kakoxen in Verwachsung mit den anderen Eisenmineralien und Vivianit hauptsächlich in Altungen an. In der Nachbarschaft tritt auch Phosphorit auf, den man innerhalb der Grube selbst noch nicht beobachtet hat. Er bildet unter Tag auf dem sog. Egelsee-Acker eine linsenförmige Einlagerung in knolligen Hornsteinlagen von 7 m Mächtigkeit, aber von nur geringer Ausdehnung in der Länge oder nach der Tiefe hin. Die auf diese Lagerstätte geführten Tagebauversuche haben zu keinem günstigen Erfolge geführt und mussten wegen Unergiebigkeit der Lagerstätte nach kurzer Zeit wieder aufgegeben werden. Im hinteren Erzberge, d. h. in N.W.-Richtung gegen Siebeneichen, wo in den zwanziger Jahren auf höheren Lagen reiche Erzmittel abgebaut wurden, scheint nach der Tiefe zu die Erzführung rasch abzunehmen und auch über Tag trifft man nach Siebeneichen hin nur wenige kleine Pingen aus alter Zeit. Auch dieses Verhalten weist auf absätzige und auf wenn gleich stellenweise mächtig ausgebauchte und in die Länge ausgedehnte linsenförmige Butzen, in denen der Erzgehalt sich gesammelt hat.

Verlassen wir den Erzberg und wenden uns in Verfolgen des Erzzuges weiter nach S.O., so bieten sich uns zunächst jenseits des Vilsthales am Fusse des Mariahilfsberges nur ganz schwache Erzspuren, die jedoch fort und fort über Amberg hinaus nach Krumbach und Engelshof, wo früher bedeutende, jetzt als abgebaut geltende Gruben sich auf solchen Erzerweiterungen befanden, hinführen. Die Ablagerung bei Krumbach ist auf Schichten des ältesten Jurakalks aufgesetzt und besitzt im Ganzen dieselbe Schichtenfolge, wie der Zug am Erzberg, war aber dadurch besonders ausgezeichnet, dass in den Hornstein-

reichen Sandsteinschichten sehr zahlreiche eingeschwemmte, verkieselte Versteinerungen des Malms und Doggers angetroffen worden sind, die man eine Zeit lang als ursprünglich der Eisenerzbildung zugehörig angesehen hat. Aber schon die Vermengung von verschiedenen, jurassischen Stufen angehörigen Arten beweist ihr Vorkommen auf sekundärer Lagerstätte, wie dies dann auch durch die Beschaffenheit der sie beherbergenden Sand- und Geröllschichten sich zu erkennen gibt.

Ein Schacht bei Engelshof durchteufte von Tag nieder zuerst zersetzten Cenomangrünsandstein, wie er in der Nähe bei Hiltersdorf durch Steinbrüche aufgeschlossen ist. Gelbe und grüne, flaserige Letten und Thone und dann gelbsandige Thone mit Hornsteinknollen folgen nach der Tiefe zu, wo endlich in sandig-lettigen Schichten butzenförmig die Eisenerze sich einstellten und an einer schief abgebrochenen Unterlage theils auf Malmkalk, theils auf Eisensandstein aufruhen.

Trotz dieses deutlichen und richtig orientirenden Aufschlusses veranlasste theils das Vorkommen jurassischer Versteinerungen in der Erzregion, theils das Ausstreichen von Eisenerzen in unzweifelhaften Liasschichten ganz in der Nähe von Engelshof, nämlich in den Hohlwegen N. von Paulsdorf in früherer Zeit eine falsche Zuweisung dieser Erzbildung bei Engelshof oder Krumbach zum Lias. Diese Annahme hat sich erst später durch sorgfältige Untersuchungen als irrthümlich zu erkennen gegeben.

Mit dem Erzpunkt bei Engelshof endigt der ganze Amberger Erzzug in S.O.-Richtung, obwohl der Abbruch des älteren Gebirgs am sog. Amberger Sprung unverändert über Högling, Dürnricht, Schwarzenfeld und weiter am Nordrande der Bodenwöhrer Bucht fortstreicht und bei Taxsöldern und an der Bucher Zeche unfern Bodenwöhr wieder zu einer ergiebigen Eisenerzablagerung hinführt. Letztere gehört aber nach ganz sicheren Nachweisen den Schichten des mittleren

Lias (Amaltheenmergel) an. Auch sind die hier auftretenden oolithischen Erze von völlig anderer Beschaffenheit, wie jene der Amberger Erzformation und gehören der bis zum Keilberg bei Regensburg reichenden Erzbildung an, welche auch sonst im Bodenwöhrer Becken an mehreren Stellen bei Mägendorf und Thürn unfern Bruck bekannt und selbst durch Bergbau früher ausgebeutet worden sind.

Das Vorkommen von Eisenerz der Amberger Formation beschränkt sich aber weder bei Amberg noch bei Krumbach und Engelshof auf die steil gestellten Lagen längs der Amberger Abbruchs- und Verwerfungsspalte, sondern breitet sich von dieser aus weithin über die südlich vorliegenden Gebirgstheile. Hier vertheilen sich aber die kleinen Erzbutzen auf zerstreut liegende Einzelbuchten, wo sie in völlig ungestörten horizontalen Lagen im Untergrund auf jurassischen Schichten aufruhen und ganz dieselbe oder eine analoge Zusammensetzung aus einzelnen Lagen erkennen lassen, wie wir diese auf dem Haupterzzug nachgewiesen haben. Auch räumlich gibt sich dieser Zusammenhang deutlich dadurch zu erkennen, dass die einzelnen kleinen Erzvorkommnisse sich unmittelbar dem grossen Hauptlager anschliessen. So finden sich ganz in der Nähe des Amberger Erzbergs die alten Eisensteingruben von Gailohe, an der Haselmühle bis gegen Köfering hin und auf der linken Seite des Vilsthales die früher sehr ergiebigen Gruben am Haidweiher, bei Germersdorf und Kümmersbruck, in denen ganz vorzügliche Farberde, sog. Goldocker gewonnen wurde. Noch jetzt beobachtet man in den Hohlwegen südlich von Germersdorf das Ausgehende des Erzlagers und in der Eisenbahnfüllgrube daselbst zeigt sich an mehreren Stellen der kellerartigen Vertiefungen der Jurakalk, von Eisenerz-führenden Thonmassen mit Hornsteinknollen ausgefüllt und von Grünsandstein bedeckt. An diesen kleineren Erzpunkten herrscht die ockerige Farberde vor und derbe Brauneisensteine finden sich

mehr untergeordnet. Auch die rein weissen, zur Porzellanfabrikation brauchbaren Thone sind hier stellenweise stark entwickelt und herausgewitterte Hornsteinknollen gehören zu den häufigeren Erscheinungen.

Von dieser erzreichen Region aus breitet sich die Formation über das Gebirge weiter aus. Südlich von Amberg wiederholt sich das Vorkommen von Eisenerz bei Götzenöd und Schwabenhof unfern Theuern, dann bei Dörnberg unfern Rieden, im Buchheimer Forst bei Schmidmühlen, am Fischerberg bei Kallmünz bis zum Kelheimer-, Pointner- und Frauenforst, wo man auf die schon erwähnten alten Schlackenhalden stösst.

Ueber Amberg und Sulzbach hinaus in N.-Richtung legen sich 2 neue Erzzüge bei Vilseck an, welche ganz analog wie der Amberger weiter in N.W.-Richtung fortstreichen. Der eine zieht sich vom Kotzbauerschacht über Vilseck nach Auerbach, der andere von Freihung über den Langenbrucker Schwarzenberg (Erzhäusel), Pappenberg, Kirchenthumbach nach Sassenreuth.

Von den alten Gruben S.O. von Vilseck bei Schalkenbach, welche als erzreich galten, ist wenig bekannt. Der in neuerer Zeit daselbst abgeteufte sog. Kotzbauerschacht war 22 m tief und ging von Tag nieder durch Schutt, dann durch sandigen Letten bis zum Erzlager, das oben aus mulmigem Brauneisenerz (gegen 2 m mächtig), gegen unten aus schwarzem, Mangan-haltigem Eisenstein zusammengesetzt gefunden wurde und auf mulmigem Thon mit Hornsteinknollen lagerte. Der Untergrund bestand aus weissem Malmkalk, dessen Schichten geneigt lagen, während das Erzflötz horizontal ausgebreitet war.

In der Nähe, mehr gegen O. hin wurden bis in die neueste Zeit in der sog. Luitpoldzeche bei Grossschönbrunn Erze gewonnen. Die in der Umgebung ausstreichenden jurassischen Schichten sind unter 20° in St. 1 nach

N. geneigt und bilden auch hier den Untergrund der Erzablagerung, die hier dieselbe Reihenfolge der Schichten aufweist, wie an den bisher erwähnten Punkten, aber die Eigenthümlichkeit besitzt, dass man in mehreren Schächten unter der Oberflächen-Ueberdeckung erst eine Rippe von Jurakalk durchteufen musste, um zu dem Erzlager zu gelangen. Dies gab zu der Annahme Veranlassung, dass der Eisenstein älter als der Jurakalk sei. Dieses Verhältniss erklärt sich aber dadurch, dass der Jurakalk eine vorspringende Rippe bildet, unter welcher die das Erz erzeugenden Gewässer Raum fanden, Ausscheidungen und Niederschläge von Eisenoxydhydrat abzusetzen. An anderen Stellen enthält das Erz oolithische Körner, welche wohl dem abgeschlämmten, aus Doggeroolith bestehenden Untergrund entstammen, wie die zahlreichen Hornsteinknollen, welche auch hier nicht fehlen, aus den Malmschichten ausgenagt worden sind.

In der Nähe zieht nun auch die grosse Verwerfungsspalte durch, welche in N.W.-Richtung bei Vilseck hindurchstreicht, dann von einer mächtigen Sandüberdeckung verhüllt, erst in der Nähe von Auerbach wieder deutlich hervortritt.

In früherer Zeit wurden auf diesem Zuge sowohl bei Sommerhau, wie am Schleichershof (Schleicherszeche) in 4 über 26 m tiefen Schächten 1—5 m mächtige Eisenerze gewonnen. Von dem letzteren Bau ist nur so viel bekannt, dass hier mit dem Eisenerze lettige Lagen, voll von sehr zahlreichen Hornsteinknollen und weisse Thonschichten vorkommen, welche auf Jurakalk aufgelagert waren. Das Erzlager gilt hier als völlig ausgebaut; doch führte dieser Erzpunkt zur Entdeckung einer der eigenthümlichsten Erzablagerungen, nämlich der zwischen den zuletzt erwähnten Orten liegenden sog. Leonizeche unfern Auerbach.

Ein ganz schmaler Einschnitt, durch welchen die erwähnte Verwerfungsspalte verläuft, trennt hier den Franken-

dolomit des Gottesvaterbergs von dem aus der Gegend von Dörnbach gegen die Pinzigkapelle zu Tag ausstreichenden Eisensandstein und beherbergt einen gegen 6 m mächtigen Brauneisenerzbutzen, der zunächst von braunem Lehm und Alluvialsand bedeckt ist. Bei dem Verfolgen der Ablagerung nach der Tiefe zu stiess man auf eine weisse, krystallinische Gesteinsmasse, welche zuerst für Dolomit gehalten wurde, wie er in dem benachbarten Gottesvaterberg mit in St. 7 unter 20° nach W. einfallenden Schichten ansteht. Bei dem Liegen an der Luft bräunte sich aber der vermeintliche Dolomit sehr stark und verrieth sich dadurch als ein sehr reicher Spatheisenstein, wie er, allerdings nur spurweise, auch im Amberger Erzberg angetroffen wurde, der in der Leonizeche aber einen breiten Erzstock ausmacht. Indem man diesen querschlägig bei 35 und 40,5 m Tiefe durchörterte, stiess man einerseits auf wirklichen Frankendolomit, andrerseits auf Ornatenthon und untersten Malm, zwischen welchen in verhältnissmässig enger Spalte der Erzstock der sog. Leonizeche eingekeilt ist. Gegenwärtig gewinnt man jährlich aus dieser Grube über 27000 Tonnen Erz, welche man mittelst Drahtseilbahn an die Station Ranna befördert. Hier scheint der Brauneisenstein der oberen Teufe aus der Zersetzung des Spatheisensteins hervorgegangen zu sein. Bemerkenswerth ist, dass in dieser Gegend auch der Eisensandstein des Doggers ausserordentlich reich an Sandeisenstein ist; zahllose ausgewitterte Schollen desselben überdecken die Berggehänge. Leider geht dieser enorme Reichthum an Eisen für die Technik verloren, weil der Stein viel zu geringhaltig an Eisen und ausserdem zu stark kieselhaltig ist.

Auf der eigentlichen Erzspalte kennt man in N.W.-Richtung keine nennenswerthe Erzablagerung weiter. Denn die zahlreichen Gruben bei Pegnitz gehören den vorliegenden, über den ganzen Frankenjura ausgebreiteten Butzen an, die in sackartigen Vertiefungen der Malmkalke abgesetzt

sind, während die vielen Röthelgruben bei Pegnitz bezw. Troschenreuth, welche keine Eisenerze, sondern nur Farberde fördern, auf Zwischenschichten im eigentlichen Doggersandstein bauen.

Der letzte nordöstlichste Erzzug hält sich dicht an den äussersten Rand des Juragebirgs. Derselbe beginnt in der Nähe der Bleierzregion von Freihung bei Rothhaar in schwachen Streifen, die man versuchsweise früher bebaute. Erst auf dem benachbarten Schwarzenberg schwillt das Erz zu einem grösseren Stock an, auf welchem die sog. Langenbrucker Gruben (Gottesgabe, Philipp, Peter, Barbara) früher grosse Erzmengen zu Tag förderten. Das Erzflötz besteht hier aus 3 Lagen, der hangenden Schwarte, dem Hauptflötz und dem Sohlerz, welche zusammen bis 2 m mächtig sind. Das Hangende ist fetter, grünlicher und gelber Thon, oft mit Kalksteinschollen, das Liegende dunkelgrauer oder gelber, auch als Farberde benützter Thon, der in der Philippszeche nachweislich auf plattigem Jurakalk aufruht. Hier finden sich auch Hornsteinknollen. Man vermied, den liegenden Thon zu durchteufen, weil unter demselben das Eindringen von Wasser zu befürchten war. Im Allgemeinen ist das Erz mild wie in Amberg, nur weniger eisenhaltig und wo das Lager an den Eisensandstein sich anlehnt, ist dasselbe rauh und hart mit 52 % Fe^2O^3; 16 % SiO^2; Spuren von P^2O^5; 6 % Al^2O^3; 15 % Quarz und Sand nebst 11 % Wasser.

Hieran reihen sich nach N.W. gegen Pappenberg hin früher auf Farberde betriebene Gruben und bei Höhenberg alte verfallene Eisenerzzechen, deren Zug man über Troschenreuth bis nach Kirchenthumbach verfolgen kann, wo noch in neuester Zeit Bergbaubetrieb auf einem schwachen Erzflötz stattfand.

Die letzte bedeutende Erzablagerung in nördlicher Richtung breitet sich in dem weiten Kessel von Sassenreuth aus. In dieser tiefen wasserreichen Bucht ist das Erz besonders

mild und geht vielfach in schönen gelben Ocker über, der als Farberde gewonnen wird. Sonst ist z. Z. das Erzrevier ausser Betrieb, da ein angelegter Stollen nicht tief genug angesetzt werden konnte, um das überaus wasserreiche Gebirge trocken zu legen. In diesem von O. her durch den von Kutschenrain her streichenden Bergrücken auf ungefähr 600 m Länge getriebenen, mit 5 Lichtschächten versehenen Tiefbaustollen durchörterte man von Tag herein die in St. 6 mit 46° nach W. einfallenden Keuperschichten, welche vorwaltend aus röthlichen und weisslichen Sandsteinbänken mit zwischen gelagertem rothem, grauem und weisslichem Lettenschiefer bestanden, auf eine Länge von beiläufig 275 m. Darin stiess man 23 m unter der oberen Keupergrenze auf ein Flötzchen von Keuperkohle und auf eine harte Eisensteinschwarte, welche die Abgrenzung gegen den auflagernden Lias zu bilden scheint. In letzterem machte sich bei 284 m der Gesammtstollenlänge ein gegen 4 m mächtiges Flötz des oberliasischen Kalks mit *Monotis substriata* bemerkbar. Dann wurde auf 100 m Opalinusthon und endlich auf 206 m Eisensandstein und Doggeroolith durchfahren bis vor Ort, wo die Ueberhandnahme von schwimmendem Gebirge dem Fortbetrieb die grössten Schwierigkeiten bereitete. In diesem Sandstein stiess man auch auf das bei Troschenreuth als Farberdematerial gewonnene rothe Lettenflötz (sog. Bolus). Ueber Tag streichen auf der Ostseite der Mulde auch die tiefsten Schichten der untersten Malmstufe aus, welche gegen die Tiefe von der Abgrenzungsspalte, ähnlich wie bei Amberg abgeschnitten wird. In der Muldenmitte liegt das lettige, $1^1/_2$—3 m mächtige Eisenerzflötz unter einer dicken Decke von meist lockeren, von Wasser durchtränkten, als Schwimmsand schwierig zu bewältigenden, z. Th. zu festem Sandstein verdichteten Sandschichten mit Zwischenlagen von Letten- und Hornstein-führendem Geröll. Auch das Liegende des Flötzes besteht aus ähnlichen, zur Bildung

von Schwimmsand geneigten lockeren Massen, so dass wegen der Schwierigkeit des Betriebes der Bergbau eingestellt wurde und jetzt nur am Westrande der Mulde die Gewinnung von Farberde zeitweise in kleinen Gruben stattfindet.

Die Verwerfungsspalte setzt zwar von hier in N.W.-Richtung am Rande des Juragebirgs noch weiter fort, aber ohne dass neue Eisenerzablagerungen längs derselben sich bemerkbar machen. Im Innern des Juragebirgs dagegen treten auch in diesem nördlichen Theil des Frankenjura einzelne zerstreut liegende Eisenerzbutzen, welche der bisher betrachteten Formation zuzuzählen sind, auf. Ziemlich zahlreiche Grübchen in der Umgegend von Pegnitz, meist auf Gelbfarberde betrieben, haben wir bereits erwähnt. Gegen den Westrand des Gebirgs sind nur geringe Erzspuren bekannt. Doch deuten nicht unbeträchtliche Halden von Eisenschlacken in der Umgegend von Königsfeld auf eine uralte, auch in dieser Gegend stattgehabte Gewinnung von Eisenerzen. Ebenso scheint nördlich von Hilpoltstein die Bezeichnung „Arzberg" auf solche Baue hinzuweisen. Noch in neuerer Zeit lieferten Gruben bei Krottensee in der Gegend von Neuhaus und Velden Erze für die Eisenhütte Hammerschrot und Ranna a. d. Pegnitz. Sie reihen sich hier jenen bei Auerbach an, wie die am Arzberg bei Eschenbach und an der Arzlohe bei Happurg unfern Hersbruck mit den jetzt noch betriebenen, früher erwähnten Zechen bei Neukirchen in räumlichem Zusammenhange stehen.

Endlich erinnern wir noch an die Eisenschlacken im Frauenwald und Pointener Forst bei Kelheim. Jedoch ist es hier nicht sicher, ob in dieser Gegend nicht Bohnerze zur Herstellung von Eisen dienten. Denn solche Erze wurden noch in neuerer Zeit in der Nähe bei Schafhüll gewonnen, wie denn im ganzen südwestlichen Theil des Frankenjura, namentlich in der Gegend von Eichstätt (bei Hirnstetten, Ruppertsbuch, Wachenzell, Pollenfeld, in der Grobschwart

u. s. w.) reiche Bohnerzablagerungen sich finden und südwestwärts über Heidenheim, Diemantstein, Lierheim, Zöschingen bis in den schwäbischen Jura fortsetzen. Die Bohnerzgruben bei Zöschingen sind jetzt noch im Betrieb.

Auch ausserhalb des Frankenjura scheinen die tiefsten cretacischen Ablagerungen Eisenerze zu beherbergen. Dann bei Kaiting unfern Roding, wo diese Schichten weit in das Urgebirgsgebiet vordringen, finden sich derbe Eisenerze in Grossoolith-ähnlicher Form aus den ältesten cretacischen Lagen ausgewittert.

Es ist leicht erklärlich, dass man über die geologische Stellung der Amberger Eisenerzformation so lange im Unklaren geblieben ist, wenn man die verschiedenartigen Bildungen überblickt, in welchen auf dem Frankenjura oder an seinem Rande Eisenerze vorkommen.

Nicht blos der mittlere Lias beherbergt solche Erze (Keilberg bei Regensburg, Buch bei Bodenwöhr, Mögendorf und Thürn daselbst, Paulsdorf bei Amberg), sondern auch der Eisensandstein des Doggers umsäumt mit einem fast ununterbrochenen Zug von 2—3 Rotheisenoolithflötzen, welche an vielen Stellen, wie bei Aalen in Württemberg, bauwürdige Erzmittel darbieten, den ganzen Rand der fränkischen Alb. Dazu kommen dann noch die eben erwähnten Bohnerze, deren Bildung im Frankenjura zur Oligocänzeit begann und bis in die Jungmiocänzeit (mit *Helix sylvana*) fortdauerte.

Diesen mannigfaltigen Eisenerzbildungen gegenüber können wir die charakteristischen Merkmale der Amberger Eisenerzformation, welche die Zusammengehörigkeit der über dem Frankenjura an vielen zerstreut liegenden Orten weit verbreiteten Ablagerungen und die Zuweisung zum oberen cretacischen System erkennen lassen, in folgender Weise zusammenfassen:

1. Die Erzbildung liegt stets über jurassischen und unter cretacischen Gesteinsschichten.

2. Dieselbe wird wenigstens stellenweise von cenomanem Gründsandstein überdeckt.

3. Die derben, meist schaligen Brauneisensteine sind stets mit erdig-ockerigen, vielfach als Farbmaterial verwendbaren Massen verwachsen und stehen selten und nur an einzelnen Orten mit körnigem Spatheisenstein in Verbindung.

4. Sie werden unmittelbar im Hangenden und Liegenden von theils sandigen, theils thonigen Lagen begleitet. Die ersteren besitzen grosse Neigung im ungebundenen Zustande mit Wasser vermengt, als schwimmendes Gebirge aufzutreten, zuweilen aber auch sich zu festen, in kugeligen Klötzen auswitternden, Braunkohlensandstein-ähnlichen Massen zu verfestigen. Die thonigen Lagen sind bald gelb, bald roth gefärbt, oft auch rein weiss und bilden dann eine Art Pfeifenerde, die als Material zur Herstellung von Thonwaaren benutzt wird.

5. Sehr charakteristisch ist das Auftreten von meist kugeligen Hornsteinknollen, welche, aus Juraschichten ausgewittert, meist sehr zahlreich in den Thon eingeschwemmt worden sind.

6. Von Versteinerungen finden sich nur eingeschwemmte, meist verkieselte Exemplare aus verschiedenen jurassischen Schichten.

7. Die Erze füllen mit den Begleitschichten theils sackförmige Vertiefungen des jurassischen Untergrundes aus und liegen nahezu horizontal oder ziehen sich in zusammenhängenden, stellenweise mächtig ausgebauchten, meist steil aufgerichteten Lagen an der grossen Verwerfungsspalte des östlichen Jurarandgebirges in S.O.—N.W.-Richtung auf beträchtliche Länge fort.

8. Ihre Entstehung scheinen sie dem Erguss von eisenhaltigen Gewässern zu verdanken, welche auf den bereits vor ihrer Ablagerung vorgebildeten Spalten zu Tag getreten sind und sich bis über die benachbarten Juraschichten verbreitet haben.

9. Nach ihrem besonders reichlichen Absatz längs der Spalten wurden hier die Erzlager mit sammt den jurassischen Schichten des Untergrundes später dislocirt und in eine mehr oder weniger steile Stellung versetzt.

Ueber die Bestimmung der absoluten Temperatur.

Von Ludwig Boltzmann in München.

(Eingelaufen 2. Januar 1894.)

Bekanntlich lässt sich sehr leicht konstatieren, ob zwei Körper gleiche Temperatur haben, dadurch, dass sie miteinander in Berührung gebracht sich im Wärmegleichgewichte befinden. Um die Gleichheit der Temperatur zu konstatieren, genügt also jedes beliebige empirische Thermometer. Quantitativ gemessen kann dagegen die Temperatur in rationeller Weise nur mittels der Lord Kelvin'schen Temperaturscala werden (phil. mag. 1848; phil. trans. 1854; el. and heat. Enc. Brit. 1878 scient. pap. III. p. 1), wonach die Temperaturen zweier Körper sich so verhalten, wie die Wärmemengen, welche von einem Zwischenkörper, der einen einfachen, umkehrbaren, aus zwei Adiabaten und zwei Isothermen bestehenden Kreisprocess zwischen diesen Temperaturen durchmacht, aufgenommen, respektive abgegeben werden. Die so gemessene Temperatur wollen wir die absolute nennen und mit T bezeichnen, wogegen t dieselbe nach einer beliebigen empirischen Scala gemessene Temperatur sein soll. Wenn für irgendwelche Körper die empirische Temperatur denselben Wert hat, so muss dies auch von der absoluten gelten, es kann also T nur eine Funktion von t sein, deren Ableitung wir mit T' bezeichnen wollen.

Da aber die an realisierbaren thermodynamischen Maschinen vorgehenden Prozesse weit entfernt sind, solche einfache umkehrbare Kreisprozesse zu sein, so ist die experimentelle Bestimmung der Temperatur durch direkte Anwendung dieser Definition unmöglich. Schon Lord Kelvin selbst benutzte die Eigenschaften verschiedener Körper, um auf indirektem Wege die Berechnung der absoluten Temperatur zu erreichen. Er zeigte, dass man mit Hilfe der Eigenschaften der gesättigten Dämpfe verschiedener Substanzen die absolute Temperaturscala im weiten Umfange berechnen könnte. Ein ähnliches Verfahren schlug Lippmann ein (c. r. 95, p. 1058, journ. de phys. d'almeida 1215, p. 53, 277), welcher sehr allgemeine Gleichungen entwickelte und daraus die Berechnung der absoluten Temperatur nach dem Pictet'schen Thermometer mit schwefeliger Säure durchführte. Die wichtigsten Versuche aber, die absolute Temperatur indirekt zu berechnen, beruhen auf dem bekannten Versuche von Thomson und Joule über die Temperaturveränderungen eines Gases bei Ausdehnung ohne äussere Arbeitsleistung. Sie wurden von ihm selbst (l. c.) und Jochmann (Beiträge zur Theorie der Gase, Programm des Kölnischen Realgymnasium. Berlin, 1859, Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 5, p. 24—39 u. 96—131) der Berechnung unterzogen. Eine etwas andere Formel stammt von Weinstein (Dissertation, Berlin 1881, metronomische Beiträge der kaiserl. Normalaichungskommission 1881 No. 3). Derselbe giebt auf S. 8 seiner Dissertation einen Ausdruck für die Grösse, welche nach unserer Bezeichnung $T:T'$ hiesse, der nur abhängt von der Relation, welche für den zu Grunde gelegten Körper zwischen Druck, Volumen und empirischer Temperatur besteht mit Ausnahme einer einzigen darin vorkommenden Grösse γ. Diese Grösse γ wird ebenfalls aus der Relation zwischen Druck, Volumen und Temperatur, aber nicht der empirischen, sondern der absoluten definiert. Da letztere

Relation natürlich nicht bekannt ist, so müssen zur Ermittlung von γ gewisse Hypothesen herbeigezogen werden. Weinstein findet für diese Grösse verschiedene Werte, je nachdem er die van der Waals'sche oder Clausius'sche Zustandsgleichung zu Grunde legt, und hält schliesslich durch eine Art Kompromiss zwischen beiden Zustandsgleichungen den Wert $\gamma = 2$ für den wahrscheinlichsten; doch scheinen mir gegen alle diese Berechnungen von γ Bedenken möglich zu sein. Die Schlussformel Weinstein's enthält daher, nachdem für γ dieser Wert substituiert wurde, nur mehr Grössen, welche aus der Beziehung zwischen Druck, Volumen und empirischer Temperatur eines Gases gefunden werden können.

Die angenäherte Berechnung der absoluten Temperatur geschieht bekanntlich mittels der Voraussetzung, dass die schwer coerciblen Gase sich angenähert wie sogenannte vollkommene oder ideale Gase verhalten und dass für ein ideales Gas sowohl der Druck bei konstantem Volumen als auch das Volumen der Gewichtseinheit bei konstantem Drucke der absoluten Temperatur proportional sind. Es liegt daher der Gedanke nahe, ob nicht die Berechnung der absoluten Temperatur mit Hilfe der Relationen zwischen Druck, Volumen und empirischer Temperatur, welche bei wirklichen Gasen an Stelle des Boyle-Charles'schen Gesetzes treten, allein schon möglich ist. Diese Relation lässt sich nämlich mit weit grösserer Schärfe durch empirische Formeln darstellen, als die Bestimmung der spezifischen Wärme oder der Temperaturveränderungen durch Ausdehnung etc. möglich ist.

Wir wollen daher zunächst nur von der Relation zwischen Druck, Volumen und empirischer Temperatur und den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie ausgehen. Man erhält bekanntlich nach dem zweiten Hauptsatze

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{A\frac{d_v p}{d t}} \frac{d_t Q}{d v}.$$

Dabei ist A das thermische Arbeitsäquivalent $\left(\frac{\text{gross. Cal}}{430\,\text{m Kil}}\right)$ dQ das Differential der zugeführten Wärme; p ist der Druck auf die Flächeneinheit, von welchem vorausgesetzt wird, dass er auf der ganzen Oberfläche des Körpers gleich ist und die einzige auf den Körper wirkende äussere Kraft darstellt; v ist das Volumen der Gewichtseinheit und die dem Differentialzeichen unten angefügten Indices bezeichnen die Variable, welche bei Bildung des Differentialquotienten als konstant anzusehen ist. Die Grösse $\frac{d_v p}{dt}$ ist unmittelbar durch die Relation zwischen Druck, Volumen und empirischer Temperatur bestimmt; zur Bestimmung von $\frac{d_t Q}{dv}$ dagegen sind im allgemeinen Angaben über spezifische Wärme erforderlich. Sei U die in Wärmemass gemessene innere Energie des Körpers und S dessen Entropie, so ist bekanntlich in dem von uns betrachteten Falle:

$$dQ = dU + Apdv.$$

Sei die als bekannt vorausgesetzte Beziehung zwischen Druck, Volumen und empirischer Temperatur durch die Gleichung ausgedrückt

$$p = f(v, t),$$

so wollen wir setzen

$$dS = \frac{dQ}{T} = d\left(s + \frac{A}{T}\int_v f dv\right)$$

wobei die Integration bloss nach v bei konstant zu erhaltendem t zu verstehen ist. Die wirkliche Ausführung der Differentiation liefert:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{Afdv}{T} + Adt\frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{T}\int_v f dv\right) + ds,$$

da diess nach dem obigen gleich

$$\frac{dU}{T} + \frac{Afdv}{T}$$

sein muss, so folgt, wenn man nun s und t als independente Variabeln betrachtet:

$$\frac{\partial_t U}{\partial s} = T, \quad \frac{\partial_s U}{\partial t} = AT\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\int f dv\right)$$

Aus der ersten dieser beiden partiellen Differential-Gleichungen folgt:

$$U = sT + \varphi(t)$$

wobei $\varphi(t)$ eine vorläufige willkürliche Funktion von t ist. Daher

$$\frac{d_s U}{dt} = sT' + \varphi'(t)$$

und folglich nach der 2. partiellen Differentialgleichung

$$s = \frac{AT}{T'}\frac{d_v}{dt}\left(\frac{1}{T}\int_v f dv\right)$$

wo die willkürliche Funktion von t wieder unterdrückt wurde, da eine solche selbstverständlich zu dem Integrale nach v hinzutritt.

Setzt man diesen Wert in den anfangs gegebenen Ausdruck dS ein, so folgt ohne Schwierigkeit

$$dQ = \frac{AT}{T'}\frac{d_v f}{dt}dv + Adt\frac{d_v}{dt}\left(\frac{1}{T'}\int_v \frac{d_v f}{dt}dv\right)$$

Diese Gleichung könnte auch aus der bekannten

$$dQ = \vartheta dt + AT\frac{d_v p}{dT}dv$$

abgeleitet werden.

Man sieht, dass durch die Funktion f und T, also durch den Zusammenhang zwischen Druck, Volumen und absoluter Temperatur dQ bis auf eine als Addend hinzutretende mit dt multiplicierte noch willkürliche Funktion der Temperatur

bestimmt ist, d. h. wenn dieser Zusammenhang gegeben ist, kann bloss mehr zur spezifischen Wärme bei konstantem Volumen eine beliebige Funktion der Temperatur als Addend hinzutreten. Versucht man dagegen aus dieser Gleichung $\frac{d_t Q}{dv}$ zu bestimmen und in die eingangs angeführte Gleichung für $\frac{T'}{T}$ einzusetzen, so erhält man eine Identität. Wir gelangen daher zu dem Schlussresultate, dass die Berechnung der absoluten Temperatur ohne Zuziehung von Angaben über spezifische Wärme oder über die Temperaturänderung bei Ausdehnung etc. aus der blossen Beziehung zwischen Druck, Volum und empirischer Temperatur für beliebige Körper unmöglich ist.

Die willkürliche Funktion der Temperatur fällt, wie übrigens ebenfalls schon Lord Kelvin bemerkte, vollkommen aus, sobald man die Differenz der spezifischen Wärme γ_p bei konstantem Drucke und γ_v bei konstantem Volumen berechnet. Dieselbe findet sich:

$$\gamma_p - \gamma_v = \frac{d_p Q}{d t} - \frac{d_v Q}{d t} = - \frac{A T}{T'} \frac{\left(\frac{d_v p}{d t}\right)^2}{\frac{d_t p}{d v}}.$$

Wenn man daher aus den Versuchen Regnaults und Eilhard Wiedemanns mit genügender Sicherheit als bewiesen annähme, dass für Luft und Wasserstoff $\gamma_p - \gamma_v$ konstant ist, so würde folgen

$$\log \text{nat}\, T = - \frac{A}{\gamma_p - \gamma_v} \int d t \frac{\left(\frac{d_v p}{d t}\right)^2}{\frac{d_t p}{d v}}.$$

Doch sieht man, dass jedenfalls der Ausdruck

$$\frac{1}{(\gamma_p - \gamma_v) \frac{d_t p}{d v}} \cdot \frac{d_v p}{d t}$$

bloss Funktion der Temperatur sein darf, dass also weder mit dem van der Waals'schen noch dem Clausius'schen Gesetze eine vollkommene Konstanz von $\gamma_p - \gamma_v$ vereinbar ist. Nur sehr genaue Beobachtungen über $\gamma_p - \gamma_v$ respektive über die Abhängigkeit von γ_p und $\gamma_p : \gamma_v$ von der Temperatur könnten daher zur Bestimmung der absoluten Temperatur auf diesem Wege führen; aber immerhin wäre es sehr wünschenswert, sich durch experimentelle Durchführung der Bestimmung der absoluten Temperatur auch auf diesem Wege eine willkommene Kontrolle zu verschaffen.

Natürlich liefert obige Formel ohne weiteres auch die Gleichung zur Berechnung der Versuche von Thomson und Joule. Wenn sich ein Gas ohne Wärmezufuhr oder Abgabe und ohne Arbeitsleistung nicht umkehrbar um dv ausdehnt, so ist, nachdem sich alle etwa entstandenen Störungen wieder beruhigt haben und deren leb. Kraft in Wärme übergegangen ist, der Endzustand offenbar derselbe, als ob es sich in umkehrbarer Weise ausgedehnt hätte und ihm dabei die zur Arbeitsleistung erforderliche Wärme $Apdv$ zugeführt worden wäre. Wir finden daher die im ersten Falle entstehende Temperaturvermehrung dt, indem wir in obiger Formel setzen $dQ = Apdv$, wodurch sich ergiebt

$$Apdv = \frac{AT}{T'} \frac{d_v p}{dt} dv + \gamma_v dt$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{1}{\frac{d_v p}{dt}}\left(p - \frac{\gamma_v}{A}\frac{dt}{dv}\right) = \frac{1}{\frac{d_v p}{dt}}\left\{p - \frac{1}{A}\frac{dt}{dv}\left[\gamma_p + \frac{AT}{T'}\frac{\left(\frac{d_v p}{dt}\right)^2}{\frac{d_t p}{dv}}\right]\right\}$$

oder

$$\frac{T}{T'} = \frac{\left(p - \frac{\gamma_p}{A}\frac{dt}{dv}\right)\frac{d_t p}{dv}}{\frac{d_v p}{dt}\left(\frac{d_t p}{dv} + \frac{d_v p}{dt}\frac{dt}{dv}\right)}$$

Die Ausdehnung dieser Formel auf endliche Prozesse hat keine Schwierigkeit.

So lange nicht, wie oben erwähnt, sehr genaue Versuche über die Abhängigkeit von γ_p und $\gamma_p : \gamma_v$ von der Temperatur vorliegen, scheint der Thomson-Joule'sche Versuch noch immer die beste Basis zur Berechnung der absoluten Temperatur zu sein. Da derselbe in neuerer Zeit wiederholt wurde, so würde es sich wohl lohnen, neue alle älteren und neueren Erfahrungen in denkbar genauester Weise berücksichtigende Rechnungen durchzuführen; zu diesem Zwecke müssten aber die Formeln genau den Modalitäten der jeweiligen Versuche angepasst werden, worauf ich ein andermal zurückzukommen hoffe.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1893.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

C. Wacker, Die Aachener Geschichtsforschung. 1893. 8⁰.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Argovia. Band 24. 1893. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations 1884—85. 1893. fol.

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 16, part 2. Vol. 17, part 1. 1893. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Band 113. 114. 115. 1893. 8⁰.
Stari pisci hrvatski. Bd. 20. 1893. 8⁰.

Geschichts- und Alterthumsforschende Gesellschaft in Altenburg:

Mittheilungen. Bd. X, Heft 3. 1893. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Mémoires. Tom. XIII. 1892. 4⁰.
Bulletin. Année 1892. No. 2—4. 1892—93. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde. 1. Sectie. Deel I, No. 1—8.
2.-Sectie. Deel I, No. 1—10. Deel II, No. 1. 1892/93. gr. 8⁰.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Deel 1, No. 1. 2. 1892/93. 8⁰.
Zittingsverlagen. Afd. Natuurkunde. Jar 1892/93. 1893. gr. 8⁰.
Verslagen Mededeelingen:
a) Letterkunde 3. Reeks. Deel IX.
b) Natuurkunde 3. Reeks. Deel IX mit Register 1892/93. gr. 8⁰.
Jaarboek voor 1892. gr. 8⁰.
Quattuor carmina latina. 1893. 8⁰.

Société d'études scientifiques in Angers:

Bulletin. Nouv. Sér. Année XXI. 1891. 1892. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

26 th annual Report, June 1. 1893. 8⁰.
Catalogue of the Library. Part V, S.—Z. 1892. 4⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XII, No. 106. 107. 1893. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bamberg:

XVI. Bericht. 1893. 8⁰.

Genootschap von Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel 35, afl. 5. en 6. Deel 36, afl. 3. 1893. 8⁰.
Notulen. Deel 30, aflev. 4. 1893. 8⁰.

Observatorium in Batavia:

Regenwaarnemingen. XIII. Jahrg. 1891. 1892. 8⁰.
Observations. Vol. XIV. 1891. 1892. fol.

Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 52. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte. Band 18, Heft 3. 1892. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität Basel vom Jahr 1892/93. In 4⁰ und 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Bd. III, Heft 4. 1893. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band 10, Heft 1. 1892. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Spomenik. XX. XXI. XXII. 1893. 4⁰.
Glas. XXXVIII—XL. 1893. 8⁰.
Die ersten Grundlagen der slavischen Literatur von Stojan Novakovich (in serbischer Sprache). 1893. 8⁰.
Geologia Srbije od J. Schujowicha. 1893. 8⁰.

Museum in Bergen:

Aarbog for 1892. 1893. 8⁰.

K. Preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1893. No. 1—38. gr. 8⁰.
Abhandlungen aus dem Jahr 1892. 4⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Preussen. Bd. IX, 4 und X, 5. 1892—93. 4⁰.
Abhandlungen der k. preuss. geologischen Landesanstalt. N. F. Heft 12. 14. 15. 1892—93. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 26. Jahrg. No. 12—18. 1893. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 44, 4. 45, 1. 2. 1892/93. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. VI. Literatur 1892. Bd. VII. No. 4 bis 19. 1893. 8⁰.

Verhandlungen. Jahrg. 1892—93 No. 1—18. 1893/94 No. 1.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band VIII, Heft 1. 2. 3. 1893. 4⁰.

Antike Denkmäler. Band II, Heft 1. 1893. fol.

Jahresbericht über die Thätigkeit 1892—1893. gr. 8⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen im Jahre 1891. 1893. 4⁰.

Bericht über die Jahre 1891 und 1892. 1892—93. 8⁰.

Veröffentlichungen 1893. Heft 1. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXII. Jahrg. 1890. 1893. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in Berlin:

Gartenflora. Zeitschrift. 42. Jahrg. 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band VI. Leipzig 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band VIII, Heft 6—11. 1893. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XIII. Jahrg. Heft 6—11. Berlin 1893. gr. 8⁰.

Allgem. geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band 18. Zürich 1893. 8⁰.

Quellen zur Schweizer Geschichte. Band 13. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Band XIV, 1. 1893. 8⁰.

R. Accademia delle Scienze in Bologna:

Memorie. Serie V, Tom. 2, fasc. 1—4. 1892. 4⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Monumenti. Serie I. Statuti. Vol. 4. 1888.
„ II. Carte. Vol. 2. 1888—1891.
„ III. Cronache. Vol. 1. 1869—1877. 4⁰.

Documenti e studi. Vol. I, II. 1886-87. 8⁰.

Atti e Memorie. III. Serie. Vol. X. 1892. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft in Bonn:

Bericht über die Allgemeine Sitzung am 2. Juli 1893 zur Feier des 75jährigen Bestehens der Gesellschaft. 1893. 8⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1892/93. 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden in Bonn:

Jahrbücher. Heft 94. 1893. gr. 8°.

Naturhistorischer Verein in Bonn:

Verhandlungen. 50. Jahrgang. 1. Hälfte. 1893. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1893. No. 8—22. 8°.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Mémoires. IV. Sér. Tom. I, Tom. III fasc. 1 et Appendix au Tom. III. 1893. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 27. 1893. 8°.
Memoirs. Vol. XII, No. 1. 1893. 4°.

American Philosophical Association in Boston:

Transactions. Vol. XXIII. 1892. 8°.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:

7. Jahresbericht für die Jahre 1889/90 und 1890/91. 1893. 8°.

Meteorologische Station I. Ordnung in Bremen:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1892. Jahrg. III. 1893. 4°.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:

70. Jahresbericht. 1893. 8°.
J. Partsch, Litteratur der Landes- und Volkskunde Schlesiens. Heft 2. 1893. 8°.

Historisch-statistische Sektion der k. k. mähr. Landwirthschafts-Gesellschaft in Brünn:

Zur Feier des 90. Geburtstages des k. k. Hofrathes Christian Ritter d'Elvert. 1893. 4°.

Académie Royale de Médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tom. VII, No. 6—9. 1893. 8°.
Mémoires couronnés. Collection in 8°. Tom. XII, fasc. 1. 2. 1893. 8°.

Académie Royale des Sciences in Brüssel:

Bulletin. 3. Série, Tom. 25, No. 5—11. 1893. 8°.
Mémoires des Membres in 4°. Tom. 48. 49. 50, 1. 1892/93. 4°.
Mémoires couronnés et des savants étrangers in 4°. Tom. 52. 1890/93. 4°.
Mémoires couronnés et autres mém. in 8°. Tom. 46. 1892. 8°.
Collection des Chroniques. 5 Vols. 1892/93. 4°.
Biographie nationale. Tom. XI, 3. XII, 1. 1890—92. 8°.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XII, 4. 1893. 8°.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Ungarische Revue. 1893. Heft 6—9. 8°.
Mathem. und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. Band X, 1. 2. XI, 1. Hälfte. Berlin 1893. 8°.
Almanach 1893. 8°.
Rapport sur les travaux de l'Académie en 1892. 1893. 8°.

B. Munkácsi, Lexicon linguae Votjacicae. Lief. 2. 1892. 8⁰.
Munkacsi Bernát, Vogul népköltési gyüjtemény (Sammlung Vogulischer Volksdichtungen). Band III. 1893. 8⁰.
Nyelotudományi Közlemények (Philologische Mittheilungen). Band XXII, 5. 6. XXIII, 1. 2. 1891—93. 8⁰.
Nyelotudományi Értekezések (Philologische Abhandlungen). Band XV, 11. 12. XVI, 1—3. 1892—93. 8⁰.
Történettudományi Értekezések (Historische Abhandlungen). Band XV, 7—12. XVI, 1. 1892—93. 8⁰.
Archaeologiai Ertesitö (Archäologischer Anzeiger). Neue Folge. Band XII, 3—5. XIII, 1. 2. 1892—93. 4⁰.
Thaly, Gróf Bercsényi Család. Band III. 1892. 8.
Monumenta Comitialia Regni Transylvaniae. Vol. XV. 1892. 8⁰.
Halász (J.) Svéd-Lapp Nyelv. III. IV. V. 1888—89. 8⁰.
Thúry (J.) Török történetírók. Band I. 1893. 8⁰.
Kolosvári (J.) A Magyar törvényhatóságok sogszabalyainak gyüyteménye (Sammlung der Rechtsregeln der ungarischen Behörden) Bd. III. 1892. 8⁰.
Bunyitay (V.), A Gyula-fehérvári székesegyház (Die Karlsburger Domkirche). 1893. fol.
Természéttudományi Értekezések (Naturwissenschaftliche Abhandlungen). Band XXII, 4—8. XXIII, 1. 2. 1892—93. 8⁰.
Mathematikai Értekezések (Mathematische Abhandlungen). Band XV, 2. 3. 1893. 8⁰.
Mathematikai Közlemények (Mathematische Mittheilungen). Band XXV, 1—3. 1892—93. 8⁰.
Mathematicai Ertesitö (Mathematischer Anzeiger). Band X, 8. 9. XI, 1—5. 1892—93. 8⁰.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Band X, Heft 3. 1892. 8⁰.
Földtani Közlöny. Band XXII, 11. 12. Band XXIII, 1—8. 1892/93. 8⁰.
Jahresbericht für 1891. 1893. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque náutico para 1895. 1893. 8⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 4. Série, 7. Vol. Fasc. 1. 2. 1893. 8⁰.
Mémoires. Vol. XVII, 2. 3. 1893. 4.

Meteorological Departement of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. 1892. November, December. 1893. January—July. 1892—93. fol.
Meteorological Observations. 1892, November, December. 1893. January—July. 1892—93. fol.
Rainfall Data of India. 1891. fol.
Report on the Administration in 1892—93. 1893. fol.
India Weather Review. Annual Summary 1892. 1893. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. IV, part 8. Vol. V, part 3. 1893. fol.
Cyclone Memoirs. No. V, by J. Eliot. 1893. 8⁰.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Proceedings. 1892. No. X. 1893. No. I—V. 8⁰.
Journal. No. 319—322. 324—326. 1893. 8⁰.
Bibliotheca Indica. New Ser. Nr. 827—833. 1893. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 26, part 2. 3. 1893. 4⁰.

Museum of Comparative Zoology in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. XVI, No. 13. 14. Vol. XXIV, No. 4—7. Vol. XXV, No. 1. 1893. 8⁰.
Memoirs. Vol. XVI, No. 3. 1893. 4⁰.

Astronomical Observatory at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Annals. Vol. 19, part. 2. 1893. 8⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Jahrbuch. Jahrg. X, 1892. 1893. fol.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. 7, No. 299—324. 1893. 4⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 3 und 4. Vol. 4, No. 1. 1893. 8⁰.

Videnskabs-Selskab in Christiania:

Forhandlinger. Aar 1890. 1891. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. Neue Folge. Band 36. 1893. 8⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1893, No. 42—78. 86. 87. 90. 91. 1893. fol.

Universität in Czernowitz:

Uebersicht der akademischen Behörden 1893/94. 8⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen 1893/94. 8⁰.

Provinzial-Kommission zur Verwaltung der westpreussischen Provinzial-Museen in Danzig:

Abhandlungen zur Landeskunde der Provinz Westpreussen. Heft 5. 1893. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver:

T. A. Rickard, Certain dissimilar occurences of gold-bearing Quartz. 1893. 8⁰.
On the nature of the chemical elements. VIth paper. 1893. 8⁰.

Académie des Sciences in Dijon:

Mémoires. IV. Série. Tom. 3. 1892. 8⁰.

Historischer Verein in Dillingen:

Jahresbericht. 5. Jahrgang, 1893. 1892. 8⁰.

Verein für Geschichte in Donaueschingen:

Schriften. Heft 8. Tübingen 1893. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 13, No. 3. 4. 1892. Tom. 14, 1. et 2. trimestre. 1893. 8⁰.

Universität Dorpat:

Schriften aus dem Jahre 1892/93 in 8⁰ und 4⁰.
Meteorologische Beobachtungen. 27. Jahrg. Bd. VI, Heft 2. 1893. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Dorpat:

Sitzungsberichte. Band X, 1. 1893. 8⁰.

Königliche Sammlungen in Dresden:

Bericht über die Verwaltung in den Jahren 1890 u. 1891. 1893. fol.

Sächsischer Altertumsverein in Dresden:

Neues Archiv für Sächsische Geschichte. Band 14. 1893. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:

XXIII. Jahresbericht. 1893. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. III. Series. Vol. 2, No. 4. 5. 1893. 8⁰.

Verein Pollichia in Dürkheim:

Mittheilungen der Pollichia. 49. u. 50. Jahrg. No. 5 u. 6. 1892. 8⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VI, part 5. 1893. 8⁰.
Roll. 16. March 1893. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XX, pag. 1—96. 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte und Alterthümer der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 7. Jahrgang. 1893. 8⁰.

Gesellschaft f. bildende Kunst u. vaterländische Altertümer in Emden:

Jahrbuch. Band 10, Heft 2. 1893. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

77. Jahresbericht. 1893. 8⁰.

Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 19. 1893. 8⁰.

K. Universität in Erlangen:

Schriften aus dem Jahre 1892/93 in 4⁰ u. 8⁰.

Accademia de' Georgofili in Florenz:

Atti. 4. Ser. Vol. 16, disp. 2. 1893. 8⁰.

R. Istituto di Studi superiori in Florenz:

Felice Tocco, Le opere latine di Giordano Bruno. 1889. 4⁰.
Emilio Fasola, Rendiconti di clinica ostetrica 1883—85. 1888. 4⁰.
Giorgio Roster, L' acido carbonico dell' aria e del suolo di Firenze. 1889. 4⁰.
Luigi Luciani, Fisiologia del digiuno. 1889. 4⁰.
Carlo de Stefani, Le piaghe delle Alpi Apuane. 1889. 4⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:

Bericht. 1893. 8⁰.
Katalog der Reptilien-Sammlung im Museum, v. O. Boettger. 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte in Frankfurt a. M.:
Archiv für Frankfurts Geschichte. III. Folge. Band 4. 1893. gr. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a. M.:
Jahresbericht für 1891—1892. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:
Helios. 10. Jahrg. 1892. No. 10—12. 11. Jahrg. 1893. No. 1—5. 1892—93. 8⁰.
Societatum Literae. 7. Jahrgang. 1893. No. 1—7. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:
Schau-ins-Land. 18. u. 19. Jahrgang. 1893. fol.

Universität in Freiburg (Schweiz):
Collectanea Friburgensia. Fasc. II. 1893. 4⁰.

Observatoire in Genf:
Résumé météorologique de l'année 1892. 1893. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:
Mémoires. Tom. 31, part. 2. 1892—93. 4⁰.

Universität Genf:
Schriften der Universität Genf vom Jahre 1892/93 in 8⁰.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:
Botanisch Jaarboek. V. Jaarg. 1893. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:
Mittheilungen. N. F. Band 4. 1893. 8⁰.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:
29. Bericht. 1893. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Giessen:
Schriften aus dem Jahre 1892/93. 4⁰ u. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Band 69, Heft 1. 1893. 8⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Gelehrte Anzeigen. 1893. No. 7—19. gr. 8⁰.
Nachrichten. 1893. No. 4—14. gr. 8⁰.

Herzogliche Bibliothek in Gotha:
Die orientalischen Handschriften der Herzoglichen Bibliothek zu Gotha mit Ausnahme der persischen, türkischen und arabischen, von Wilh. Pertsch. 1893. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville:
Journal. Val. III, pag. 35—162. 1893. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:
Mittheilungen. Heft 41. 1893. 8⁰.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 25. Jahrgang. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:
Mittheilungen. Heft 29. Jahrgang 1892. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Pommer'sche Geschichte in Greifswald:
Pommer'sche Geschichtsdenkmäler. Band 7. 1894. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:
Bijdragen. V. Reeks. Deel VIII, 3. 4. 1893. 8⁰.

Ministerium van binnenlandische Zaken im Haag:
Prodromus Florae Batavae. Vol. II, pars 1. Nijmegen. 1893. 8⁰.

Nova Scotia Institute of Science in Halifax:
Proceedings and Transactions. Ser. II. Vol. 1, part 2. 1892. 8⁰.

K. K. Obergymnasium in Hall (Tirol):
Programm für das Jahr 1892/93. 8⁰.

Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:
Leopoldina. Heft 29. No. 7—20. 1893. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:
Zeitschrift. Band 47, Heft 2. 3. Leipzig. 1893. 8⁰.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Band X. No. 1. Leipzig. 1893. 8⁰.

Universität Halle-Wittemberg in Halle:
Index Scholarum per hiemem 1893/94 habendarum. 1893. 4⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Halbjahr 1893/94. 4⁰.
Schriften aus dem Jahre 1892/1893 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 66. Heft 1. 2. Leipzig. 1893. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:
Zeitschrift. Band IX. Heft 2. 1893. 8⁰.
Mittheilungen. 15. Jahrgang 1892. 1893. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:
Zeitschrift. Jahrgang 1893. 8⁰.

Musée Teyler in Harlem:
Archives. Ser. II. Vol. IV, fasc. 1. 1893. 4⁰.

Teylers Tweede Gonootschap in Haarlem:
Atlas der Nederlandsche Pfenningen, door Jacob Dirks. 3. Stuk. 1893. fol.
Verhandelingen. Nieuwe Reeks. Deel IV. Stuk 1. 1893. 8⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:
Archives Néerlandaises des sciences exactes. Tom. 27, livr. 1. 2. 3. 1893. 8⁰.

Universität Heidelberg:
Schriften aus dem Jahre 1892/93. 4⁰ u. 8⁰.
Ueber die wachsende Nervosität unserer Zeit, Akademische Rede. 1893. 4⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:
Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrgang 3. Heft 2. 1893. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:
Carte géologique de la Finlande. No. 22—24. 1893. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:
Öfversigt of Förhandlingar. XXXIV, 1891/92. 1892. 8⁰.
Bidrag till känedom of Finlands Natur och Folk. Heft 51. 1892. 8⁰.

Gesellschaft pro Fauna et Flora fennica in Helsingfors:
Acta. Vol. V, pars I A, II. Vol. VIII. 1890—93. 8⁰.
Meddelanden. Heft 17. 18. 1890-92. 8⁰.

Institut météorologique central in Helsingfors:
Observations de l'Institut météorologique, faites en 1884—86, 1890 et 1891. fol.

Société de géographie in Helsingfors:
Fennia. Vol. 8. 1893. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:
Verhandlungen und Mittheilungen. 42. Jahrgang. 1892. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:
Zeitschrift. III. Folge. Heft 37. 1893. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:
Denkschriften. Band III. Heft 2. 1893. fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. XXVIII, 1. 1893. 8⁰.

Technische Hochschule in Karlsruhe:
Schriften aus dem Jahre 1892/93. 4⁰ u. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:
Bulletin. Tom. I, No. 1. 3. 4. Tom. II, No. 1—3. Tom. III, No. 1—4. 1891—93. 8⁰.

Kais. Universität in Kasan:
Utschenia Sapiski. Band 60, Heft 4. 5. 6. 1893. 8⁰.
3 Dissertationen in russischer Sprache. 1893. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:
Sapiski (Annales). 1893. Heft 2. 1893. Vol. 3. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:
6. Bericht. XVII—XXI. Jahrgang. Heft 3. Berlin. 1893. fol.
Ergebnisse der Beobachtungsstationen. Jahrg. 1892 No. VII—XII. Berlin. 1893. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:
Schriften. Band 10, Heft 1. 1893. 8⁰.

K. Universität in Kiel:
Schriften aus dem Jahre 1892/93. 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Kiew:
Iswestija. Band 33, No. 6—11. 1893. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:
Jahrbuch. 38. Jahrgang. Heft 21. 22. 1893. 8⁰.
Meteorologische Diagramme, Dezbr. 1891 bis Novbr. 1892. fol.

Geschichtsverein für Kärnthen in Klagenfurt:
Jahresbericht für 1892. 1893. 8⁰.
Carinthia I. 83. Jahrgang. No. 1—6. 1893. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:
Mittheilungen. Heft 23. 1893. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:
Schriften. 33. Jahrgang. 1892. 4⁰.

Universität Königsberg:
Schriften aus dem Jahre 1892/93. 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:
Oversigt. 1892. No. 3. 1893. No. 1. 1893 8⁰.
Skrifter. 6 Raekke.
a) Historisk og filos. Afd. Tom. I, No. 2. Tom. IV, No. 1.
b) Naturvidenskab. Afd. Tom. VII, No. 2. 1892/93. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:
Aarböger. II. Raekke. Bd. 8, Heft 2. 1893. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:
Anzeiger. 1893. Mai, Juni, Juli, October, November. gr. 8⁰.
Rozprawy, filol. T. XVII, XVIII. 1893. 8⁰.
Rozprawy, matemat. T. XXIV und Ser. II, T. 5. 1893. 8⁰.
Antropologia. T. 16. 1892. 8⁰.
Acta rectoralia. Tom. I, fasc. 1. 1893. 4⁰.
St. Ramult, Stownik pomorski. 1893. 4⁰.
Biblioteka pisarzów potskich. No. XXIV. 1893. 8⁰.

Historischer Verein für Niederbayern in Landshut:
Verhandlungen. Band 29. 1893. 8⁰.

Michigan Mining School in Lansing, Mich.:
Reports of the Director for 1890—92. 1893. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:
Bulletin. III. Série. Vol. 29, No. 111. 112. 1893. 8⁰.

Société d'histoire de la Suisse romande in Lausanne:
J. R. Rahn, L'église abbatiale de Payerne, trad. par W. Cart. 1893. 4⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:
Tijdschrift. Deel XII, No. 3. 4. 1893. 8⁰.
Handelingen 1892—93. 1893. 8⁰.
Levensberichten. 1893. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:
Archiv. II. Reihe. Band XII, 2. 1893. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:
Vierteljahresschrift. Jahrgang 28. Heft 1. 2. 3. 1893. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:
Berichte, mathem.-physik. Classe. 1893. Heft II—VI. 8⁰.
Berichte, philol.-histor. Classe. 1893. 1. 8⁰.
Abhandlungen a) philos.-hist. Classe. Bd. 13, Heft 7. Bd. 14, Heft 1—4.
b) mathem.-phys. Classe. Bd. 20, Heft 1—4. 1893. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 47. Heft 9—12. Bd. 48. Heft 1—5. 1893. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen. 1892. 8⁰.

Geschichts- und Altertumsverein in Leisnig:

Mittheilungen. Heft 9. 1893. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:

Bolletin of the Agricultural Experiment Station. Vol. IV, No. 29. 30. 1893. 8⁰.

6th annual Report of the Agricultural Experiment Station. 1892. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

51. Bericht. 1893. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tom. IX, fasc. 1. 2. Loewen. 1893. 4⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 53, No. 323—327. 1893. 8⁰.
Philosophical Transactions. Vol. 183 A. and B. 1893. 4⁰.
List of Membres 30th Nov. 1892. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 53, No. 8. 9. Vol. 54, No. 1. 1893. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 368—373. July—Dec. 1893. 8⁰.
Proceedings. Session 1893—94. No. 125—130. 1893. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal a) Zoology. Vol. 24, No. 152—54.
b) Botany. Vol. 29, No. 202—204. 1892—94. 8⁰.
The Transactions a) Zoology. Vol. 5, part 8—10.
b) Botany. Vol. 3, part 8. 1892—93. 4⁰.
List of the Linnean Society 1892—1893. 1892. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1893. Part 3 - 6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1893. Part II. III. 8⁰.
Transactions. Vol. XIII, part 7. 1893. 4⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. 8, No. 31. 32. 1893. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 47, No. 1222—1226. Vol. 48, 1228—1252. Vol. 49, No. 1253. 1254. 1893. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 18, livr. 3. 4. 1891/92. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Band 48. 1893. 8⁰.

Société d'anthropologie in Lyon:
Bulletin. Tom. XI, No. 1. 2. 1892—93. 8⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:
Boletin. Tom. XXII, No. 6. Tom. XXIII, No. 1—6. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:
Jahresbericht und Abhandlungen 1892. 1893. 8⁰.

Società italiana di scienze naturali in Mailand:
Atti. Vol. XXIV, fasc. 1—3. 1892—93. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:
Archivio storico Lombardo. Anno 20, fasc. 2. 3. 1893. 8⁰.

Verein zur Erforschung der Rheinischen Geschichte in Mainz:
Zeitschrift. Band III, Heft 2—4. Band IV, Heft 1. 1883—93. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:
Memoirs and Proceedings. Vol. VII, No. 1. 1893. 8⁰.

Universität Marburg:
Schriften aus dem Jahre 1892/93. 4⁰ u. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:
Jahresbericht für das Jahr 1892/93. 1893. 4⁰.

Académie des sciences in Metz:
Mémoires. Année 70. 1888—89. Année 71. 1889—90. 1893. 8⁰.

Sociedad científica Antonio Alzate in Mexico:
Memorias y Revista. Vol. VI, 9—12. VII, 1. 2. 1893. 8⁰.

Sociedad de geografia in Mexico:
Boletin. IV. época. Tom. II, No. 8—10. 1893. 8⁰.

Regia Accademia di scienze in Modena:
Memorie. Ser. II, Vol. VIII. 1892. 4⁰.

Società dei Naturalisti in Modena:
Atti. Ser. III, Vol. 12, fasc. 1. 2. 1893. 8⁰.

Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:
Schriften der Republik Uruguay. 45 grössere, 41 kleinere Hefte.
Estadistica escolar 1890 y 1891. 1892. 4⁰.
Memoria del Ministro Secretario de Estado, Don Francisco Bauzá. 1893. 8⁰.

Académie des sciences et lettres in Montpellier:
Mémoires. Section des lettres. Tom. IX, 3. 4.
Section des sciences. Tom. XI, 3.
Section de médecine. Tom. VI, 2. 3. 1892. 4⁰.

Société Impér. des Naturalistes in Moskau:
Bulletin. 1893. No. 1. 2. 3. 1893. 8⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:
Mittheilungen. Band XIII. Anhang (Heft 5). 1893. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Korrespondenzblatt. 1893. No. 6–10. München. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:
Bericht für das Jahr 1892/93. 4⁰.
Programm für das Jahr 1893/94. 8⁰.
Personalstand. Wint.-Sem. 1893/94. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:
Amtsblatt der Erzdiöcese. 1893. No. 1—28. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:
Verhandlungen der X. allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung 1892 in Brüssel. 2 Bände. Berlin. 1893. 4⁰.
Geognostische Jahreshefte. 5. Jahrgang, 1892. Cassel. 1893. 4⁰.

Universität München:
Dissertationen aus den Jahren 1892/93. 4⁰ und 8⁰.
Verzeichniss des Personals. Winter-Sem. 1893/94. 8⁰.

Bayerischer Dampfkessel-Revisionsverein in München:
23. Jahresbericht 1892. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in München:
Monatsbericht. Oktober, November, Dezember. 1893. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Sér. II. Tom. XII, fasc. 27. Paris 1893. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Rendiconto. Ser. II. Vol. 7, fasc. 6. 7. 1893. 4⁰.
Atti. Serie II, Vol. 5. 1893. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:
Mittheilungen. Band 10, Heft 4, Band 11, 1. 2. Berlin 1893. 8⁰.

Société des sciences naturelles in Neuchâtel:
Bulletin. Tom. XVII—XX. 1889–92. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-upon-Tyne:
Transactions. Vol. 42, part 4. Vol. 43, part 1. 1893. 8⁰.
Annual report for the year 1892—93. 1893. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. Vol. 145, No. 269. 270. Vol. 146, No. 271—276. 1893. May—Dec. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:
Report for the year 1892—93. 1893. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:
Proceedings et the Meeting of April 1893. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:
Annals. Vol. VII, No. 1—5. 1893. 8⁰.
Transactions. Vol. XII, 1892—93. 1893. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Annual report for the year 1892. 1893. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

The Journal. Vol. XV, No. 2—11. Easton. 1893. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 25, No. 2. 3. 1893. 8⁰.

Nederlandsche Botanische Vereeniging in Nijmegen:

Nederlandsch kruidkundig Archief. II. Ser. 6. Deel. 2. Stuk. 1893. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Band X, Heft I. 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Mittheilungen. Heft 9. 1892. 8⁰.
Jahresbericht. XIV. Vereinsjahr. 1891. 1892. 8⁰.

Verein für Geschichte in Osnabrück:

Mittheilungen. Bd. 18. 1893 u. Inhaltsverzeichniss zu Bd. 1—16. 8⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions for the year 1892. Vol. X. 1893. 4⁰.

Geological and Natural History Survey in Ottawa (Canada):

Catalogue of Section One of the Museum, by G. Christian Hoffmann. 1893. 8⁰.
Catalogue of a stratigraphical Collection of Canadian Rocks, by Walter F. Ferrier. 1893. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Bullettino. Tom. V, No. 3. 1893. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VII, fasc. 3—5. 1893. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Anno XV. 1892. Sett.—Dec. Anno XVI. 1893. Genn.—Aprile. 1893. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1893, No. 24—32. 34—50. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 116, No. 24—26. Tom. 117, No. 1—25. 1893. 4⁰.
Oeuvres d'Augustin Cauchy. I. Série, Tom. 8. 1893. 4⁰.

Bibliothèque nationale in Paris:

A. Morel-Fatio, Catalogue des manuscrits espagnols et portugais. Livr. 2. 1893. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès-verbaux des séances de 1892. 1893. 8⁰.

Ministère de l'Instruction publique in Paris:

M. Berthelot, La Chimie au moyen âge. 3 Vols. 1893. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 620—624 Août - Janv. 1893. Livr. 625 Jan. 1894. gr. 8⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Tom. 22—24. 1892—93. 4⁰.
Annales (Bibliothèque d'études). Tom. 2. 1893. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tom. 26, No. 2. 3. Tom. 27, No. 1. 2. 1892/93. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. III. Sér. Tom. 3, fasc. 2. Tom. 4. 1891—92. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Sér., Tom. 3, fasc. 3. 4. Tom. 4, fasc. 1—4. 1892—93. 8⁰.
Mémoires. II. Série, Tom. IV, fasc. 4. 1893. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus 1893, No. 11—16. 8⁰.
Bulletin. VII. Série, Tom. 13. 4. trimestre 1892. 8⁰. Tom. 14. 1. et 2. trimestre. 1893. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XXI, No. 5—7. 1893. 8⁰.

Zeitschrift „L'Electricien" in Paris:

L'Electricien. 2. Sér. Tom. 5, No. 127. 129. 130. Tom. 6, 132—156. 1893. 4⁰.

Zeitschrift „Moniteur scientifique" in Paris:

Moniteur. Livr. 619. 1893. 4⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg:

Repertorium für Meteorologie. Band XVI, No. 5. 1893. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletin. Tom. XI, No. 5—10 et Supplément au Tome XI. Tome XII, 1. 2. 1892. 8⁰.
Carte géologique de la Russie, 6 feuilles avec une note explicative. 1893. 8⁰.
Mémoires. Tome XII, No. 2. 1892. 4⁰. Tome IX, 2. X, 2. 1893. 4⁰.

Commission Impériale Archéologique in St. Petersburg:

Compte rendu pour les années 1882—1888 avec un Atlas. 1893. fol.
Ottschet (Bericht). Jahrg. 1889. 1890. 1892—93. fol.
Materialy po archeologii rossii No. 4—12. 1890—93. fol.

Russische Archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Zapiski (Orientalische Abtheilung) Tom. VII, No. 1—4. 1893. 4⁰.
Trudy (Orientalische Abtheilung) Tom. XXI. 1892. 4⁰.

K. russische mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie, Bd. 29. 1892. 8⁰.
Materialien zur Geologie Russlands. Band XVI. 1893. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der k. Universität in St. Petersburg

Schurnal. Band XXV, No. 5—8. 1893. 8⁰.

Société des Naturalistes de St. Petersbourg:

Travaux. Section de botanique. Vol. XXIII. 1893. 8⁰.
Section de géologie. Vol. XXII, fasc. 2. 1893. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Obozreni (Verzeichniss der Vorlesungen. Histor.-philolog. Fakultät) 1893—94. 1893. 8⁰.

Sapiski. Tom. 32. 1893. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1893, part 1. 1893. 8⁰.

Alumni Association of the Philadelphia College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumi Report. June 1893. Vol. XXX, No. 1 und 2. 1893. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. XXXI, No. 140. 141. 1893. 8⁰.

Transactions. New. Ser. Vol. XVII, part 3. Vol. XVIII, part 1. 1893. 4⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XVII, No. 2. 1893. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Memorie. Vol. XII. 1893. 4⁰.

Atti. Processi verbali. Vol. VIII, pag. 175—231. 4⁰.

Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Potsdam:

Verhandlungen der 1892 in Brüssel abgehaltenen X. allgemeinen Conferenz. Berlin 1893. 8⁰.

Rapport sur les triangulations par A. Ferrera. s. l. s. a. 4⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band VIII. 1893. 4⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Band XXII, No. 5. 1893. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens im Jahre 1891. 1893. gr. 8⁰.

Symbolae Pragenses, Festgabe zur Philologen-Versammlung in Wien 1893. gr. 8⁰.

Heinrich Gradl, Geschichte des Egerlandes. 1893. gr. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:

Památky archaeologické. Band XV, 9—12, XVI, 1. 2. 1892/93. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnet. und meteorolog. Beobachtungen im Jahre 1892. 53. Jahrg. 1893. 4⁰.

Deutsche Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. W.-S. 1893/94. 8⁰.

Personalstand des Studienjahres 1893/94. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. 45. Band. 1893. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. XXXVI. 1893. 8⁰.

Academy of Science in Rochester:

Proceedings. Vol. II, No. 2. 1893. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. II, fasc. 8—12. 1. semestre. Vol. II, fasc. 1—11. 2. semestre. 1893. 4⁰.
Atti. Serie IV. Classe di scienze morali. Vol. X, parte 2. Notizie degli scavi Dicembre 1892 e Indice per l'anno 1892. 4⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. I, parte 2. Notizie degli scavi Gennaio—Luglio. 1893. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. II, fasc. 3—10. 1893. 8⁰.
Atti. Rendiconti dell' adunanza solenne del 4 Giugno 1893. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1893. No. 2. 3. 8⁰.

Kais. deutsches Archäologisches Institut in Rom:

Mittheilungen. Band VIII, fasc. 1. 2. 3. 1893. 8⁰.

Ministero della Istruzione publica, Divisione per le Bibblioteche etc. in Rom:

Le opere di Galileo-Galilei. Vol. III, parte 1. Florenz 1892. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XVI, fasc. 1, 2. 1893. 8⁰.

Universität in Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1892—93. 4⁰ u. 8⁰.

Essex Institute in Salem:

Bulletin. Vol. XXIII, No. 1—12. Vol. XXIV, No. 1—12. Vol. XXV, No. 1—3. 1891-93. 8⁰.
Henry Wheatland, Sermon preached by Edm. B. Wilson. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 33. Vereinsjahr 1893. 8⁰.

K. K. Staatsgymnasium in Salzburg:

Programm für das Jahr 1892/93. 8⁰.

Academy of Sciences in St. Louis (N. A.):

Transactions. Vol. VI, No. 2—8. 1892—93. 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

Johann Dierauer, Rapperswil. 1892. 4⁰.
Aug. Hardegger, Die Cistercenserinnen zu Maggenau. 1893. 4⁰.
Urkundenbuch der Abtei St. Gallen. Teil IV, Lief. 2. 1893. 4⁰.

California Academy of sciences in San Francisco:

Proceedings. II. Series. Vol. III, part 2. 1893. 8⁰.
Occasional Papers. IV. 1893. 8⁰.

Deutscher wissenschaftlicher Verein zu Santiago (Chile):

Verhandlungen. Band II. Heft 5. 6. 1893. 8⁰.

Verein für meklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 58. Jahrgang. 1893. 8⁰.

China Branch of the Royal Asiatic Society in Shanghai:

Journal. N. S. Vol. 25. 1890—91. 1893. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino. Anno 16. No. 5—10. 1893. 8⁰.

Museum in Stavanger:

Aarsberetning for 1892. 1893. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Handlingar. Band 22, 1. 2. 23, 1. 2. 24, 1. 2. 1886/92. 4⁰.
Bihang (Coll. de mémoires in 8⁰). Band 14—18. 1888/93. 8⁰.
Öfversigt. Årgang 46—49. 1890—93. 8⁰.
Meteorologiska Jakttagelser. Band 27—30. 1890—93. 4⁰.
Lefnadsteckningar. Band III, 1. 1891. 8⁰.
Astronomiska Jakttagelser. Vol. 4. 1889—91. 4⁰.
Observations faites au Cap Thordsen. 2 Vols. 1887—91. 4⁰.
Carl Wilhelm Scheeles, Bref och antekningar. 1892. 4⁰.
Projet de mesure d'un arc du Méridien de 4⁰ 20' au Spitzberg. Par. P. G. Rosén. 1893. 8⁰.

K. Vitterhets, Historie och Antiquitets Akademien in Stockholm:

Månadsblad. XX. Årgang 1891. 1891—93. 8⁰.
Antiqarisk Tidskrift. Delen XI, 5. 1893. 8⁰.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. 27, fasc. 6—9. 1893. 8⁰.

Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1892/93 in 4⁰ u. 8⁰.

Australasian Association for the Advancement of Science in Sydney:

Report. Vol. IV. 1892. 8⁰.

Department of Mines, Geological Branch, in Sydney:

Geological Map of New-South-Wales. 1893.

Geological Survey of New-South Wales in Sidney:

Records. Vol. 3, part. 3. 1893. 4⁰.
Annual Report of the Department of Mines for the year 1892. 1893. fol.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):

Boletín. Tom. I, No. 13. 14. 1893. 4⁰.

Norwegische Gesellschaft der Wissenschaften in Throndhjem:

Schrifter. 1891. 1893. 8⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen im Jahre 1891. 1893. fol.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens in den Jahren 1886—87. 1893. 8⁰.

Kaiserl. Japanische Universität in Tokio:

Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Bd. II, No. 1. 1893. 4⁰.

College of Science, Imperial University, Tokyo:

The Journal. Vol. V, part 4. VI, 2. 3. 1893. 4⁰.
Calendar for the year 1892—93. 1893. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio (Japan):

Mittheilungen. Heft 51. 52. 1893. 4⁰.

Kansas Academy of Science in Topeka:

Transactions. Vol. XIII. 1891-92. 1893. 8⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. III, part 2. 1893. 8⁰.
5th annual Report. Session 1892-93. 1893. 8⁰.

Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XI, fasc. 1. 1893. 8⁰.

Korrespondenzblatt für die Gelehrten und Realschulen Württembergs in Tübingen:

Korrespondenzblatt. 40. Jahrg. Heft 3—6 1893. 8⁰.

Universität Tübingen:

Schriften der Universität aus dem Jahr 1892/93. 4⁰ u. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. XXXVIII, 9—15. 1893. 8⁰.
Osservazioni meteorologiche dell' anno 1892. 1893. 8⁰.

Verein für Kunst und Alterthum in Ulm:

Mittheilungen. Heft 4. 1893. 4⁰.

Observatoire météorologique de l'Université in Upsala:

Bulletin mensuel. Appendices. I. Pluies par Thure Wigert. 1893. 4⁰.
II. Hildebrand Hildebrandsson, Des principales méthodes employées pour observer et mesurer les nuages. 1893. 8⁰.

Société Royale des sciences in Upsala:

Nova Acta. Ser. III. Vol. 15. fasc. 1. 1892. 4⁰.

Universität in Upsala:

Schriften aus dem Jahre 1892/93 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Werken. N. S. No. 39. s'Gravenhage 1893. 8⁰.
Bijdragen en Mededeelingen. Deel 14. s'Gravenhage 1893. 8⁰.

Nieuw provinciaal Utrechtsch genootschap van kunsten en wetenschappen in Utrecht:

Verslag der algemeene vergadering 1893. 8⁰.
Aantekeningen van de sectie-vergaderingen 1892. 8⁰.

Koninklijke Bibliotheek in Utrecht:

Alb. Anno 1891 e 1892. No. 24. 26. 1892/93. 8⁰.

Universitäts-Observatorium in Wien:

Annal. Resultate für das Jahr 1891. 1893. 8⁰.

Bureau of Ethnology in Washington:

VIII th annual Report 1886—1887. 1891. 4⁰.
Bibliography of the Chinookan Languages, by J. C. Pilling. 1893. 8⁰.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

North American Fauna No. 7. 1893. 8⁰.
Division of Ornithology and Mammalogy. Bulletin No. 4. 1893. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Albert A. Michelson, On the application of interference methods to spectroscopic measurements. 1892. fol.
Smithsonian Meteorological Tables. 1893. 8⁰.
Miscellaneous Collections. Vol. 34. 36. 1893. 8⁰.

U. S. Patent Office in Washington:

Alphabetical Lists of Patentees for the quarter ending March 31, 1893. 4⁰.

Surgeon General's Office in Washington:

Index Catalogue. Vol. XIV. 1893. 4⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Bulletin No. 26. 27. 1893. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletin. No. 82—86. 90—96. 1891—92. 8⁰.
Mineral Resources of the United States, year 1891. 1893. 8⁰.
Monographs. Vol. XVII. XVIII. XX and Atlas in fol. 1892. 4⁰.
XI th annual Report 1889—90. 1891. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. Jahrg. 25. Schlussheft. 1893. 8⁰.
Festschrift zur 25jährigen Gedenkfeier des Harzvereins für Geschichte. 1893. fol.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Ed. Suess. Bericht der kaiserlichen Akademie und der mathematisch-naturwissenschaftl. Classe 1892—93. 1893. 8⁰.
Eröffnungsrede des Herrn Erzherzogs Rainer 31. Mai 1893. 8⁰.
Sitzungsberichte der philos.-hist. Classe. Bd. 127 u. 128. 1892/93. 8⁰.
„ d. mathem.-naturw. Cl. Abth. I. 1892. No. 7—10 }
„ IIa. 1892. „ 6—10 }
„ IIb. 1892. „ 6—10 } 1892—93. 4⁰.
„ III. 1892. „ 6—10 }
und Register zu Band 97—100.
Denkschriften. Mathem.-naturw. Classe, Bd. 59. 1892. 4⁰.
Monumenta Conciliorum. Tom. III, pars 2. 1892. 4⁰.
Tabulae codicum. Vol. III. 1893. 8⁰.

K. K. Central-Anstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1891. 1893. 4⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. 1893. Heft 1. 1893. 4⁰.
Verhandlungen. 1893. Heft 6—10. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1893. No. 22—42. 44—52. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band XXIII, 4. 5. 1893. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Jahrg. 1893. Bd. 43, Quartal I. II. 1893. 8⁰.

Oesterreichische Gradmessungs-Commission in Wien:

Verhandlungen. Protokoll über die am 6. April 1893 gehaltene Sitzung. 1893. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band 8, No. 2. 1893. 4⁰.

K. K. Universität Wien:

Jahrbuch 1892/93. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden 1893/94. 8⁰.
Oeffentliche Vorlesungen. Somm.-Sem. 1893 u. Wint.-Sem. 1893/94. 8⁰.
Die feierliche Installation des Rectors für das Studienjahr 1893/94. 8⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. Band 33. 1893. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 46. 1893. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Band 27, No. 1—4. 1893. 8⁰.
Verhandlungen. 1893. No. 1—6. 8⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Band 34. 35. 1891—92. 8⁰.
Jahresbericht für 1890 und 1891. 1891—92. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrschrift. Jahrg. 38, Heft 1. 2. 1893. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

6. Jahresbericht, 1892. 1893. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Fürst Albert von Monaco:

Résultats des Campagnes scientifiques. Fasc. V. VI. 1893. 4⁰.

Julius Berghohm in Wien:

Entwurf einer neuen Integralrechnung. Heft 2. Leipzig. 1893. 8⁰.

Reinward Brandstetter in Luzern:

Malaio Polynesische Forschungen. II. 1893. 4⁰.

Domenico Comparetti in Florenz:

Le leggi di Gortyna. Milano. 1893. 4⁰.

Karl Fritsch in Wien:

Ein neues Universalstativ für astronomische Fernrohre. 1893. 8⁰.

Gustav Adolf Göttert in Posen:

Lösung des 210jährigen Räthsels der Schwerkraft! Text und Atlas. 1893. 8⁰ u. 4⁰.

E. v. Haxthausen in Sommerau im Spessart:

Vorgeschichtliche Bewohner des Südspessarts. Heft 1. 1893. 8⁰.

H. v. Helmholtz in Berlin:

Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers. 1893. 8⁰.

A. L. Herminjard in Lausanne:

Correspondance des Réformateurs. Tom. VIII. Genève. 1893. 8⁰.

H. Kleinschmidt in Insterburg:

Zwei lemnische Inschriften 1893. 8⁰.

A. Kölliker in Würzburg:

Handbuch der Gewebelehre des Menschen. Bd. II, 1. Hälfte. Leipzig 1893. 8⁰.

Moritz Kulm in Wien:

Ueber die Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur bei Gasen. 1893. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

The Taxes of the Papal Penitentiary. London. 1893. 8⁰.
The Spanish Inquisition as an Alienist. 1893. 8⁰.

Richard Lepsius in Berlin:

Geologie von Attika. Mit einem Atlas 1893. 4⁰. Atlas in fol.

L. Manouvrier in Paris:

Étude sur les variations morphologiques du corps du fémur dans l'espèce humaine. 1893. 8⁰.

Konrad Maurer in München:

Nogle Bemaerkninger til Noges Kirkehistorie. Christiania 1893. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 52, No. 2. T. 53, No. 1. 2. 1893. 8⁰.

F. J. Patricio in Porto (Portugal):

Flora latina inscriptionum urbis Portucalensis. 1893. 8⁰.

Robert Pöhlmann in Erlangen:

Geschichte des antiken Kommunismus und Socialismus. Band I. München 1893. 8⁰.

J. de Rey-Pailhade in Toulouse:

Essai sur l'unification internationale de l'heure. 1893. 8⁰.

F. v. Sandberger in Würzburg:

Zur Geologie der Gegend von Homburg v. d. Höhe. Wiesbaden 1893. 8⁰.

E. Vogel in Alameda, California:

The Atomic Weights are, under Athmospheric Pressure, not Identical with the Specific Gravities. 1893. 8⁰.

Alexander Wesselofsky in St. Petersburg:

Boccaccio, sein Kreis und seine Zeitgenossen. (In russischer Sprache.) Tom. 1. 1893. 8⁰.

Johannes Wislicenus in Leipzig:

Die Chemie und das Problem von der Materie. 1893. 8⁰.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. No. LXXXII. 1893. 8⁰.

Namen-Register.

v. Baeyer Adolf 17, 273, 293.
Boltzmann Ludwig 119, 321.

Egger Joseph Georg 17.

Fomm Ludwig 245, 275.

Graetz Leo 237, 245, 275.
Groth Paul 273.
v. Gümbel Wilhelm 19, 293.

Hartig Robert (Wahl) 292.
Hertz Heinrich Rudolf (Wahl) 292.
v. Hofmann August Wilhelm (Nekrolog) 114.

v. Kokscharow Nikolaus (Nekrolog) 116.

v. Lommel Eugen 103, 129, 138, 217.

v. Orff Karl 102.
Owen Richard (Nekrolog) 116.

v. Pettenkofer Max 1, 111, 285.
Pohlig Hans 2.

Ranke Johannes (Wahl) 292.
v. Regel Eduard (Nekrolog) 113.
Rückert Johannes (Wahl) 292.

Mineralquellen von St. Moritz 19.

Nekrologe 113, 114, 115, 116, 117.

Säugethiere, geologische Entwicklung, Herkunft und Verbreitung derselben 137.

Selbstpotentialen und Inductionscoefficienten, neue Methode zur Messung derselben 237.
Sitzung, öffentliche der Akademie 111, 285.
Spannung bei elektrischen Oscillationen, Instrument zur Messung derselben 245.

Temperatur, Begriff der absoluten 321.
Terpene 273, 293.
Terpentinöl, künstliche Darstellung desselben 17.

Wahlen 292.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXIV Jahrgang 1894.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 135. Stiftungstages am 28. März 1894.

Seite

v. Voit: Nekrologe 113

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinz-Regenten am 15. November 1894.

M. v. Pettenkofer: Eröffnungsrede 395

Wahlen 401

Sitzung vom 13. Januar 1894.

F. Richarz: Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome 3

K. Döhlemann: Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung 41

Sitzung vom 3. Februar 1894.

C. v. Kupffer: Ueber Monorhinie und Amphirhinie . . 51

*Ad. v. Baeyer: Ueber Terpentinöl 51

Sitzung vom 3. März 1894.

Seite

*L. Sohncke: Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten 61

B. W. Stankewitsch: Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der dielektrischen Polarisation in Flüssigkeiten . . 63

Hermann Brunn: Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale 93

*Ad. v. Baeyer: Ueber Kümmelöl 61

Sitzung vom 5. Mai 1894.

N. Rüdinger: Ueber die Gehirne verschiedener Hunderacen 249

H. Seeliger: Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes 161

L. Graetz und L. Fomm: Ueber normale und anomale Dispersion elektrischer Wellen 189

L. Boltzmann: a) Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen 207

b) Zur Integration der Diffusionsgleichung bei variabeln Diffusionscoefficienten 211

A. Wassmuth: Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik 219

F. v. Sandberger: Ueber die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge 231

Sitzung vom 2. Juni 1894.

H. Seeliger: Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri 257

Ign. Schütz: Ueber eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz-schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell'schen Elektrodynamik entspricht 273

Sitzung vom 7. Juli 1894.

Seite

G. Bauer: Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome 343

L. Maurer: Zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen 297

*Ad. v. Baeyer: Ueber das Kümmelöl 296

Sitzung vom 3. November 1894.

R. Hartig: Ueber die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes 385

M. Planck: Ueber den Beweis des Maxwellschen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen 391

*E. Weinschenk: Beiträge zur Petrographie der östlichen Centralalpen, speciell des Gross-Venedigerstockes . . . 383

Sitzung vom 1. Dezember 1894.

H. Seeliger: Ueber den Schatten eines Planeten 423

F. Lindemann: Ueber die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird 403

*A. v. Baeyer: Ueber die Natur der Terpentinöle und verwandter Substanzen 402

Einsendungen von Druckschriften 361, 439

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 13. Januar 1894.

1. Herr L. BOLTZMANN legte eine Abhandlung des Herrn Dr. F. RICHARZ, Privatdocenten an der Universität Bonn: „Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome“ vor, unter Besprechung der hauptsächlichsten Resultate derselben.

2. Herr GUSTAV BAUER überreicht der Classe, ebenfalls unter Mittheilung der wesentlichen Ergebnisse, eine Abhandlung des Herrn Dr. KARL DÖHLEMANN, Privatdocenten für Mathematik an der hiesigen Universität: „Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation dritter Ordnung“.

Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome.

Von Dr. F. Richarz,
Privatdocent an der Universität Bonn.

(Eingelaufen 13. Januar.)

In den Sitzungen der Niederrheinischen Gesellschaft in Bonn vom 1. Dezember 1890[1]) und vom 12. Januar 1891[2]) habe ich einige Betrachtungen vorläufig mitgetheilt, welche an die elektrochemische Theorie in derjenigen Form anknüpfen, die ihr durch Herrn H. von Helmholtz in einer Reihe von Abhandlungen aus den Jahren 1873 bis 1882, am ausführlichsten in seiner Rede zu Faraday's Gedächtniss gegeben wurde.[3]) Meine Ausführungen betrafen die elektrische Wirkung ultravioletten Lichtes, die elektrolytische Leitung der Gase, das elektrische Elementarquantum, die die zwischen den Atomen einer Molekel wirksamen elektrostatischen, elektrodynamischen und Gravitationskräfte, die chemische Wärmeentwicklung insbesondere die Dissociationswärme (für Untersalpetersäure und für Joddampf), die Erregung elektrodynamischer Wellen durch periodische Bewegung der Valenzladungen und endlich eine Anwendung der kinetischen Theorie mehratomiger Gase von Herrn Boltzmann[4])

1) F. Richarz, Sitzber. der Niederrh. Ges. 47, p. 113, 114; 1890.

2) F. Richarz, Sitzber. der Niederrh. Ges. 48, p. 18—32; 1891.

3) H. v. Helmholtz, Journ. chem. Soc. June 1881. Vorträge u. Reden II, p. 275.

4) L. Boltzmann, Sitzber. d. Wiener Akad., mathem. Cl., 63, p. 417, 1871.

und des Clausius'schen Virialsatzes auf die intramolekulare Bewegung. In anderer Anordnung habe ich über einen Theil dieser Betrachtungen am 26. Juni 1891 in der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin vorgetragen.[1])

Weiterhin schien es dann zweckmässig, bei der ausführlichen Wiedergabe der erwähnten Schlussfolgerungen, von der ich durch andere Arbeit lange abgehalten wurde, strenger zu trennen, was schon vor Einführung der elektrochemischen Theorie abzuleiten war, was erst nach Einführung derselben. Jenes sind die aus der Anwendung des Virialsatzes auf die kinetische Theorie der Materie zu ziehenden Schlüsse in Bezug auf mehratomige Gase[2]) und in Bezug auf das Gesetz von Dulong und Petit.[3]) In ersterer Arbeit ergab sich insbesondere eine von der elektrochemischen Theorie unabhängige Beziehung zwischen Dissociationswärme und Druck, welche (wie früher die aus der elektrochemischen Theorie und der Dissociationswärme gezogenen Schlüsse) bei Untersalpetersäure und Joddampf und ausserdem auch bei der Dissociationswärme des Wasserstoffs nach Herrn E. Wiedemann's Messungen[4]) sich bestätigt fand.

Im Folgenden sind die an die Helmholtz'sche Theorie angeknüpften Betrachtungen ausführlich im Zusammenhang wiedergegeben und der letzte Abschnitt über den molekularen Magnetismus neu hinzugefügt. Während der Niederschrift erschien die Arbeit von Herrn H. Ebert über die Dissociationswärme in der elektrochemischen Theorie.[5])

---

1) F. Richarz, Verh. Phys. Ges. Berlin 10, p. 73—79; 1891.

2) F. Richarz, Wiedem. Ann. 48, p. 467—492; 1893.

3) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 708—716; 1893.

4) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10, p. 253, 1880; 18, p. 509, 1883; Ostwald, Allgem. Chemie 2, p. 49.

5) H. Ebert, Wied. Ann. 50, p. 255—260; 1893.

I. Elektrochemische Theorie nach Helmholtz.

Die Helmholtz'sche Form der elektrochemischen Theorie hat folgenden wesentlichen Inhalt.[1])

Faraday's Gesetz von der festen elektrolytischen Wirkung lässt sich in Verbindung mit Kekulé's Theorie von der chemischen Valenz dahin zusammenfassen, „dass dieselbe Menge Elektricität, wenn sie durch einen Elektrolyten fliesst, immer dieselbe Menge von Valenzwerthen an beiden Elektroden entweder frei macht, oder in andere Verbindungen überführt". Nimmt man die von Herrn Hittorf und Herrn F. Kohlrausch nachgewiesenen Gesetze der Jonenwanderung hinzu, so kann man dem Faraday'schen Gesetze die Form geben: „durch jeden Querschnitt eines Elektrolyten findet immer äquivalente elektrische und chemische Bewegung statt. Genau dieselbe bestimmte Menge, sei es positiver, sei es negativer Elektricität bewegt sich mit jedem einwerthigen Jon, oder mit jedem Valenzwerth eines mehrwerthigen Jon, und begleitet es unzertrennlich bei allen Bewegungen, die dasselbe durch die Flüssigkeit macht".

Bei Hinzunahme der Atomtheorie führt dieses Resultat zu einer Folgerung, welche Herr H. v. Helmholtz so ausspricht: „Wenn wir Atome der chemischen Elemente annehmen, so können wir nicht umhin, weiter zu schliessen, dass auch die Elektricität, positive sowohl wie negative, in bestimmte elementare Quanta getheilt ist, die sich wie Atome der Elektricität verhalten. Jedes Jon muss, solange es sich in der Flüssigkeit bewegt, mit je einem elektrischen Aequivalent für jeden seiner Valenzwerthe vereinigt bleiben. Nur an den Grenzflächen der Elektroden kann eine Trennung eintreten: wenn dort eine hinreichend grosse elektromotorische

1) Vergl. F. Richarz, l. c. und Naturw. Rundschau 6, Nr. 49 und 50; 1891.

Kraft wirkt, dann können die Jonen ihre bisherige Elektricität abgeben und elektrisch neutral werden."

„Wenn die vorher positiv geladenen Atome von Wasserstoff oder irgend einem andern Kation aus ihrer Verbindung ausscheiden und sich gasförmig entwickeln, so ist das entwickelte Gas elektrisch neutral, d. h. es enthält nach der Ausdrucksweise der dualistischen Theorie gleiche Quanta positiver und negativer Elektricität. Entweder also ist jedes Atom elektrisch neutral, oder je ein Atom, welches positiv beladen bleibt, verbindet sich mit je einem Atom, welches seine positive Ladung mit einer negativen ausgetauscht hat."

Ohne Kenntniss der Helmholtz'schen Faraday-Rede hat auch Herr E. Budde aus den Gesetzen der Elektrolyse die Folgerung gezogen, dass es ein Minimalquantum der Elektricität geben müsse und auch bereits den annähernden Werth desselben berechnet.[1]) Diese Arbeit ist mir erst nach Publication meiner vorläufigen Mittheilungen bekannt geworden und hat daher leider in diesen noch keine Erwähnung gefunden.

Das Resultat, die elektrische Beladung der Valenzstellen betreffend, gilt zunächst nur für die freien Valenzen der Jonen in Elektrolyten. Aber es sind viele Thatsachen bekannt, welche dafür sprechen, dass die elektrolytische Leitung eine weit mehr verbreitete Eigenschaft ist, als man früher glaubte, dass dieselbe keineswegs ausschliesslich den Säuren und Salzen zukommt. Auch ist dieselbe, wie wir mit Sicherheit wissen, durchaus nicht auf den flüssigen Aggregatzustand beschränkt. Ferner können wir in zahlreichen Fällen aus secundären Prozessen bei der Elektrolyse auf die elektrische Ladung von Valenzen schliessen, welche nicht nothwendig die freien Valenzen eines Jon sind. Aus stark verdünnter Chlorwasserstoffsäure wird an der Anode neben Chlor auch

1) E. Budde, Wied. Ann. 25, p. 562; 1885.

Sauerstoff entwickelt. Entweder ist nun in diesem Falle der Sauerstoff selbst Anion, oder derselbe entsteht secundär durch Einwirkung des Chlors auf das Lösungswasser. In letzterem Falle würden die Chloratome, indem sie mit dem Wasserstoff des Wassers neue Chlorwasserstoffsäure bilden, ihre ursprüngliche negative Ladung behalten, so dass also der neutral entweichende Sauerstoff die entsprechenden Aequivalente negativer Ladung an die Anode abgeben müsste. Auf jeden Fall können wir schliessen, dass auch in den Wassermolekeln, welche bei der Elektrolyse, wenigstens der concentrirten Chlorwasserstoffsäure, gewiss nicht betheiligt sind, der Sauerstoff negative Ladung besitzt. In derselben Weise kommt man für viele andere Fälle zu der sicheren Folgerung, dass auch andere Valenzen die elektrische Ladung besitzen als die freien Jonenvalenzen. Jedes Atom oder jede Atomgruppe, welche bei einem secundären Process an die Stelle eines Jon treten kann, muss für jede Valenz mit einem elektrischen Elementarquantum beladen sein.

Es bleibt zunächst eine offene Frage, ob bei der elektrolytischen Ausscheidung freier neutraler Molekeln die Neutralisation so zu denken ist, dass jedes einzelne Atom des Jon neutralisirt wird; oder ob dieselbe in der Weise geschieht, dass beispielsweise beim Wasserstoff ein Atom sein positives Elementarquantum an die Kathode abgibt, dafür ein negatives empfängt, und sich mit einem anderen Atom, welches seine positive Ladung behalten hat, zu einer als Ganzes neutralen Molekel vereinigt. Herr von Helmholtz spricht sich für die letztere Alternative aus, welche zugleich mit der aus Avogadros Gesetz gezogenen Folgerung übereinstimmt, dass die Molekeln des freien Wasserstoffs aus je zwei Atomen zusammengesetzt sind.

Dass Atome derselben Art, wie nach dieser Ansicht bei den Gasen die beiden Atome einer Molekel, Ladungen entgegengesetzter Art besitzen können, folgt in anderen Fällen

mit Sicherheit aus elektrolytischen Processen. So ist der Schwefel in den Schwefelmetallen Anion, also negativ geladen; in Schwefelsäure muss er aber positiv geladen sein, da er bei der Elektrolyse concentrirter Schwefelsäure an der Kathode abgeschieden wird — ob dies durch einen primären oder einen secundären Process geschieht, kommt, wie oben auseinandergesetzt, dabei nicht in Betracht. Analog können wir auch für den Stickstoff schliessen; man muss annehmen, dass in der Stickstoffwasserstoffsäure N_3H die freie Valenz der Gruppe N_3 als diejenige eines Anion negativ geladen sei; dagegen bei der Elektrolyse von Amoniaksalzen und salpetersauren Salzen wird unter Umständen freier Stickstoff an der Kathode abgeschieden; also ist in diesen Verbindungen wenigstens ein Theil seiner Valenzwerthe positiv geladen.

Zu der Anschauung, dass von den beiden Atomen, welche die Molekel eines Gases bilden, das eine positiv, das andere negativ elektrisch sei, ist auf ganz anderem Wege auch Herr W. Giese,[1]) sowie später auch Herr A. Schuster[2]) gelangt, welche annehmen, dass unter dem Einflusse elektrischer Kräfte die beiden entgegengesetzt geladenen Atome getrennt werden und als Jonen die Leitung der Elektricität in Gasen ermöglichen. Diese Annahme hat durch die Versuche der beiden genannten und anderer Physiker[3]) einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit erlangt.

Aus den oben angeführten Betrachtungen gelangt Herr von Helmholtz zu dem Schlusse, dass nicht nur bei den

1) W. Giese, Wied. Ann. 17, p. 538, 1882; 38, p. 403, 1889.

2) A. Schuster, Proc. Roy Soc. London 37, p. 317, 1884; 1887 Nr. 256; 1890 Nr. 291 p. 526.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. 15, p. 432, 1883; 29, p. 358, 441, 1890; 36, p. 313, 1893. Rob. v. Helmholtz, Wied. Ann. 32, p. 1, 1887. Rob. v. Helmholtz und F. Richarz, Wied. Ann. 40, p. 161, 1890. E. Wiedemann und H. Ebert, Wied. Ann. 35, p. 209, 1888. J. Elster und H. Geitel, Wied. Ann. 37, p. 325 ff., 1889; 39, p. 330, 331, 1890. C. Ludeking, Phil. Mag. 33, p. 521, 1892.

Jonen, sondern ganz allgemein jeder Valenzwerth eines Atoms mit je einem Elementarquantum entweder positiver oder negativer Elektricität beladen sei.

Weiterhin schliesst Herr von Helmholtz aus Betrachtung der Arbeitsleistungen bei der Elektrolyse, dass die Elementarquanta der beiden Elektricitäten $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$, mit verschiedener Kraft von verschiedenen Atomen (vielleicht auch von den verschiedenen Verbindungsstellen eines einzelnen multivalenten Atoms) angezogen werden. Wasserstoff und die Metalle müssen stärkere Anziehung für $+\varepsilon$, schwächere für $-\varepsilon$ haben; umgekehrt Sauerstoff und die Halogene.

Eine solche, für verschiedene Substanzen und für die beiden Elektricitäten verschiedene Anziehung zwischen ponderabler Materie und Elektricität ist keine ad hoc gemachte Hypothese, sondern muss auch angenommen werden zur Erklärung von Volta's Fundamentalversuch über die Scheidung der Elektricitäten beim Contact heterogener Körper. Aus der Verschiedenheit der Anziehungen für die beiden Elektricitäten ergibt sich, dass unter Leistung positiver Arbeit, welche als abgegebene Wärmemenge erscheinen kann, eine positiv beladene Sauerstoffvalenz ihre Ladung gegen eine negative auszutauschen vermag. Hieraus hat Herr von Helmholtz[1]) das Zustandekommen der Convectionsströme in sauerstoffhaltigen verdünnten Säuren erklärt; weiterhin habe ich gezeigt,[2]) wie jener Umstand ebenfalls eine vollständige Aufklärung darbietet für das verschiedene Verhalten der beiden Gruppen von Superoxyden, welche Schönbein unter den Namen „Ozonide" und „Antozonide" unterschied.

Die von Berzelius behauptete und auch von Faraday angenommene Identität der chemischen Verwandtschaft und

1) H. von Helmholtz, Ber. d. Berl. Akad. 1873, p. 587; 1880, p. 285; 1883, p. 662; Pogg. Ann. 150, p. 483, 1873; Wied. Ann. 11, p. 737, 1880. Wissenschaftliche Abhandl. 1, p. 830, 917.

2) F. Richarz, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 21, p. 1675, 1888.

der Elektricität spricht Herr von Helmholtz auf Grund der entwickelten Schlussfolgerungen dahin aus, dass wenigstens die „bei weitem mächtigsten unter den chemischen Kräften elektrischen Ursprungs sind. Die Atome haften an ihren elektrischen Ladungen und die einander entgegengesetzten Ladungen wieder aneinander". Wenn jede Valenz mit einem Elementarquantum entweder von $+E$ oder von $-E$ beladen ist, so können elektrisch neutrale Verbindungen nur hergestellt werden, wenn jede positiv beladene Valenzstelle sich mit je einer negativ beladenen verbindet. „Daraus folgt dann unmittelbar, dass jede Verwandtschaftseinheit eines Atoms nothwendig mit einer und nur mit einer solchen Einheit eines anderen Atoms verknüpft sein muss. Dies ist in der That die wesentliche Behauptung der Valenztheorie der modernen Chemie."

So würde sich in einfachster Weise Kekulés Verkettung der Atome durch die Verbindung ihrer Valenzwerthe ergeben, wie sie in den typischen Verbindungen gefunden wird. Elektrolyte aber gehören stets zu den typischen Verbindungen. Anders würde es sich verhalten mit den losen molecularen Aggregaten, welche nicht mit Valenzwerthen an einander geknüpft sind, z. B. der Bindung von Krystallwasser; ihre Bestandtheile können nicht durch elektrische Kräfte von einander getrennt werden; dieselben werden also auch nicht durch elektrische Kräfte verbunden, sondern anders geartete Molecularkräfte müssen zwischen ihnen wirksam sein.

Herr von Helmholtz hat sich bei seinen Folgerungen und Anschauungen der Sprache der alten dualistischen Theorie bedient; gerade in ihr lassen sich die quantitativen Beziehungen bei der Elektrolyse am leichtesten und bestimmtesten ausdrücken.

Sind die Schlüsse in der Sprache der einen Theorie consequent durchgeführt, so ist der Ausdruck derselben Schlussreihe in der Sprache einer anderen Theorie wie eine Ueber-

setzung: der wesentliche Inhalt bleibt davon unberührt. Insbesondere ist hervorzuheben, dass alle auf Grund feststehender Thatsachen angestellten Berechnungen mechanischer Grössen, wie der Anziehung zwischen Elektricitätsmengen, der Arbeit bei ihrer Trennung u. s. w. von der Sprache der Theorie unberührt bleiben, in welcher der Zusammenhang der Thatsachen bildlich ausgedrückt wird.

II. Aus der kinetischen Gastheorie entnommene Voraussetzungen.

In die Berechnung des elektrischen Elementarquantums geht aus der kinetischen Gastheorie die Zahl der Molekeln in 1 ccm Gas ein. Man muss sich darüber klar sein, mit wie geringer Sicherheit diese Zahl bekannt ist. Ihre Berechnung ist bekanntlich zuerst aufgeführt von Herrn Van der Waals.[1]) Die zu Grunde liegenden Gleichungen sind nach der „kinetischen Theorie der Gase" von Herrn O. E. Meyer, pag. 228—230, folgende:

Es sei L die mittlere molekulare Weglänge, λ die Kante des einer Molekel zukommenden Elementarwürfels, ϱ der von Clausius eingeführte „Radius der Wirkungssphäre". Dann ist in erster Annäherung

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2}$$

Eine zweite Beziehung geht aus von dem wahren Volumen b der Molekeln in der Zustandsgleichung von Herrn Van der Waals. Der Werth von b gilt, wie diese Zustandsgleichung, für die Masseneinheit des betrachteten Gases. O. E. Meyer findet dann aus der Verkleinerung, welche an

1) J. D. van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, deutsch von Roth, Leipzig 1881, Beibl. z. Wied. Ann. 1, p. 10, 1877. Rühlmann, Mechan. Wärmeth. II, p. 244.

dem Werthe von L bei einer zweiten Annäherung anzubringen ist:

$$b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \mathfrak{N} \pi \varrho^3$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekeln in der Masseneinheit ist. Multiplicire die beiden Gleichungen mit einander und beachte, dass $\mathfrak{N} \lambda^3 = v$, dem scheinbaren Volumen, welches die Masseneinheit des Gases als Ganzes einnimmt, ist, so ergibt sich

$$\varrho = \frac{3b}{2v} L$$

Es soll bei Anwendung dieser Gleichung stets eine Atmosphäre als Druckeinheit, und das Volumen v der Masseneinheit beim Druck 1 und der Temperatur 0^0 als Volumeneinheit gewählt werden. Die von Van der Waals angegebenen Zahlenwerthe für b gelten meist für diese Einheiten. Einige seiner b sind aber für 1 m Quecksilber als Druckeinheit angegeben; die zugehörige Ausnahmsvolumeneinheit ist also das 0,76 fache unserer gewöhnlichen; und da b ein seinem Wesen nach constantes Volumen bedeutet, betragen die Ausnahms-Zahlenwerthe von b das 1/0,76 fache derjenigen für die gewöhnliche Einheit; zur Reduction auf unsere obigen, gewöhnlichen Einheiten sind jene Ausnahms-Zahlenwerthe von b daher mit 0,76 zu multipliciren.[1])

Wird nach dieser Reduction die Formel für ϱ bei einem Gase angewandt, und wird $p = 1$ Atmosphäre, die Temperatur $= 0^0$ genommen, so wird $v = 1$, und für L ist der Werth L_0 bei 0^0 zu nehmen; also

1) Die obigen Betrachtungen führen mit Uebergehung der letzten Gleichungen auf Seite 229 bei O. E. Meyer für ϱ unmittelbar zu obiger Schlussformel, welche im Wesentlichen mit den ersten Gleichungen auf Seite 230 ebenda übereinstimmt, in der Form aber, insbesondere bezüglich der Dimensionen vielleicht übersichtlicher ist.

$$\varrho = \frac{3}{2} b L_0$$

Für L_0 sind die Werthe genommen, welche aus den für 0^0 geltenden Reibungscoefficienten η_0 nach den Beobachtungen von Herrn von Obermayer[1]) folgen. Dieselben sind in der unten stehenden Tabelle angegeben; aus η_0 ist die Weglänge nach der Formel

$$L_0 = \frac{\eta_0}{0{,}318 \cdot \mu \cdot \Omega}$$

berechnet,[2]) wo μ die Dichtigkeit, Ω der Maxwell'sche Mittelwerth der Molekulargeschwindigkeit ist. Die bei Wasserdampf unten angegebene Zahl für η_0 ist den Beobachtungen der Herren Kundt und Warburg[3]) entnommen.

Die Herkunft der Werthe von b ist in der unten angegebenen Tabelle jedesmal einzeln aufgeführt; wenn verschiedene Beobachtungen bezw. Berechnungen für ein und dasselbe Gas erheblich verschiedene Werthe ergeben haben, sind die Extreme, sonst das Mittel angegeben.

ϱ, der „Radius der Wirkungssphäre", wird gleich dem Durchmesser der als starre Kugel gedachten Molekel angenommen, also deren Querschnitt $q = \frac{\varrho^2 \pi}{4}$. Die Summe Q_0 aller Molekularquerschnitte in 1 ccm bei 0^0 und Atmosphärendruck ergibt sich aus der Weglänge L_0 nach der Formel[4]): $Q_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}\, L_0}$. Endlich wird dann $\frac{Q_0}{q}$ die Zahl

1) v. Obermayer, Carls Rep. 13, p. 156, 1877.

2) O. E. Meyer, l. c., pag. 323.

3) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 155, p. 540, 1876; O. E. Meyer, l. c., p. 141, 142. Der Werth η ist auf 0^0 reducirt unter der Annahme, dass der Reibungscoefficient für Wasserdampf wie für andere der Condensation nahe Gase der absoluten Temperatur proportional sei. (O. E. Meyer, p. 159.)

4) O. E. Meyer, l. c., p. 206.

der Molekeln in 1 ccm Gas bei 0° und Atmosphärendruck. Die Resultate, stets in C. G. S.-Einheiten angegeben, sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	η_0	L_0	Q_0	b	ϱ	$N = \frac{Q_0}{q}$
Luft	1677	912	19400	0,0025 [1]	3,42	21
Stickstoff . . .	1659	918	19200	0,00176 [2]	2,42	42
Wasserstoff . .	861	1783	9900	0,0024 [2]	6,42	3*
				0,00049 [3]	1,31	73
Kohlensäure . .	1383	613	28800	0,0028 [4]	2,58	55
				0,00059 [2]	0,54	1252*
Stickoxydul . .	1353	598	29500	0,00191 [5]	1,71	128
Aethylen . . .	922	508	34800	0,0025 [6]	1,91	121
Wasserdampf . .	909	628	28100	0,00105 [7]	0,99	365
Schweflige Säure	1225	444	39800	0,00249 [8]	1,66	184
Chloräthyl . . .	889	325	54400	0,00397 [8]	1,94	184
Chlorwasserstoff .	1379	672	26300	0,00173 [8]	1,74	110
	10^{-7}	10^{-8} cm	cm²		10^{-8} cm	10^{18}

Die Werthe von ϱ sind nicht sehr voneinander verschieden, obwohl die Zahl der Atome in einer Molekel zwischen 2 und 8 (bei $C_2 H_5 Cl$) beträgt; auch sind die Werthe von ϱ ganz ähnlich den aus anderen Ueberlegungen erschlossenen. (Vgl. O. E. Meyer § 102, § 107.) Allgemein kann der Durchmesser eines Moleküls etwa von der Grössenordnung 10^{-8} cm angesehen werden; die obigen Zahlen liegen zwischen dem 6fachen und der Hälfte dieses Werthes.

Die Zahlen für N gruppiren sich zwar ersichtlich um ein Mittel, welches etwa 10^{20} beträgt; sie liegen aber bis zum 12fachen und $^1/_{30}$ dieses Werthes, entsprechen also sehr

1) Van der Waals-Roth, l. c., p. 72; und Berechnung von O. E. Meyer, l. c., p. 74. — 2) O. E. Meyer, l. c., p. 74. — 3) Van der Waals-Roth, l. c., p. 99. — 4) Ebd. p. 74, 81, 85, 94, 136. — 5) Ebd. p. 84, 136. — 6) Ebd. p. 86, 101, 136. — 7) Ebd. p. 135. — 8) Ebd. p. 136.

wenig Avogadros Regel.[1]) Das liegt gewiss nicht lediglich an der Unsicherheit der in die Rechnung eingehenden Beobachtungen, sondern an den Prinzipien der ganzen Ueberlegungen über den „Radius der Wirkungssphäre", über die Art wie die räumliche Ausdehnung der Molekeln in die Weglänge und in die Zustandsgleichung eingeht u. s. w., Ueberlegungen, die man aber vorläufig mit der ihnen anhaftenden Unsicherheit hinnehmen muss, will man nicht überhaupt das intellectuelle Opfer eines Verzichtes auf derartige Speculationen bringen; wenn man nur jederzeit ihrer grossen Unsicherheit eingedenk bleibt.

III. Berechnung des elektrischen Elementarquantums.

Die folgende Rechnung knüpft an die „Berechnung der elektrostatischen Wirkung der elektrolytischen Ladungen von 1 Milligramm Wasser" an, welche Herr von Helmholtz im Anhang I zur Faraday-Rede gegeben hat.

Nach den neuesten Bestimmungen von F. und W. Kohlrausch[2]) scheidet 1 Ampère in 1 sec 0,1740 ccm Knallgas, also 0,1160 ccm Wasserstoff von 0° und Atmosphärendruck aus. Die in 1 sec von der Intensität 1 Ampère durch einen Querschnitt des Stromes transportirte Elektricitätsmenge ist gleich 10^{-1} elektromagnetischen, oder gleich $3 \cdot 10^{9}$ elektrostatischen C.G.S.-Einheiten. Davon fliesst die Hälfte als positive Elektricität in der einen, die Hälfte als negative in der anderen Richtung. Als den betrachteten Querschnitt

1) Die extremen Werthe für N, welche in der Tabelle mit * bezeichnet sind, gehen übrigens aus einer Berechnungsweise hervor, bei welcher nur die Abweichung für Wasserstoff und Kohlensäure vom Boyle-Mariotte'schen Gesetz berücksichtigt, während die anderen, dem Mittel näheren Werthe für dieselben Gase aus den Abweichungen auch vom Gay-Lussac'schen Gesetze abgeleitet sind. Vgl. O. E. Meyer, l. c., pag. 74, 230.

2) F. und W. Kohlrausch, Wiedem. Ann. XXVII, p. 59, 1886.

nehmen wir die Kathode. Die sämmtlichen als Kation vorhandenen H-Atome sind ursprünglich positiv beladen. Von denjenigen, welche als neutrales Gas entweichen, gibt die Hälfte bei der Elektrolyse die positive Ladung an die Kathode ab, erhält dafür negative Ladung und vereinigt sich mit der anderen Hälfte, welche ihre positive Ladung behalten hat, zu Molekeln, welche je ein positives und je ein negatives Atom enthalten. Hieraus und aus den obigen Zahlenangaben folgt, dass in 0,1160 ccm Wasserstoffgas die gesammte Ladung der positiven beziehungsweise der negativen Atome $15 \cdot 10^8$ positive beziehungsweise negative elektrostatische C. G. S.-Einheiten beträgt. Nennen wir E den absoluten Werth der Ladung einer Art, welche in 1 ccm Wasserstoff bei 0° und Atmosphärendruck vorhanden ist, so folgt

$$E = 129 \cdot 10^8 \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1} \text{ pro ccm.}$$

Für ein Gas, dessen Molekeln aus 2 zweiwerthigen oder dreiwerthigen Atomen bestehen, z. B. für Sauerstoff und Stickstoff, hat E den zweifachen und dreifachen Werth.

An die erste Ausführung dieser Rechnung hatte ich die Beantwortung der Frage angeknüpft, ob die elektrolytische Leitung in einem Gase durch die Jonenladungen auch bei den stärksten Verdünnungsgraden noch leicht vorstellbar erscheine.[1]) Die stärkste Verdünnung, welche mit Toepler-Hagen'schen Quecksilberluftpumpen erreicht wird, beträgt etwa ein Hundert Milliontel Atmosphäre.[2]) Dabei kommen also auf 1 ccm Wasserstoff noch 129 elektrostatische Einheiten positiver und negativer Elektricität und entsprechend das Doppelte bezw. Dreifache für Sauerstoff resp. Stickstoff.

---

1) F. Richarz, Sitzber. Niederrh. Ges. Bonn. 47, p. 114, 1. December 1890. Vergl. H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann. 50, p. 28/30, 1893.

2) E. B. Hagen, Wied. Ann. 12, p. 438, 1881. A. Raps, Wied. Ann. 48, p. 379, 1893.

Eine Kugel von 1 cm Halbmesser auf ein Potential von 300 Volt geladen, enthält eine elektrostatische Mengeneinheit. Ein schneller Uebergang einer solchen Ladung von der Kugel in das Gas würde also auch bei den grössten herstellbaren Verdünnungen für die Vorstellung keine Schwierigkeit machen.

Aus der oben berechneten elektrischen Gesammtladung einer Art E, welche in 1 ccm Wasserstoffgas vorhanden ist, und aus der Zahl N der Molekeln ergibt sich eine angenäherte Berechnung der Ladung einer Valenzstelle. Die Unsicherheit dieser und aller analogen Berechnungen soll nach dem Vorgange von Herrn A. P. Chattock (siehe Citat pag. 38) durch das Zeichen $\approx$ statt des Gleichheitszeichens angedeutet werden. Für $N \approx 10^{20}$ wird das Helmholtz'sche Elementarquantum

$$\varepsilon = \frac{E}{N} \approx 129 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

Herr E. Budde findet $510 \cdot 10^{-12}$ C.G.S.; G. J. Stoney[1]) $30 \cdot 10^{-12}$ C.G.S. Nach den früheren Ausführungen würden die extremsten der in der Tabelle auf Seite 14 vorkommenden Werthe von N für das Elementarquantum Abweichungen bis zum 30 fachen und bis zu einem Zwölftel von dem oben angegebenen mittleren Werthe ergeben.

IV. Grössenverhältniss von Gravitation, elektrostatischen und elektrodynamischen Kräften zwischen den Atomen einer Molekel.

Herr von Helmholtz hat in der Faraday-Rede bereits gezeigt, dass die elektrolytischen Ladungen von Wasserstoff und Sauerstoff im Wasser, wenn seine beiden chemischen Bestandtheile ohne ihre Ladungen zu verlieren von einander getrennt werden könnten, eine Anziehung auf einander aus-

1) G. J. Stoney, Trans. Royal Dublin Soc., (2), 4, p. 563—608, 1891.

üben würden, welche der gegenseitigen Gravitation ihrer ponderablen Träger um das 400,000 Billionenfache überlegen wäre.[1]) Da beide Arten von Kräften dem Newton'schen Gesetze gehorchen, kann man die Vergleichung beider Kräfte unabhängig von der Entfernung und Masse machen. Diesen Schluss können wir also auch unmittelbar übertragen auf die beiden Atome einer Molekel. Wenn nun auch dabei die Voraussetzung nicht erfüllt ist, dass die beiden Atome gegenüber ihrer Entfernung als Punkte zu betrachten sind, so werden doch die elektrischen Ladungen ihren Sitz an den einander zugekehrten Seiten der Atome haben und also a fortiori die Anziehung der elektrischen Ladungen sehr viel grösser sein, als die Gravitation der beiden Atome auf einander.

In Folge der Wärmebewegung werden aber die Valenzladungen der beiden Atome einer Molekel auch elektrodynamische Kräfte auf einander ausüben können. Im gasförmigen Zustande wird die Molekel als Ganzes eine fortschreitende Bewegung haben, deren Geschwindigkeit mit u bezeichnet werde; ausserdem wird die Molekel Drehung um den Schwerpunkt ausführen, wobei noch der Abstand der beiden Atome veränderlich sein kann. Unter vereinfachenden Annahmen ist leicht zu zeigen, dass die elektrodynamische Kraft der sich bewegenden Valenzladungen gegen die elektrostatischen ausserordentlich klein ist.

Die beiden Atome sollen gleiche Masse haben; sie sollen mit ihren Ladungen ε als punktförmig angenommen werden; die innere Molekularbewegung soll in einer Umkreisung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes mit constanter Geschwindigkeit c bestehen. Die elektrodynamische Wirkung, die theils von der fortschreitenden Bewegung, theils von der inneren Kreisbewegung herrührt, ist nach einem der elektrodynamischen Grundgesetze zu berechnen. Weber's Gesetz gibt

1) H. von Helmholtz, Vorträge und Reden II, p. 317.

keine Wirkung. Die Grundgesetze von Riemann und Clausius ergeben eine solche in Richtung der Verbindungslinie; bezeichnen wir mit r den Abstand der beiden Atome, mit v die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich für die elektrische Gesammtkraft stets ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\varepsilon^2}{r^2}\left(1 + n\frac{u^2}{v^2}\right)$$

Für die innere Kreisbewegung ist c statt u zu setzen; n ist ein Zahlenfactor, der für die beiden Grundgesetze resp. für die beiden Bewegungsarten verschiedene, zwischen -4 und $+4$ liegende Werthe hat; die elektrodynamische Wirkung wird zu vernachlässigen sein, wenn u und c klein sind gegen $v = 3 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1}.

Was zunächst u betrifft, so ist sein Mittelwerth aus der kinetischen Gastheorie bekannt;[1]) derselbe ist am grössten für Wasserstoff $= 1{,}7 \cdot 10^5$ cm sec^{-1}, also in der That klein gegen v. Für c erhalten wir einen Anhalt aus der Theorie des Wärmegleichgewichts zwischen mehratomigen Gasmolekeln von Herrn Boltzmann.[2]) Nach derselben ist die mittlere lebendige Kraft L_a der fortschreitenden Bewegung einer Molekel gleich der gesammten mittleren lebendigen Kraft l eines Atoms. Nenne ich noch die mittlere lebendige Kraft der inneren Bewegung in der Molekel L_i, so ist die gesammte lebendige Kraft einer Molekel $= L_a + L_i$, und bei einer zweiatomigen Molekel der auf ein Atom entfallende Antheil

$$l = \frac{(L_a + L_i)}{2}$$

Aus Boltzmann's Resultat $l = L_a$ folgt daher

$$L_i = L_a$$

1) O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, p. 45.

2) L. Boltzmann, Sitzber. der Wiener Akad. mathem. Cl. 63, p. 417, 1871.

Geschieht, wie zur Vereinfachung angenommen werden musste, die fortschreitende Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit u, die innere Kreisbewegung mit der constanten linearen Geschwindigkeit c, so ist also $c = u$. Auch c ist mithin klein gegen die Lichtgeschwindigkeit v, und unter den vereinfachenden Annahmen jede elektrodynamische Wirkung der bewegten Valenzladungen aufeinander zu vernachlässigen. Wenn nun auch die Voraussetzungen nicht erfüllt sind, dass erstens die Atome und ihre Ladungen als punktförmig anzusehen sind, zweitens dass die intramolekulare Bewegung der Atome in Umkreisung des Schwerpunktes besteht, so wird dadurch doch nicht die Grössenordnung im Verhältnisse von elektrostatischer und elektrodynamischer Kraft geändert werden. Wir werden also letztere ebenso wie die Gravitation gegenüber der ersteren Kraft vernachlässigen können.

Ueber andere Kräfte ausser den elektrischen und der Gravitation, welche zwischen den Atomen einer Molekel thätig sein könnten, wissen wir nichts Sicheres. Wir wollen daher im Folgenden für einige Fälle, in welchen ein Vergleich mit anderen experimentellen Daten zu Gebote steht, zusehen, zu welchen Folgerungen die Annahme führt, dass die elektrostatischen Kräfte der Ladungen der Valenzstellen die einzigen zwischen 2 Atomen einer Molekel wirksamen Kräfte seien.

V. Die Dissociationswärme einer aus 2 Atomen bestehenden Molekel.

Die Wärmeentwicklung bei chemischen Prozessen wird im Sinne der Helmholtz'schen elektrochemischen Theorie vornehmlich durch die Verschiedenheit der Anziehung der Valenzstellen für die beiden Arten der Elektricität bedingt sein. Betrachten wir z. B. die Bildung von Chlorwasserstoff aus Chlorknallgas. Aus den neutralen Molekeln $(H+)\,(-H)$

und $(Cl +)$ $(- Cl)$ gehen schliesslich die Molekeln $(H +)$ $(- Cl)$ hervor. Die erste Phase des Prozesses ist die Trennung der zu je zweien verbundenen Wasserstoff- und Chloratome. Dabei leistet die Anziehung der beiden entgegengesetzten Ladungen negative Arbeit. Die zweite Phase besteht darin, dass die negative Hälfte der H-Atome ihre schwach festgehaltene negative Ladung an Cl-Atome abgeben und dafür die stärker angezogene positive Ladung erhalten, während die Hälfte der Cl-Atome ihre schwach festgehaltene $+ \varepsilon$ abgeben und dafür die stärker angezogene $- \varepsilon$ erhalten. Das Resultat dieses Austausches ist also, dass alle H-Atome positiv und alle Cl-Atome negativ beladen sind und offenbar leisten bei diesem Austausch die Anziehungskräfte zwischen den ponderablen Atomen und den Elektricitäten positive Arbeit. Die dritte Phase des Processes ist die Vereinigung je eines $(H +)$ mit einem $(- Cl)$ Atom zu neutralen Salzsäure-Molekeln. Hierbei leistet die Anziehung der beiden Ladungen positive Arbeit. Die Arbeitsleistungen während der ersten und dritten Phase werden annähernd gleich und entgegengesetzt sein, so dass die chemische Wärmeentwickelung hauptsächlich durch die zweite Phase, also durch die Verschiedenheit der Anziehungskraft ein und derselben Valenzstelle für die beiden Arten der Elektricität gegeben ist.

Ganz anders verhält es sich bei der Dissociation eines Gases. Die neutralen Molekeln $(X +)$ $(- X)$, welche durch eine Bindung zusammenhaften, sollen bei höherer Temperatur in die beiden isolirten Atome zerfallen. Wenn die Anziehung der beiden Ladungen die einzige zwischen den Atomen wirksame Kraft ist, würde die negative Arbeit derselben wesentlich die Wärmeabsorption bei der Dissociation bedingen. In Bezug auf die zuzuführende Energie ist ausser der von den Kräften geleisteten Arbeit noch zu berücksichtigen, welchen Inhalt an lebendiger Kraft das dissociirte Gas einerseits und

das nicht dissociirte Gas andererseits besitzen. Wir gehen aus von dem dissociirten Gase. Das Volumen soll constant sein, so dass äussere Arbeit nicht geleistet wird. Wir denken uns das dissociirte Gas abgekühlt bis auf eine Temperatur, bei welcher die Vereinigung aller Atome zu zweien eintreten kann, denken uns aber zunächst das Gas bei dieser Temperatur noch dissociirt. Dann soll die Association eintreten und nach derselben das Gas wieder auf die vorherige Temperatur gebracht werden. Die hierbei zu entziehende Wärmemenge ist die „Dissociationswärme". Der Gesammtinhalt an lebendiger Kraft ist vor und nach der Association derselbe; dies folgt unmittelbar daraus, dass bei derselben Temperatur der Mittelwerth der gesammten lebendigen Kraft je eines Atoms, auch bei verschiedenen Gasen, stets denselben Werth hat, einerlei ob die Atome isolirt oder zu Molekeln verbunden sind. Da also der Inhalt an lebendiger Kraft ungeändert bleibt, ist die Dissociationswärme gleich der Veränderung der potentiellen Energie, oder gleich der Arbeit der Kräfte, welche die beiden Atome einer Molekel auf einander ausüben.

Diese Anziehung soll nun nach unserer Annahme durch die elektrostatische Kraft der Valenzladungen gegeben sein. Wenn diese wieder als punktförmig angenommen werden und im Zustande der Association sich im Abstande r von einander befinden, so ist die Arbeit bei der Annäherung aus unendlicher Entfernung nach der Bezeichnung unserer früheren Gleichungen für eine Molekel

$$\text{gleich } \frac{\varepsilon^2}{r}$$

Bezeichnen wir den Mittelwerth einer Grösse x wie üblich durch $\bar{x}$, so wird dieselbe Arbeit für alle N-Molekeln in einem Cubikcentimeter

$$W = N\varepsilon^2 \overline{\frac{1}{r}}$$

Das einem Doppelstern vergleichbare System der sich

um einander bewegenden beiden Atome wird in Bezug auf die Raumerfüllung bei den Zusammenstössen der Molekel sich ähnlich verhalten wie eine Kugel, deren Durchmesser gleich ist dem mittleren Abstande der beiden Atome;[1]) $\bar{r}$ kann gleich dem Molekulardurchmesser ϱ von Seite 14 genommen werden. Wenn ferner grosse Abweichungen des Momentanwerthes r vom Mittelwerthe $\bar{r}$ nur sehr selten vorkommen, so kann auch ohne Fehler der Grössenordnung $\overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{1}{\bar{r}} \approx \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden. Dass diese Voraussetzung erfüllt ist, ist schon von vornherein plausibel; es folgt aber auch aus Herrn Boltzmann's kinetischer Theorie mehratomiger Gase. Nach derselben ist für ein Atom bei gegebener Lage und gegebener lebendiger Kraft jede Richtung gleich wahrscheinlich.[2]) Daraus folgt für eine aus 2 Atomen bestehende Molekel, dass eine Bewegungsrichtung, welche zu der Verbindungslinie der beiden Atome nahe senkrecht ist, sehr viel häufiger vorkommt als jede andere und dass die Häufigkeit abnimmt bis zur Bewegungsrichtung in der Verbindungslinie selbst. Z. B. verhält sich die Wahrscheinlichkeit einer Bewegungsrichtung, welche mit der Verbindungslinie der beiden Atome einen Winkel von 89° bis 90° einschliesst, zu der Wahrscheinlichkeit einer solchen in einem Winkel von 0° bis 1° ebenso wie auf der Erdkugel der Flächeninhalt der äquatorialen Zone von 0° bis 1° geogr. Breite zu der Polarkappe von 89° bis 90° Breite. Wenn nun die der tangentialen nahe Bewegungsrichtung an Häufigkeit so sehr überwiegt, so muss die Bahn der nach unserer Annahme unter dem Einflusse einer Newton'schen Kraft sich in einander bewegenden Atome sehr viel häufiger eine nahezu kreisförmige, d. h. elliptische mit geringer Excentri-

1) Vergl. O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, pag. 213.
2) L. Boltzmann, l. c., p. 416.

cität, als eine gestreckte von grosser Excentricität sein.[1]) Dann ist auch die Voraussetzung erfüllt, dass die Momentanwerthe von r sehr selten weit vom Mittelwerth $\bar{r}$ abweichen, und es kann also $\overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden.

Dies eingesetzt wird die Gleichung für die Dissociationswärme

$$W\varrho \approx N\varepsilon^2$$

Die Dissociationswärme W ist für einige dem theoretisch betrachteten Falle entsprechende Gase bekannt; werden für ϱ, N, ε ferner ihre im Früheren angenommenen Werthe gesetzt, so lässt sich unsere Gleichung controliren; dass dieselbe für Untersalpetersäure und Joddampf der Grössenordnung nach erfüllt ist, habe ich bereits früher bestätigt.[2])

Der Vorgang der Dissociation von Untersalpetersäure N_2O_4 zu $2NO_2$ ist für uns vollkommen analog der Dissociation von 2 Atomen, die mit einer Bindung verknüpft sind; denn die einwerthige Gruppe $-\overset{\text{III}}{N}\begin{smallmatrix}\diagup 0\\ |\\ \diagdown 0\end{smallmatrix}$ oder $-\overset{\text{V}}{N}\begin{smallmatrix}\diagup 0\\ \diagdown 0\end{smallmatrix}$ spielt bei derselben vollkommen die Rolle eines Atoms.

---

1) Vorstehende Ueberlegung lässt sich analytisch durchführen; vergl. Verhdlg. d. Phys. Ges. Berlin, 10, p. 76, 77; 26. Juni 1891. Es ergibt sich ein Resultat von der Form $\overline{\frac{1}{r}} = \frac{q}{\bar{r}}$. Der Faktor q, nahe $= 1$, kommt bei der Unsicherheit der anderen Ueberlegungen nicht in Betracht.

2) F. Richarz, Sitzber. d. Niederrh. Ges. 48, p. 25, 26; 12. Jan. 1891. Verhdlg. d. Phys. Ges. Berlin, 10, p. 73—79, 1891. Die Literatur über die Messungen der Dissociationswärme siehe daselbst, und Wied. Ann. 48, p. 491/492, 1893. — Welche von den 4 Grössen W, ϱ, N, ε man vermöge meiner obigen Gleichung aus den 3 übrigen berechnet, um den so berechneten Werth mit dem direct beobachteten zu vergleichen, ist selbstverständlich gleichgültig. In meiner ersten Publication hatte ich ϱ gewählt, in der zweitgenannten ε; Herr Ebert führt die Rechnung für W durch. (Wied. Ann. 50, p. 255—260, 1893.)

Aus den Versuchen von Berthelot und Ogier ergibt sich für Untersalpetersäure (bezogen auf die in 1 ccm bei 0^0 und Atmosphärendruck enthaltene Masse):

$$W = 25 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Für die Dissociation des Joddampfs hat Herr Boltzmann aus Versuchen von Fr. Meyer und J. M. Crafts für die im selben Volumen enthaltene Masse berechnet:

$$W = 54 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Endlich hat Herr E. Wiedemann aus Messungen der Wärmemenge, welche zur Ueberführung des Banden- in das Linienspectrum nöthig ist, gefunden, dass einem Gramm Wasserstoffgas von gewöhnlicher Temperatur zur Zerlegung in seine Atome etwa 128000 Gramm — Calorien zugeführt werden müssen.[1]) Daraus ergibt sich für die im ccm bei 0^0 und Atmosphärendruck enthaltene Masse:

$$W = 483 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Auch diesen Werth habe ich, wie die beiden anderen, schon bei der ausführlichen Zusammenstellung des lediglich kinetischen Theiles meiner Schlussfolgerungen mit in Betracht gezogen.[2])

Die abgeleitete Gleichung für die Dissociationswärme wollen wir so benutzen, dass wir aus W, ϱ und N den Werth von ε^2 berechnen, welcher Werth die Constante in der Newton'schen Kraft zwischen den Valenzladungen ist und in allen Consequenzen der Theorie auftreten muss und gegebenenfalls berechnet werden kann, so auch weiterhin im nächsten Abschnitt dieser Arbeit. Setzen wir $N \approx 10^{20}$, $\varrho \approx 10^{-8}$ cm, so erhalten wir aus den betr. Werthen der Dissociationswärme

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10, p. 253, 1880; 18, p. 509, 1883. Ostwald, Allgem. Chemie 2, p. 49.

2) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 492, 1893.

bei Untersalpetersäure: $\varepsilon \approx 50 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1}$
bei Joddampf: $\varepsilon \approx 73 \cdot 10^{-12}$ „
bei Wasserstoff: $\varepsilon \approx 220 \cdot 10^{-12}$ „

Dass diese Werthe mit dem aus der Elektrolyse folgenden $\varepsilon \approx 129 \cdot 10^{-12}$ so nahe übereinstimmen, ist bei der grossen Unsicherheit der Berechnungen und der Willkür verschiedener Annahmen teilweise Zufall; man darf durchaus nicht sagen, dass durch diese Uebereinstimmung die elektrochemische Theorie bestätigt sei. Denn es könnten ausser den elektrostatischen Kräften der Valenzladungen noch andere Kräfte von doppelter, dreifacher oder ähnlicher Grösse vorhanden sein, ohne dass die gefundene Uebereinstimmung innerhalb der Grenzen ihrer Unsicherheit gestört würde. Das aber werden wir sagen dürfen, dass wir nicht in Widerspruch mit den experimentellen Daten für die Dissociationswärme treten, wenn wir mit Herrn v. Helmholtz annehmen, dass die chemischen Kräfte zwischen den Atomen mit den elektrostatischen zwischen den Valenzladungen identisch sind.

VI. Anwendung des Satzes vom Virial und der Boltzmann'schen Theorie mehratomiger Gase.

Die innere Bewegung der Atome in einer Molekel ist eine stabile; auf sie lässt sich daher der Virialsatz von Clausius anwenden.[1]) Da die Zahl der in Wechselwirkung begriffenen Molekeln sehr klein ist, gegen die Gesammtzahl, kann von den Kräften der Molekeln untereinander abgesehen werden. In einem gegebenen Augenblicke kommen alle möglichen Zustände der relativen Bewegung und Lage, welche die Atome einer Molekel nach einander annehmen, gleichzeitig bei den verschiedenen Molekeln vor. Es werde mit

1) Clausius, Sitzber. der Niederrh. Ges. 27, p. 114, 1870. Pogg. Ann 141, p. 125, 1870. Jubelbd. p. 411, 1874. Literatur siehe Wied. Ann. 48, p. 468, 1893.

A_i die gesammte lebendige Kraft der inneren Bewegung der Atome in der Volumeneinheit, also diejenige der Bewegung der Atome relativ zum Schwerpunkte der Molekel, welcher sie angehören, bezeichnet. $f(r)$ sei die gegenseitige Anziehung der Atome einer Molekel. Dann ergibt nach Obigem der Virialsatz:[1])

$$A_i = \tfrac{1}{2} \Sigma r f(r)$$

Für die gesammte lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molekeln in der Volumeneinheit, A_a, ergibt sich ebenfalls aus dem Virialsatz[1])

$$A_a = \tfrac{3}{2} p$$

wo p der Druck ist.

Die bereits mehrfach erwähnte kinetische Theorie mehratomiger Gase von Herrn Boltzmann ergibt $A_i = A_a$ für 2 atomige Gase, von welchem Resultat (auf eine Molekel bezogen) bereits auf Seite 19 Gebrauch gemacht wurde. Wir erhalten also

$$\Sigma r f(r) = 3 p$$

Nimmt man nun wieder an, die Kraft $f(r)$ sei die elektrostatische Anziehung der Valenzladungen, und die Atome nur mit einer Bindung verknüpft, so ist $f(r) = \frac{\varepsilon^2}{r^2}$, und bei Einführung unserer früheren Bezeichnungen kann gesetzt werden $\Sigma r f(r) = N \varepsilon^2 \overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{N \varepsilon^2}{\varrho}$.

Der Virialsatz ergibt dann

$$N \varepsilon^2 \approx 3 p \varrho$$

p ist gleich $1{,}01 \cdot 16^6$ Dynen pro cm^2; nimmt man wieder $N \approx 10^{20}$, $\varrho \approx 18^{-8}$ cm, so folgt

$$\varepsilon \approx 17 \cdot 10^{-12} \, cm^{\frac{3}{2}} \, g^{\frac{1}{2}} \, sec^{-1}$$

---

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 470 ff., 1893.

Auch dieser Werth liegt wieder innerhalb der Grenzen der Unsicherheit des aus der Elektrolyse folgenden.

Die vorstehende Berechnung aus Virialsatz und Boltzmann's Theorie ist nicht unabhängig von derjenigen aus der Dissociationswärme nach der Gleichung $W = N\varepsilon^2 \frac{1}{r}$. Denn hieraus und aus dem Virialsatz in der Form $3p = N\varepsilon^2 \frac{1}{r}$ würde sich ergeben $W = 3p$, welche Bedingung aber nicht erfüllt ist. Vielmehr ist die Bedingung der Stabilität der Molekeln, wie ich an anderem Orte nachgewiesen habe,[1]) dass W gross sei gegen p und zwar so, dass $e^{\frac{W}{p}}$ gross ist gegen 1. Die Stabilitätsbedingung ist, wie a. a. O. gezeigt, in der That erfüllt, da $\frac{W}{p}$ für $N_2 O_4$ gleich 25, für J_2 gleich 53, für H_2 gleich 478 ist. Unser jetziger Widerspruch gegen diese allgemein gültige und erfüllte Stabilitätsbedingung rührt davon her, dass wir zur Vereinfachung die Atome als Massenpunkte betrachteten und zwischen ihnen eine Kraft angenommen haben, welche einer Potenz der Entfernung proportional ist; dies ist, wie a. a. O. p. 477 nachgewiesen, unzulässig. Molekeln, deren Atome durch eine Newton'sche Kraft verbundene Massenpunkte wären, sind nicht stabil; eine einfache Rechnung, welche der a. a. O. p. 483 ff. analog ist, ergibt für solche Molekeln zwei Zustände, die an Wahrscheinlichkeit allen anderen weit überlegen sind: Entweder fallen die Atome dauernd in einen Punkt zusammen, oder sie sind soweit von einander entfernt, dass sie keine Kräfte auf einander ausüben, was der Dissociation entspricht.

Trotzdem kommt der Widerspruch für uns, bei der Berechnung des Elementarquantums ε nicht in Betracht, weil die Bedingung $e^{\frac{W}{p}}$ gross gegen 1 schon durch mässige

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 490 ff., 1893.

Werthe von $\frac{W}{p}$ erfüllt ist, und die Unsicherheit in unseren Berechnungen so gross ist, dass ihre Grenzen noch weit mehr verschiedene Werthe einschliessen. Von „Uebereinstimmung" kann von vornherein keine Rede sein, sondern nur von „Nichtwidersprechen".

VII. Vergleich mit den Lichtschwingungen.

Halten wir weiterhin wie bisher an der Annahme fest, dass wir die Atome als Punkte ansehen dürfen, welche im gasförmigen Zustande frei um einander beweglich sind. Ist dann nur die elektrostatische Kraft zwischen derselben wirksam, so kann die Dauer eines Umlaufs um den gemeinsamen Schwerpunkt aus der Gleichung angegeben werden, welche für die Planetenbewegung das 3. Keppler'sche Gesetz liefert; dabei werde angenommen, dass die beiden Atome der Molekel nur durch eine Valenz verbunden seien.

Wenn zwei Massenpunkte m_1 und m_2 unter dem Einflusse der Gravitationskraft

$$f(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

sich bewegen, so ist das 3. Keppler'sche Gesetz

$$\frac{4\pi^2 A_1^3}{T^2} = \frac{G m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

wo A_1 die grosse Halbaxe der Bahnellipse von m_1; T die Umlaufzeit ist.

Die elektrostatische Kraft ist $f(r) = \frac{\varepsilon^2}{r^2}$; also ist zu setzen $G m_1 m_2 = \varepsilon^2$; führen wir ferner die ganze grosse Axe $\mathfrak{A}_1 = 2 A_1$ ein, so wird

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m_1}{2}}\sqrt{\mathfrak{A}_1^3}\,\frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

Nehmen wir die beiden Atome als gleich an, so ist $m_1 = m_2 = m$, und auch der Index von $\mathfrak{A}_1$ fällt weg, da die beiden Bahnellipsen gleich werden; also

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon} \sqrt{2\,m} \sqrt{\mathfrak{A}^3}$$

Bilden wir nun die Mittelwerthe über alle Molekeln in einem endlichen Volumen, so kann nach denselben Ueberlegungen, wie sie auf Seite 23 angestellt wurden, ohne Fehler in der Grössenordnung für die grosse Axe $\mathfrak{A}$ der Durchmesser einer Molekel gesetzt werden $\approx 10^{-8}$ cm. Der kleinste Werth für T ergibt sich bei Wasserstoff, wo $2\,m$, die Masse einer Molekel, den kleinsten Werth hat. Die Dichtigkeit des Wasserstoffs zu $895 \cdot 10^{-7}$ und die Zahl der Molekeln in 1 ccm zu 10^{20} angenommen, wird $2\,m \approx 89{,}5 \cdot 10^{-24}$. Für Wasserstoff wird daher

$$T \approx 23 \cdot 10^{-15} \text{ sec}$$

Stillschweigende Voraussetzung bei der Berechnung der mittleren Umlaufszeit T ist, dass die Zusammenstösse der Molekeln unter einander nicht so häufig stattfinden, dass eine regelmässige Centralbewegung der Atome um einander gar nicht zu Stande kommt. Jene Voraussetzung ist aber, wie die kinetische Gastheorie zeigt, erfüllt. Die grösste Stosszahl gilt für Wasserstoff, nämlich $95 \cdot 10^8$ in der Secunde;[1]) mithin die Zeit zwischen 2 Zusammenstössen $105 \cdot 10^{-12}$ sec. Also kommen bei Wasserstoff rund 4000 Umläufe der Atome um einander auf die Zeit zwischen 2 Zusammenstössen.

„Wenn nun eine positive und eine negative Ladung mit den beiden Atomen einer Molekel verbunden, sich um einander drehen, so ist ein solches System offenbar äquivalent einer elektrischen Schwingung. Von dem rotirenden Atompaar werden daher auch, wie von einer Hertz'schen Schwingung,

1) O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, p. 142.

elektrodynamische Wellen ausgestrahlt, und bei hinreichender Schnelligkeit müssten dieselben vom Auge als Licht wahrgenommen werden. Da nun aber die Gase bei 0^0 nicht leuchten, muss die Schwingungsdauer jener elektrodynamischen Wellen grösser sein als die der langsamsten Lichtwellen. Für die äussersten rothen Wellen ist die Schwingungsdauer rund

$$\tau = 25 \cdot 10^{-16} \text{ sec}$$

Die Schwingungsdauer der elektrodynamischen Welle, welche die rotirende Molekel ausstrahlt, ist gleich der Umlaufszeit T; und, wie verlangt, ist der kleinste Werth für diese, wie er bei Wasserstoff sich ergibt, grösser als τ. Der Werth für T bei Wasserstoff ist aber nur 10 mal grösser als τ, und vielleicht dürfen wir daraus vermuthen, dass unter Umständen doch die betrachtete elektrodynamische Welle in den Bereich der Lichtwellen eingreift. Da nun T nur der Mittelwerth der verschiedenen bei verschiedenen Molekeln gleichzeitig vorhandenen Umlaufszeiten ist, so würde das Gas bei einer gegen die normale beschleunigten Umlaufszeit in der angegebenen Weise ein continuirliches Spectrum aussenden; vielleicht trägt die so erzeugte Strahlung mit bei zur Bildung des continuirlichen Hintergrundes im Spectrum der Gase, welchen auch Herr H. Kayser der „ungeordneten", also der Wärmebewegung der Atome zuschreibt.[1]) Wie dem aber auch sei, es würde auch jede andere hinreichend schnelle periodische Bewegung der Valenzladungen zu Lichtstrahlung Anlass geben; sei es, dass die Atome sammt ihren Ladungen als Ganzes oscilliren, wie dies wohl bei festen Körpern und den ein Bandenspectrum liefernden Gasen der Fall sein dürfte; sei es, dass die Schwingungen innerhalb der einzelnen Atome vor sich gehen, wie bei den ein Linienspectrum liefernden Gasen." Zu dieser Stelle aus meiner vorläufigen Mittheilung

1) H. Kayser, Lehrbuch der Spectralanalyse, p. 98.

vom 26. Januar 1891 habe ich nachzutragen, dass die Ansicht, der continuirliche Hintergrund der Gasspectra rühre von den Rotationen der Molekeln her, zuerst von Herrn Eilhard Wiedemann ausgesprochen ist;[1]) in derselben Arbeit führt Herr E. Wiedemann die continuirlichen Spectra bei glühenden festen Körpern oder Flüssigkeiten auf unfreie Schwingungen zurück; ferner wie schon früher Herr v. Helmholtz[2]) die Bandenspectren auf freie Schwingungen der Atome im Molekularverband unter dem Einflusse der gegenseitigen Kräfte der Atome, die Linienspectren auf freie Schwingungen der Aetherhüllen isolirter Atome.

Bezüglich der Energie, welche die in der Molekel oder im Atom oscillirenden Valenzladungen als Hertz'sche Schwingung ausstrahlen können, hat Herr H. Ebert nachgewiesen,[3]) dass dieselbe nicht im Widerspruch steht mit der von Herrn Eilhard Wiedemann gefundenen Strahlungsenergie eines Natriumatoms.[4]) Auch Herr G. J. Stoney schreibt das Leuchten den Bewegungen der Valenzladungen zu[5]) und discutirt die Strahlung, welche durch Oscillationen unter dem Einflusse elastischer Kräfte hervorgerufen wird.

VIII. Molekularer Magnetismus.

Wenn eine Valenzladung infolge der Wärmebewegung eine kreisförmige oder ähnlich gestaltete, eine Fläche umschliessende Bahn beschreibt, so wird sie nach aussen elektromagnetische Wirkung ausüben. Bei einer Bewegung wie bei dem bisher betrachteten Umlauf zweier als Punkte ge-

1) Eilh. Wiedemann, Wied. Ann. 5, p. 509, 1878; s. auch 10, p. 252, 1880.

2) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 160, p. 182, 1877.

3) H. Ebert, Arch. de Genève (3) 25, p. 489, 15. Mai 1891; Wied. Ann. 49, p. 651, 1893.

4) Eilh. Wiedemann, Wiedem. Ann. 37, p. 177, 1889.

5) G. J. Stoney, Trans. Roy. Dublin Soc. 4, (2), p. 563, 1891.

dachter Atome von gleicher Masse um einander, müssen sich aber schon die elektromagnetischen Wirkungen der beiden Atome einer Molekel aufheben. Zunächst ist dies nicht mehr der Fall, wenn die beiden Atome der Molekel verschiedene Masse haben; dann wird die elektromagnetische Wirkung der mit dem leichteren Atom verbundenen Ladung wegen der grösseren von der Bahn umschlossenen Fläche überwiegen. Denken wir uns aber weiterhin das Atom als räumlich ausgedehnt, so sind auch noch andere rotationelle Bewegungen der Valenzladungen mit oder im Atom denkbar, deren magnetische Gesammtwirkung für eine Molekel sich nicht aufhebt.[1]) Endlich können wir uns bei festen Körpern und Flüssigkeiten die Atome einzeln und ihre Bewegung von einander unabhängig ausführend vorstellen, sodass wir uns als Grenzfall alle positiv geladenen Atome im einen Sinne, alle negativ geladenen Atome im entgegengesetzten Sinne rotirend, und alle Rotationsaxen parallel denken können, sodass sich in diesem Fall die magnetische Wirkung aller rotirenden Valenzladungen addiren würde. Hiedurch kommt man dazu, die Zulässigkeit dieser Erklärung des molekularen Magnetismus dadurch zu prüfen, dass man eine annähernde Berechnung für den maximalen specifischen Magnetismus bei Sättigung ausführen kann.

Diese Vorstellungen knüpfen sich von selbst an die Betrachtung der mit oder im Atom bewegten Valenzladungen an. Nachdem ich dieselben bereits seit längerer Zeit wiederholt gesprächsweise geäussert und die im Folgenden mitgetheilte Rechnung durchgeführt hatte, fand ich kürzlich im XI. Abschnitt des 2. Bandes der mechanischen Wärmetheorie

1) Schon bei einer aus 2 gleichen, räumlich ausgedehnten, Atomen bestehenden Gasmolekel zwingt die Verschiedenheit der Anziehung der ponderablen Masse für die beiden Arten der Elektricität zu der Folgerung einer unsymmetrischen Lagerung der $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$, woraus dann bei Rotation eine magnetische Gesammtwirkung resultirt.

von Clausius,[1]) dass schon Wilhelm Weber sich von den Ampère'schen Molekularströmen die Anschauung gebildet hatte, dass dieselben in kreisförmiger Bewegung eines positiven Elektricitätstheilchens um einen negativ elektrischen Kern bestehe,[2]) ohne dass jedoch Weber diese Elektricitätstheilchen mit den Jonenladungen identificirte.

Eine in Kreisbahn sich bewegende Elektricitätsmenge e kann bezüglich ihrer elektromagnetischen Wirkung als Kreisstrom aufgefasst werden. Als Stromintensität i ist dann einzuführen der Quotient aus Elektricitätsmenge, welche in einer Zeit T einen Punkt der Kreisperipherie passirt, dividirt durch T. In der dualistischen Theorie passiren beim Strom gleiche positive und negative Mengen in entgegengesetzter Richtung den Querschnitt. Bewegte Elektricität von einer Art allein repräsentirt in der elektrodynamischen Wirkung also nur die halbe Stromintensität.

Bewegt sich demnach eine Elektricitätsmenge e auf der Peripherie eines Kreises mit einer Umlaufszeit T, so ist sie elektromagnetisch äquivalent der Stromintensität $i = \frac{e}{2\,T}$.

Eine Valenzladung elektrostatisch gemessen ist annähernd $\varepsilon \approx 129 \cdot 10^{-12}$; also elektromagnetisch gemessen $\approx 43 \cdot 10^{-22}$. Eisen gilt als 4 werthig; die 4 Valenzstellen eines Eisenatoms als von gleicher Ladung vorausgesetzt würde also das obige $e \approx 172 \cdot 10^{-22}$ elektromagnetischen C. G. S.-Einheiten sein, wenn man sich alle 4 Ladungen in beliebiger Weise auf der Peripherie desselben Kreises, denselben in gleichem Sinne durchlaufend denkt.

Ein Kreisstrom von der Intensität i, welcher eine Fläche q umströmt, ist äquivalent einem Magneten vom Momente

$$\mathfrak{M} = i\,q$$

1) Clausius, mechan. Wärmetheorie II, p. 341/342, 1879.

2) Wilh. Weber, elektrodynam. Maassbest., Leipzig 1871, p. 41.

Nehmen wir den Kreisstrom von molekularen Dimensionen, so können wir setzen $q \approx \delta^2$, wo δ die Kante des einem Eisenatom zukommenden Elementarwürfels ist. Hiefür erhalten wir folgenden angenäherten Werth.

Eine Molekel H_2 hat eine Masse von etwa $9 \cdot 10^{-25}$ g (siehe Seite 30). Ein Eisenatom $Fe = 56\,H = 28\,H_2$ also $25 \cdot 10^{-24}$ g. Das specifische Volumen des Eisens ist 1 ccm : 7,7 g. Daraus folgt das Volumen des einem Eisenatom zukommenden Elementarwürfels $33 \cdot 10^{-25}$ ccm, und die Kante desselben δ gleich $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm. Mithin $q \approx \delta^2 \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16}$ cm².

Für das magnetische Moment eines Eisenatoms finden wir also die Annäherung:

$$\mathfrak{M} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16} \cdot i \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16} \cdot \frac{e}{2\,T}$$

und indem wir für e den obigen Wert einführen

$$\mathfrak{M} \approx \frac{2 \cdot 10^{-36}}{T}$$

Zu einer Schätzung der Grössenordnung der Umlaufszeit T können wir auf zwei Wegen gelangen. Erstens ist wie im vorigen Abschnitt daran zu erinnern, dass die rotirenden Valenzladungen elektrodynamische Wellen aussenden müssen. Wenn dieselben nicht als Licht empfunden werden sollen, so muss ihre Periode länger als die der längsten rothen Wellen sein; wir erhalten also

$$T > 3 \cdot 10^{-15}\,\text{sec}$$

Zweitens soll als Grenzfall angenommen werden, die ponderable Masse des Eisenatoms sei mit der elektrischen Ladung desselben in einem Punkte vereinigt. Nach der kinetischen Theorie der Materie ist die mittlere lebendige Kraft eines Atoms bei gegebener Temperatur für alle Substanzen dieselbe. Gehen wir aus von einem einatomigen

Gase (etwa Hg), so ist die gesammte lebendige Kraft in 1 ccm bei 0° und Atmosphärendruck

$$A = \tfrac{3}{2} p = \tfrac{3}{2} \cdot 1{,}01 \cdot 10^6 \text{ C. G. S.}$$

Division durch 10^{20} ergibt also für ein Atom beliebiger Substanz und Aggregatzustandes L die gesammte lebendige Kraft $\approx 1{,}52 \cdot 10^{-14}$. Nenne die Masse eines Eisenatoms m, die constante Geschwindigkeit, mit welcher es die kreisförmige Bahn vom Durchmesser d durchläuft, u, so wird

$$L = \frac{m}{2} u^2; \; T = \frac{d\pi}{u} = d\pi \sqrt{\frac{m}{2L}}$$

Nehme $d \approx 10^{-8}$ cm; $m \approx 25 \cdot 10^{-24}$; $L \approx 1{,}52 \cdot 10^{-14}$ so folgt

$$T \approx 1{,}3 \cdot 10^{-12} \text{ sec}$$

Nun bewegt sich aber gewiss nicht die ganze ponderable Masse des Atoms auf der Oberfläche des ihm zukommenden Raumes, sondern befindet sich grösstentheils mehr central; damit derselbe Werth der lebendigen Kraft erreicht wird, muss also die Umdrehungsgeschwindigkeit grösser sein, und es sollte sein

$$T < 10^{-12} \text{ sec}$$

Schätzen wir nach diesen beiden Grenzwerthen etwa

$$T \approx 10^{-14} \text{ sec}$$

Herr H. E. J. G. Du Bois hat mir mitgetheilt, dass er in einer noch nicht publicirten Berechnung auf Grund der von Maxwell (Treatise Cap. 21) umgearbeiteten Lord Kelvin'schen Wirbeltheorie versucht habe, aus der magneto-optischen Drehung in ferromagnetischen Metallen (Kundt'sches Phänomen) einen Anhaltspunkt zu gewinnen für die Periode jener Wirbel. Nach den vorliegenden Daten gelange er zu dem Schlusse, dass in etwa halb-„gesättigtem" Eisen die

Wirbel eine Frequenz von 5 Billionen pro Secunde haben, also etwa der hundertste Theil derjenigen des Natronlichtes. Die Rechnung führe zu einer Schlussformel für die Periode, welche folgendermassen lautet:

$$T = 2{,}5 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{M}$$

wo M der maximale specifische Magnetismus ist.

Einmal stimmt der Bau dieser Gleichung mit der unsrigen überein; setzen wir zweitens den Werth für Eisen $M = 220$ (s. unten) ein, so wird bei voller Sättigung ungefähr

$$T = 10^{-13} \text{ sec}$$

Dieser Werth liegt innerhalb der sehr weiten Grenzen der Unsicherheit unseres oben gewählten Werthes.[1])

Führen wir in die Gleichung $\mathfrak{M} \approx \frac{2 \cdot 10^{-36}}{T}$ den Werth $T \approx 10^{-14}$ ein, so wird $\mathfrak{M} \approx 2 \cdot 10^{-22}$.

Will man zu endlichen Massen übergehen, so kann man annehmen, dass bei Sättigung alle positiven Valenzladungen um parallele Axen in demselben Sinne, alle negativen im entgegengesetzten Sinne rotiren. Dann muss das maximale magnetische Moment von 1 g Eisen, also der specifische Magnetismus bei Sättigung, gleich werden

$$M = \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M}$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Atome in 1 g Eisen ist.

---

1) Wenn wir wieder daran denken, dass die periodische Bewegung der Valenzladungen zu elektrodynamischer Strahlung Anlass gibt, wie eine Hertz'sche Schwingung, so steht die Grössenordnung der Umlaufszeit ebenfalls in Einklang mit dem von Herrn Willy Wien abgeleiteten Resultate, dass die Periode der in der Wärmestrahlung fester Körper vorkommenden Schwingungen klein sein muss gegen diejenigen, welche von Drahtnetzen vollständig zurückgeworfen werden. (Wied. Ann. 49, p. 633, 1893.)

Aus $m \approx 25 \cdot 10^{-24}$ folgt $\mathfrak{N} \approx 4 \cdot 10^{22}$. Also wird

$$M \approx 8 \text{ C. G. S.-Einheiten}$$

Der experimentell gefundene specifische Magnetismus bei Sättigung beträgt[1])

bei Eisen	220	C. G. S.
bei Kobalt	150	„
bei Nickel	60	„

In Anbetracht der überaus grossen Unsicherheit der Berechnung von M muss man den berechneten und die direct bestimmten Werthe als innerhalb der Grössenordnung übereinstimmend bezeichnen. Der Versuch, den vor der Richtung der Elementarmagnete praeexistirenden molekularen Magnetismus auf Rotation der Valenzladungen zurückzuführen, scheint demnach zulässig zu sein.

Weitere Controlberechnungen der Helmholtz'schen elektrochemischen Theorie hat inzwischen Herr A. P. Chattock ausgeführt.[2]) In seiner ersten Mittheilung berechnet er aus den Erscheinungen beim Ausströmen der Elektricität aus Spitzen das Elementarquantum für die Atome des Gases. In der zweiten nimmt er an, dass die auch von älteren Theorieen der Dielectrica vorausgesetzten, in dasselbe eingebetteten Elektricitätstheilchen eben die Valenzladungen sind. Diese „elektrolytische Theorie der Dielectrica" wendet Herr Chattock an auf die Messungen der Piezo-Elektricität der Herren J. und P. Curie und Mallock, der Pyro-Elektricität von Herrn Riecke, der Cohäsion, der Dielektricitäts-Constante, der Elektro-Striction, und findet stets Werthe für das Elementarquantum,

1) H. E. J. G. Du Bois, Phil. Mag. [5], 29, p. 293, 1890.

2) A. P. Chattock, Phil. Mag. (5), 32, p. 285, 1891; 34, p. 461, 1892; 35, p. 76, 1893.

die dem elektrolytischen nahe stehen. Auch Herr J. J. Thomson hat in mehreren neueren Arbeiten (siehe Citat p. 8) aus der Quantität der Jonenladungen mit Erfolg Schlüsse gezogen zur Erklärung verschiedener Phänomene, insbesondere auch des von Robert von Helmholtz gefundenen und von ihm und anderen untersuchten Dampfstrahlphänomens.

Zum Schlusse möchte ich mich nochmals im Voraus gegen die Auffassung verwahren, als ob ich mich der Täuschung hingäbe, irgend eine der entwickelten Berechnungen könne als positiv für die elektrochemische Theorie beweisend angesehen werden. Schon auf Seite 26 habe ich darauf hingewiesen, dass neben den elektrischen Kräften der Valenzladungen noch andere von derselben Grössenordnung existiren können, ohne dass unsere Gleichungen bei ihrer grossen Unsicherheit einen Widerspruch erkennen lassen würden. Wohl aber darf man behaupten, dass man bei Annahme der Helmholtz'schen Theorie eine Reihe von Erscheinungen unter gemeinsamem Gesichtspunkt auffassen kann, und bei der berechnenden Verfolgung, soweit dieselbe möglich ist, nicht in Widerspruch tritt mit der Erfahrung.

Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung.

Von Karl Döhlemann in München.

(Eingelaufen 13. Januar.)

1. Unter Voraussetzung des Begriffes der Projectivität kann man sich kaum eine einfachere Methode denken, den Raum geometrisch anschaulich eindeutig auf sich selbst zu beziehen als folgende: In dem einen Raum (X-Raum) seien 3 Gerade a_1, a_2, a_3 beliebig und in allgemeiner Lage angenommen, ebenso im andern, Y-Raum. Jede dieser 6 Geraden soll Träger eines Ebenenbüschels sein und zwar seien die Ebenenbüschel a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 je zu einander projectiv. Irgend ein Punkt im X-Raum, P_x, ist dann Schnittpunkt dreier Ebenen durch a_1, a_2, a_3; diesen entsprechen vermöge der projectiven Beziehungen drei Ebenen durch b_1, b_2, b_3, welche sich in dem entsprechenden Punkt P_y schneiden.

Lässt man P_x auf einer beliebigen Geraden g fortrücken, so bezieht P_x dabei die Büschel a_1, a_2, a_3 projectiv aufeinander. Es werden also auch die Büschel b_1, b_2, b_3 projectiv aufeinander bezogen und diese erzeugen als der Geraden entsprechendes Gebilde eine Raumkurve 3. Ordnung, welche den Hyperboloiden aus den Achsen b_1, b_2 bezw. b_1, b_3 und b_2, b_3 gemein ist.

Daraus folgt dann sofort, dass das einer Ebene im einen Raum im andern Raume entsprechende Gebilde eine Fläche

3. Ordnung ist: denn diess Gebilde hat mit einer beliebigen Geraden drei Schnittpunkte gemein.

2. Die singulären Elemente der Transformation erhalten wir durch besondere Annahmen für den Punkt P_x. Zunächst springen als solche die 6 Geraden $a_1, \ldots . b_3$ in die Augen. Wählen wir einen Punkt auf a_1, so geht durch ihn und a_2 bezw. a_3 noch je eine Ebene, während die durch a_1 gehende Ebene unbestimmt wird. Den beiden genannten Ebenen entsprechen gewisse Ebenen durch b_2 und b_3 und da die 3. Ebene ganz willkürlich, so entspricht also dem Punkte auf a_1 eine Gerade. Rückt der Punkt auf a_1 fort, so erzeugen die projectiven Büschel b_2 und b_3 eine Regelschaar 2. Ordnung, die wir kurz als das Hyperboloid $(b_2 b_3)$ bezeichnen wollen. Den Punkten der Geraden a_1 entsprechen die Erzeugenden dieses Hyperboloides und zwar diejenigen, welche nicht zur Schaar b_2, b_3 gehören.

Ganz ebenso geben die Geraden a_2 und a_3 zu 2 Hyperboloiden $(b_1 b_3)$ und $(b_1 b_2)$ Veranlassung, während im X-Raume als singuläre Flächen die Hyperboloide $(a_1 a_2)$ $(a_1 a_3)$ $(a_2 a_3)$ erscheinen.

Weiter spielen noch eine besondere Rolle die durch a_1, a_2, a_3, sowie b_1, b_2, b_3 bestimmten Regelschaaren. Wählt man nämlich eine Gerade g, welche a_1, a_2 und a_3 schneidet, so entspricht jedem Punkt dieser Geraden der gleiche Punkt im Y-Raum, da die Ebenen ja die nämlichen bleiben, welche g mit a_1, a_2 und a_3 bestimmt. Lässt man jetzt g die Regelschaar $(a_1 a_2 a_3)$ durchlaufen, so werden dadurch die Büschel a_1, a_2, a_3 aufeinander projectiv bezogen, das gleiche gilt also auch von den Büscheln b_1, b_2, b_3. Die den Geraden g entsprechenden Punkte liegen demnach auf einer Raumkurve 3. Ordnung R_b und es ist weiter klar, dass diese der gemeinsame Schnitt der oben genannten Hyperboloide $(b_1 b_2)$ $(b_1 b_3)$ $(b_2 b_3)$ sein muss. Ganz ebenso wird sich im Raume der X eine Raumkurve 3. Ordnung R_a ergeben, deren Punkte den

Geraden entsprechen, welche b_1, b_2 und b_3 gleichzeitig begegnen.

Das System der Fundamental-Flächen besteht also z. B. im X-Raume aus:

Dem Hyperboloid $(a_1 a_2)$, dem Hyperboloid $(a_1 a_3)$, dem Hyperboloid $(a_2 a_3)$, dem Hyperboloid $(a_1 a_2 a_3)$.

Dazu kommen als Fundamental-Kurven:

Die Geraden a_1, a_2, a_3 und die Raumkurve R_a, der Schnitt der 3 zuerst genannten Hyperboloide.

Es folgt dann leicht:

„Einer Ebene z. B. im X-Raume entspricht im Y-Raume eine Fläche 3. Ordnung, welche durch R_b, b_1, b_2 und b_3 hindurchgeht."

Diese Fläche ist auf die Ebene eindeutig abgebildet und aus der Betrachtung dieser Abbildung ergibt sich in der bekannten Weise, dass die Fläche 27 Gerade enthält.

3. Die analytische Darstellung dieser Transformation gestaltet sich wie folgt: Sind die Ebenenbüschel a_1, a_2, a_3 bezüglich gegeben durch

$$1)\qquad \begin{aligned} a_x - \lambda b_x &= o \\ A_x - \mu B_x &= o \\ A_x - \nu B_x &= o \end{aligned}$$

wo $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$ etc. und sind die dazu projectiven Büschel b_1, b_2, b_3 bezüglich

$$2)\qquad \begin{aligned} a'_y - \lambda b'_y &= o \\ A'_y - \mu B'_y &= o \\ A'_y - \nu B'_y &= o \end{aligned}$$

so werden die Gleichungen der Transformation

$$3)\qquad \begin{aligned} a_x b'_y - b_x a'_y &= o \\ A_x B'_y - B_x A'_y &= o \\ A_x B'_y - B_x A'_y &= o \end{aligned}$$

Diess sind 3 in den x und y lineare Gleichungen, allerdings von specieller Form. Nimmt man 3 bilineare Gleichungen der allgemeinen Form

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = o \quad \begin{Bmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{Bmatrix}$$

so erhält man durch dieselben die allgemeine birationale Transformation 3. Ordnung dieser Art, welche Nöther[1]) und Cayley[2]) fast gleichzeitig behandelt haben. Bei dieser tritt in jedem Raum als Fundamentalfläche eine Fläche 8. Ordnung auf und auf ihr als 3 fache Kurve eine Raumkurve 6. Ordnung. In unserm Falle ist diese Fläche 8. Ordnung in 4 Hyperboloide zerfallen, die Raumkurve 6. Ordnung dagegen besteht aus den 3 Geraden und der Raumkurve 3. Ordnung. Dieser geometrisch nicht uninteressante Fall findet in den citierten Arbeiten keine Erwähnung.

4. Die bilinearen Gleichungen 3) kann man mit Rücksicht auf ihre specielle Form als „zweiteilig" bezeichnen; die allgemeine Transformation dieser Art lässt sich nicht auf diese Form bringen. Betrachten wir, des Zusammenhanges wegen, einen Moment die allgemeine quadratische Transformation der Ebene, so ist bekannt, dass diese dargestellt werden kann durch das System 2 bilinearer Gleichungen

$$4) \quad \begin{matrix} \Sigma a_{ik} x_i y_k = o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k = o \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{Bmatrix}$$

Eine solche bilineare Form $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ lässt sich nun als „zweiteilige" schreiben immer und nur, wenn die Determinante der Form $|a_{ik}| = o$, wie diess London[3]) zeigt. Trotzdem lässt sich die allgemeine quadratische Transformation der Ebene noch durch zwei zweiteilige Gleichungen

1) Mathematische Annalen Bd. 3, 1871, pag. 547.
2) Proceedings of the London Mathem. Society, Vol. III, 1870.
3) Mathematische Annalen Bd. 38, 1891.

darstellen. Denn die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$, welche eine reciproke Beziehung der Ebene vorstellt, wird erfüllt durch ∞^3 Punktpaare (x, y).

Hat man 2 solche Gleichungen wie in 4), so gibt es noch ∞^2 Punktepaare (x, y), welche bei den Gleichungen genügen und diess sind eben die Punktepaare der quadratischen Transformation. Darauf beruht auch die Erzeugung dieser Transformation, welche Hirst gegeben hat. Betrachtet man jetzt weiter die Schaar

$$5) \qquad \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \cdot \Sigma b_{ik} x_i y_k = o$$

so stellt diese für jeden Wert von λ zwar eine andere Reciprocität vor, die Punktpaare der quadratischen Transformation jedoch gehören immer dieser Reciprocität an. Man kann dann die quadratische Transformation auch durch irgend 2 andere Reciprocitäten der Schaar 5) erzeugen und kann als solche 2 mit verschwindender Determinante herausgreifen. Denn die Determinante von 5) liefert eine Gleichung 3. Grades in λ. Eine solche Reciprocität ist aber dann als zweiteilige Form zu schreiben und diese kann wieder als Resultat der Elimination des Parameters aus projectiven Strahlbüscheln erhalten werden. So entsprechen also den 3 Wurzeln der kubischen Gleichung die 3 Fundamentalpunkte, welche die quadratische Transformation in jeder Ebene besitzt.

5. Anders verhält es sich im quaternären Gebiet. Verschwindet die Determinante $|a_{ik}|$ einer bilinearen Form von 4 homogenen Variabeln x und y,

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$$

so genügt diess blos dazu, um die Form als eine dreiteilige schreiben zu können. Denn ist

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x)$$

so besagt das Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$, dass eine lineare Relation besteht

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + k_4 f_4 = o$$

und wenn man diese benutzt, um f_4 durch f_1, f_2, f_3 auszudrücken, so wird

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = f_1\left(y_1 - \frac{k_1}{k_4} y_4\right) + f_2\left(y_2 - \frac{k_2}{k_4} y_4\right) + f_3\left(y_3 - \frac{k_3}{k_4} y_4\right)$$

Damit ist $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ als dreiteilige Form geschrieben.

Hat man jetzt 3 bilineare Formen allgemeiner Art

$$6) \qquad \begin{aligned} \Sigma a_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma c_{ik} x_i y_k &= o \end{aligned}$$

so wird jede einzelne derselben durch ∞^5 Punktpaare (x, y) befriedigt, die ∞^3 Punktpaare der durch 6 dargestellten Transformation jedoch sind diejenigen Punktpaare, welche den 3 Gleichungen genügen. Bildet man jetzt das System

$$7) \quad \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i y_k + \mu \Sigma c_{ik} x_i y_k = o$$

so enthält jede in ihm enthaltene Reciprocität die Punktpaare der Transformation. Die Bedingung, dass die Determinante vor 7) verschwinde, gibt eine Gleichung 4. Grades in λ und μ. Man kann also die Transformation 6) auch durch 3 dreiteilige Gleichungen darstellen.

Soll dagegen die Transformation durch 3 zweiteilige Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden können, so ist dazu für jede der 3 bilinearen Formen ausser dem Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ auch noch das Nullwerden der Unterdeterminanten 3. Ordnung notwendig und hinreichend.

Nahe liegt hier die Frage nach dem durch 2 bilineare Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma a_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k &= o \end{aligned}$$

dargestellten Gebilde. Offenbar gibt es noch ∞^4 Punktpaare, welche beiden Gleichungen genügen. Hält man z. B. x in

beiden Gleichungen fest, so erhält man 2 Ebenen, deren Schnittlinie der Ort der Punkte y ist, die dem Punkte x entsprechen. Alle auf diese Weise zu erhaltenden Geraden bilden einen Complex. Dadurch, dass die Ebenen einander entsprechen, welche in den beiden Reciprocitäten zu gleichen Werten von x (oder y) gehören, wird aber der Raum collinear auf sich bezogen und es folgt somit, dass der in Rede stehende Complex der Reye'sche oder tetraedrale, der ja durch 2 collineare Räume als Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen erzeugt wird. (Schröter's Complex der Wechselstrahlen.)

Die Gleichung des Complexes in den Plücker'schen Geradencoordinaten erhält man dadurch, dass man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{i1} y_i & \Sigma a_{i2} y_i & \Sigma a_{i3} y_i & \Sigma a_{i4} y_i \\ \Sigma a_{i1} y_i' & \Sigma a_{i2} y_i' & \Sigma a_{i3} y_i' & \Sigma a_{i4} y_i' \\ \Sigma b_{i1} y_i & \Sigma b_{i2} y_i & \Sigma b_{i3} y_i & \Sigma b_{i4} y_i \\ \Sigma b_{i1} y_i' & \Sigma b_{i2} y_i' & \Sigma b_{i3} y_i' & \Sigma b_{i4} y_i' \end{vmatrix} \quad \{i = 1, 2, 3, 4\}$$

nach quadratischen Unterdeterminanten entwickelt.

Der ganzen Schaar

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i y_k = o$$

dient dieser Complex sozusagen als Basis. — Hat man allgemeiner 2 Gleichungen

$$f(x^m y^n) = o$$
$$\varphi(x^\mu y^\nu) = o$$

so stellen diese, insofern auch wieder einem Punkte x eine gewisse Kurve von der Ordnung $(n\,\nu)$ entspricht, ein ∞^3 faches System von Kurven vor, also einen allgemeinern Complex.

6. Kehren wir jetzt noch einen Moment zurück zu unserer speciellen Transformation 3. Ordnung. Wir hatten von Anfang an angenommen, es sei Büschel a_1 projectiv Büschel b_1, a_2 projectiv b_2 und ebenso a_3 und b_3. Diese

Projectivität kommt geometrisch zum Ausdruck dadurch, dass a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 je ein Hyperboloid erzeugen. Im allgemeinen haben diese 3 Flächen 8 Punkte gemein und diess sind die einzigen sich selbst entsprechenden Punkte der Transformation. Auch bei der allgemeinern Nöther-Cayley'schen Transformation hat man 8 solche Coincidenzpunkte. Man kann nun aber die erwähnten 3 Hyperboloide auch in specieller Lagenbeziehung annehmen. Von den verschiedenen möglichen Fällen sei nur der erwähnt, wo die 3 Hyperboloide eine Raumkurve 3. Ordnung R^3 gemein haben. Diess kommt darauf hinaus, dass man die 6 Achsen $a_1, \ldots . b_3$ als Secanten einer R^3 wählt und je 2 Ebenenbüschel wie a_1 und b_1 perspectiv zur R^3 nimmt, sodass stets entsprechende Ebenen der Büschel auf dieser Kurve sich begegnen. Dann besteht die ganze R^3 aus Coincidenzpunkten der Transformation, dieselbe entspricht sich Punkt für Punkt selbst. Diese Transformation stellt das Analogon vor zu der quadratischen Transformation der Ebene mit einem festen Kegelschnitt.[1])

Wendet man unter Festhaltung der R^3 diese Transformation wiederholt an, so erhält man Transformationen in der Ordnung 3^λ, welche alle diese R^3 als „feste" Kurve enthalten.

Es drängt sich hier die Vermutung auf, dass man statt der R^3 überhaupt eine Raumkurve von beliebiger Ordnung n benützen kann, sofern man nur 6 $(n-1)$ fache Secanten derselben zur Verfügung hat, um dieselben als Gerade $a_1, \ldots . b_3$ zu benützen. 6 solche $(n-1)$ fache Secanten liegen dann immer auf einer Regelfläche 2. Ordnung. Man überzeugt sich nämlich auch analytisch leicht von der Richtigkeit folgenden Satzes:

---

1) Vergleiche meine Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 39, pag. 580.

„Enthält eine Raumkurve n-Ordnung zwei $(n-1)$ fache Secanten, so liegt sie auf einer Fläche 2. Ordnung und hat die eine Regelschaar derselben überhaupt zu $(n-1)$-fachen Secanten."

Geometrisch ergibt sich der Beweis dieses Satzes unmittelbar, wenn man die zwei $(n-1)$ fachen Secanten der Raumkurve als Achsen zweier zur Raumkurve perspectiven und darum untereinander projectiven Ebenenbüschel nimmt, die dann eine Regelfläche 2. Ordnung F^2 erzeugen.

Unter dieser Voraussetzung gehören also die 6 Geraden $a_1, \ldots . b_3$ der gleichen Regelschaar F^2 an, auf welcher auch die R^n liegt. Die Hyperboloide, welche die Büschel a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 erzeugen, fallen alle drei zusammen mit F^2. Wählt man jetzt aber einen Punkt P_x auf dieser F^2, so entspricht ihm offenbar die durch ihn gehende, nicht zur Schaar der a_1 gehörige Erzeugende der Fläche F^2. Einer beliebigen Geraden g entspricht dann wieder eine Gerade, wenn man von den 2 Geraden absieht, die den Schnittpunkten der g mit der F^2 zuzuweisen sind. Man erkennt, dass die Transformation sich in diesem Falle auf eine Collineation reduciert.

Diess ist richtig, solange $n > 3$. Aber auch für $n = 3$ müssen wir dementsprechend, wenn R^3 eine „feste" Kurve sein soll, noch die ausdrückliche Voraussetzung beifügen, dass die 6 Secanten $a_1, \ldots . b_3$ der R^3 nicht einer Regelschaar angehören dürfen. Es folgt dann aber:

„Die R^3 ist die einzige Raumkurve, welche als „feste" Kurve in unserer (speciellen) Transformation auftreten kann."

Wählt man 2 der 3 Geraden in einem Raum z. B. b_1 und b_2 so, dass sie sich schneiden, so ist der Schnittpunkt derselben ein Doppelpunkt für die Fläche 3. Ordnung, welche einer Ebene im andern Raum entspricht. Auf diese Weise

kann man verschiedene Typen der Fläche 3. Ordnung durch die Transformation erhalten.

7. Sind die 3 bilinearen Gleichungen 6) allgemeiner Natur und setzt man in ihnen

$$a_{ik} = a_{ki}; \quad b_{ik} = b_{ki}; \quad c_{ik} = c_{ki}$$

so erhält man, wie Nöther l. c. pag. 556 bemerkt, die Hesse'sche Transformation, bei welcher jedem Punkte des Raumes sein conjugierter in Bezug auf ein Netz von Flächen 2. Ordnung entspricht. Denn die Gleichungen 6) lassen sich dann auffassen als die Polarebenen eines Punktes y in Bezug auf die 3 Flächen 2. Ordnung

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0; \quad \Sigma b_{ik} x_i x_k = 0; \quad \Sigma c_{ik} x_i x_k = 0$$

Diese Raumtransformation ist natürlich involutorisch. Herr Professor Bauer hat mich nun, nachdem ich ihm diese Bemerkungen vorgelegt hatte, noch auf folgende weitere Specialisierung aufmerksam gemacht. Nimmt man statt der eben genannten Flächen 2. Ordnung 3 Ebenenpaare, so beschreiben die Polarebenen eines Punktes Ebenenbüschel um die 3 Schnittlinien eines jeden solchen Paares. In der Tat verschwinden unter dieser Voraussetzung für die Fläche 2. Ordnung ja ausser der Determinante auch noch die sämmtlichen Unterdeterminanten 3. Ordnung, sodass also die Form nach dem Frühern eben als zweiteilige darstellbar wird. Natürlich ist auch diese speciellste Transformation involutorisch. Die Geraden a_1, a_2, a_3 fallen zusammen mit b_1, b_2, b_3, wie überhaupt das System der singulären Elemente in beiden Räumen zusammenrückt.

Sitzung vom 3. Februar 1894.

1. Herr C. v. Kupffer teilt die Resultate seiner Untersuchungen: „über Monorhinie und Amphirhinie" mit.

2. Herr Ad. v. Baeyer hält einen Vortrag: „über Terpenthinöl".

Die Ergebnisse sollen an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Ueber Monorhinie und Amphirhinie.

Von C. Kupffer.

(Eingelaufen 3. Februar.)

Die von Johannes Müller in seiner berühmten Monographie über die Myxinoïden als Cyclostomata zusammengefasste Gruppe der Kranioten nimmt nach ihrer gesammten Organisation jedenfalls eine sehr tiefe Stelle ein. Es fehlt ihnen jede Spur von paarigen Extremitäten und von Wirbelkörpern, wenn auch bei den erwachsenen geschlechtsreifen Petromyzonten in der bindegewebigen Scheide der Chorda dorsalis Anfänge oberer Wirbelbögen in Form unregelmässiger Knorpelstücke auftreten. Sehr eigenartig erscheint auch der Kiemenapparat. Aber diese Verhältnisse am Rumpfe sind bei der Frage, welche Stellung diesen Tieren im Systeme anzuweisen sei, von minderem Gewichte gewesen, als die Verhältnisse am Kopfe und hier namentlich der Mangel an Kiefern und die unpaarige, mit nur einer äusseren, dorsal gelegenen Oeffnung versehene Nase.

Ein Teil der Zoologen, unter diesen namentlich Ernst Häckel[1]) scheidet diese unpaarnasigen kieferlosen Kranioten (Monorhina oder Cyclostomata) ganz von den Fischen und betrachtet dieselben als Repräsentanten einer tief stehenden Seitenlinie, von welcher sich die mit den Fischen beginnende Hauptlinie der übrigen Kranioten, die als Kiefermäuler, Gnathostomen, auch als Paarnaser, Amphirhinen, bezeichnet werden, scharf absetze. — Andere Zoologen, ihnen voran Th. Huxley, gehen in der Scheidung lange nicht so weit. Huxley[2]) rechnet dieselben Tiere (Marsipobranchii) zu seiner Klasse der Fische und ist der Ansicht, dass ihnen nicht jede Spur von Kiefern fehle, sondern dass Teile ihres völlig ausgebildeten Kopfskelettes, wenn auch rudimentär, doch Teilen des Kiefergerüstes der Gnathostomen homolog seien. — Von unseren Kollegen steht Herr Kollege R. Hertwig[3]) mehr auf der Seite von Häckel, indem er in seinem Lehrbuch die Rundmäuler als besondere Klasse von der Klasse der Fische scheidet, während Herr Kollege von Zittel[4]) sich der Auffassung Huxley's anschliesst.

Ich habe mich in den letzten Jahren nach verschiedenen Seiten hin mit der Entwicklungsgeschichte einer Familie der Cyclostomen, der Petromyzonten beschäftigt und muss hervorheben, dass meine Beobachtungen der Hauptsache nach dahin auslaufen, den Abstand, der zwischen den Cyclostomen und Gnathostomen obzuwalten scheint, auszugleichen. Das gilt namentlich für die Verhältnisse am Kopfe, welchen die Hauptargumente für eine scharfe Sonderung beider Gruppen

---

1) E. Häckel, Natürliche Schöpfungsgeschichte, 8. Aufl., 1889, S. 598 ff. — Anthropogenie, 4. Aufl., 1891, S. 531 ff.

2) Th. Huxley, Journal of Anatomy and Physiology, Vol. X, 1876, p. 412.

3) R. Hertwig, Lehrbuch der Zoologie, 1. Aufl., II. Teil, S. 484.

4) K. v. Zittel, Handbuch der Palaeontologie, I. Abt., III. Bd., 1887, S. 56.

entnommen wurden. Der Kopf der Cyclostomen und Unpaarnaser ist nicht in dem Grade von dem Kopfe der Gnathostomen und Paarnaser verschieden, als es den Anschein hatte, denn die Embryonen und jungen Larven der Neunaugen zeigen die Anlagen von Kiefern und die Embryonen der paarnasigen Gnathostomen, bis zu den Säugetieren hin, weisen den reduzierten Rest einer unpaarigen Nasenanlage auf.

Besonders eignen sich die Embryonen der Neunaugen dazu, den zeitweiligen Bestand eines vordersten Darmteiles darzuthun, der zwar von einigen Embryologen hypothetisch vorausgesetzt, aber bisher nicht nachgewiesen war. Diesen Darmteil habe ich als präoralen Darm bezeichnet. Derselbe erstreckt sich bei diesen Embryonen vor der Bildung des Mundes an der Unterseite des Hirnes bis zu jenem Punkte des äusseren Keimblattes d. h. der Oberhaut, an welchem durch Einstülpung die Hypophysis entsteht. Dieser Punkt liegt ventral von der Platte, die die Anlage des unpaarigen Riechorgans darstellt. Weiter rückwärts und ventral bildet sich der Mund und mit der Ausdehnung dieses bei den jungen Larven der Neunaugen sehr geräumigen Blindsackes wird der präorale Darm von dem bleibenden Kiemendarme, gegen welchen der Mund sich eröffnet, abgetrennt. Der derart isolierte präorale Darm erfährt dann eine Rückbildung bis zum völligen Schwunde seiner Elemente. Früh aber, noch vor dem Auftreten des Mundes, entstehen an dem präoralen Darme, wie an der Region des Darmes, die als Kiemendarm sich erhält, seitliche symmetrische Ausstülpungen und zwischen diesen Taschen Bogenbildungen des mittleren Keimblattes. Diese Bildungen schliessen sich serial an einander und dürfen als homodynam gelten. Es entstehen also auch präorale Kiementaschen und präorale Kiemenbögen mit Aortenbögen. Erstere sind rudimentäre Bildungen und gehen mit dem präoralen Darme zu Grunde, die präoralen Kiemenbögen erhalten sich aber und verwachsen sekundär mit einander. Dieser

präoralen Taschen und Bögen zähle ich ursprünglich drei Paare. Aus dem vordersten deutlich nachweisbaren Bogenpaare entstehen Knorpel und Muskeln und zwar das Paar der knorpeligen Schädelbalken, sowie die Hauptmasse der Augenmuskeln, die also nicht dorsale Muskeln sind, wie bisher angenommen war, sondern ventrale, zur Kategorie der Kiemenmuskeln gehörige, mit denen sie auch histologisch übereinstimmen.

Huxley[1]) hat bereits 1869 in seinen Hunterian lectures es ausgesprochen, dass die Schädelbalken zu den ventralen Bogenbildungen, den Visceral- oder Kiemenbögen gehörten und diese Hypothese kann ich nunmehr embryologisch begründen. Auf den vordersten Bogen, den ich als Trabekularbogen bezeichne, folgen noch zwei Bogenpaare vor der vordersten postoralen Kiementasche, der Hyomandibulartasche, und dürfen darnach als Oberkiefergaumenbogen und als Unterkieferbogen bezeichnet werden, aber ihre Stellung ist bei den Neunaugen eine eigenartige. Der präorale Darm schnürt sich nämlich vor seiner Abtrennung stark ein und damit wird der unmittelbar vorn auf die Hyomandibulartasche folgende Bogen, der Unterkieferbogen, weit medialwärts und sogar vorwärts verlagert, so zwar, dass man, wenn dieser Vorgang nicht kontinuierlich verfolgt wird, den Palatinbogen für den Unterkieferbogen halten könnte. — Diese beiden hinteren Bogenpaare liefern bei den Ammocöten nicht Knorpel, sondern nur Muskeln und Bindegewebe und ich bin noch nicht in der Lage, ein Urteil darüber abgeben zu können, ob die von Huxley den Kieferbögen der Gnathostomen verglichenen knorpeligen Teile am Schädel der ausgebildeten Neunaugen diesen embryonalen Bögen entsprechen. Diese Entscheidung vorbehalten, ist aber jedenfalls soviel sicher, dass die Anlagen von

1) Hunterian lectures, in Medical times and Gazette, London 1869.

Kieferbögen den Cyclostomen in derselben Ausdehnung zukommen, wie den Gnathostomen.

Die unpaarige, eine mediane Oeffnung zeigende Nase der Cyclostomen hat verschiedene Deutungen erfahren. Die ursprüngliche Auffassung war die, dass das Organ einen einfachen median gelegenen Sack darstelle, von welchem aus ein Canal, der Nasengaumengang sich nach hinten erstrecke. Dieser Gang hört bei der Familie der Petromyzonten hinten blind auf, bei den Myxinoïden aber durchbricht der Canal das Dach des Darmrohres und kommuniziert frei mit demselben. Götte hat nun dargethan, dass ein Rest dieses Nasengaumenganges der Unpaarnaser sich als der sogenannte Hirnanhang, die Hypophysis, bei den Paarnasern erhalte, und A. Dohrn wies nach, dass das Riechorgan und der Gang genetisch gesondert werden müssen. Beide Teile bilden sich getrennt, das Riechorgan mehr dorsal und der Gang, der nunmehr als Hypophysis bezeichnet wird, entsteht ursprünglich näher dem Munde, als der Nase, aber indem mit diesen Organen die sie trennende Partie der Oberhaut mit eingestülpt wird, erhalten beide eine gemeinsame äussere Oeffnung. — Noch vor der Publikation Dohrn's hatte bereits Calberla auf der Naturforscher-Versammlung in München 1877 darauf hingewiesen, dass Nase und Hypophysis als getrennte Grübchen auftreten. Calberla[1]) fügte daran weitere Aufschlüsse. Er gab an, dass der Riechsack nicht unpaarig ist, sondern durch ein von der oberen Wand ausgehendes Septum in zwei symmetrische Abteilungen geschieden werde, zu welchen durch besondere Oeffnungen der knorpeligen Kapsel des Organs die von vorn herein paarigen Riechnerven treten. Bei der Umwandlung der Larve zum Geschlechtstier werde die Scheide-

---

1) Calberla, Zur Entwicklungsgeschichte des Petromyzon. Amtlicher Bericht der 50. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in München, 1877, S. 188.

wand knorpelig. Die Duplicität sei also nicht zu verkennen und es müssten deshalb die Petromyzonten als Amphirhinen bezeichnet werden. Götte, der dem Vortrage beiwohnte, bestätigte diese Angaben. In der That lässt sich das Septum leicht nachweisen, nur ist es nicht vom Beginne der Einstülpung an da, wie Calberla angab, selbst 5—6 mm lange Larven von P. Planeri zeigen noch keine Spur dieser Teilung. Ebenso unrichtig ist es, wenn Calberla den Nasengaumengang, d. h. die Hypophysis, erst paarig entstehen und nachträglich aus der Vereinigung einer doppelten Einstülpung den unpaarigen Gang sich bilden lässt.

In neuester Zeit hat sich W. His[1]) über das Riechorgan von Petromyzon ausgesprochen und eine Abbildung des Organs mit den beiden Riechnerven nach einem Frontalschnitte gegeben. His bezeichnet das Organ als paarig und die zu beiden Seiten des Septum gelegenen Buchten als die symmetrisch angelegten Riechgruben, zu welchen die Riechnerven vom Hirne aus divergierend sich erstrecken. Ganz zutreffend hebt er aber hervor, dass diese Höhle mit ihrer einfachen Eingangsöffnung der Nasenhöhle der übrigen Wirbeltiere morphologisch nicht gleichwertig ist. Er meint, dieselbe wäre wohl am besten als Gesichtshöhle zu bezeichnen und ihre Rückwand entspräche der Stirn- und oberen Gesichtsfläche anderer Wirbeltiere. — Ob nun die beiden Riechgruben von Petromyzon den Riechgruben der Amphirhinen morphologisch gleichwertig zu erachten seien, darüber äussert His sich nicht.

Wenn man nun weiss, dass die erste Anlage des Riech-

---

1) W. His, Die Entwicklung der menschlichen und tierischer Physiognomien. Archiv für Anatomie und Physiologie, Anat. Abt., 1892, S. 421.

Derselbe, Ueber das frontale Ende des Gehirnrohres. Daselbst, 1893, S. 163.

organs bei Petromyzon durchaus nicht paarige Einstülpungen zeigt, sondern eine einfache Epidermisplatte darstellt, die ohne irgend welche Unterbrechung über die Mittelebene sich hinweg erstreckt, in der Mitte keine Leiste, noch sonst eine die beiden Hälften trennende Marke zeigt, so bleiben für die Deutung des weiter entwickelten Organs und seiner Teile Unklarheiten bestehen und es wird erforderlich, die Entwicklungsgeschichte eingehender zu Rate zu ziehen. Das kann nicht geschehen, ohne dass zugleich die Entwicklung der Kopfnerven überhaupt Berücksichtigung fände, deren vorderstes Paar die beiden Riechnerven darstellen.

Der Entwicklungsgang der Kopfnerven und ihrer Ganglien ist ein komplizierter, es beteiligen sich daran Anlagen verschiedener Herkunft, je eine centrogene und eine kutane, die letztere wird von einer verdickten Platte resp. einem Wulst oder Hügel der Oberhaut geliefert. Die centrogene Anlage, aus der dorsalen Neuralleiste des Centralorgans hervorgehend, erreicht die entsprechende kutane Anlage, dann löst sich die tiefere Zellenschicht der letzteren ab und vereinigt sich mit der centrogenen Anlage zur Bildung eines Ganglions des betreffenden Nerven. Es findet also bei der Bildung der Kopfganglien eine centripetale Verlagerung von ursprünglich peripheren Zellen statt, die den Wert von Nervenzellen haben. Nun wäre es bequem, diese Verdickungen der Oberhaut, die sich an der Ganglienbildung beteiligen, einheitlich zu bezeichnen. Ich schlage dafür den Ausdruck Plakode[1]) vor. — Es bilden sich am Kopfe zwei Reihen solcher Plakoden, eine dorso-laterale Reihe und eine epibranchiale. Beide Reihen konvergieren nach vorn gegen eine vordere terminale Plakode, die sich sowohl bei Monorhinen, wie bei Amphirhinen findet. Bei den Monorhinen, speziell bei Petromyzon stellt dieselbe die Anlage des un-

1) *Πλακώδης, ες,* kuchenartig, plattenartig.

paarigen Riechorgans dar und wird eingestülpt; bei den Amphirhinen ist dieselbe zeitweilig vorhanden; ich[1]) habe sie bei vielen Knorpelganoiden, beim Frosch, ja bei Säugetieren nachgewiesen. Schafembryonen, an denen die Rachenhaut noch nicht gegen den Darm durchgebrochen ist, zeigen dieselbe in starker Ausbildung. Später aber verschwindet diese unpaarige Riechplakode bei den Amphirhinen, ihre Stelle würde der unteren mittleren Stirnregion entsprechen. Diese terminale Plakode beansprucht noch ein weiteres Interesse, insofern sie das Feld darstellt, innerhalb welches das Hirn vor seiner vollständigen Isolation mit der Oberhaut zusammenhängt und entweder durch ein Loch nach aussen mündet oder durch einen massiven Strang befestigt ist. Diese letzte Verbindungsstelle ist das vordere Axenende des Hirnes. Damit ergiebt sich ein Anschluss an Amphioxus, bei welchem Tiere ja noch spät das Neuralrohr vorn eine Oeffnung besitzt, den vorderen Neuralporus, der sich innerhalb eines trichterförmig eingesenkten Feldes der Oberhaut befindet, einer Grube, die bereits vor Decennien von Kölliker als unpaarige Riechgrube beschrieben worden ist. Auch dort aber ist die Verbindung und Communication des Hirnes mit diesem Sinnesorgan keine bleibende, das Hirn trennt sich von der Grube, bleibt aber mit dem Boden derselben in Berührung.

So zeigt sich in einem wesentlichen Punkte Uebereinstimmung von Amphioxus an bis zu den Amnioten: das Ende der Hirnaxe läuft vorn gegen eine terminale Plakode aus, welche sich bei Amphioxus und den Monorhinen zu einem Sinnesorgan gestaltet, bei den Amphirhinen als Rudiment des gleichen Organs sich bis zum völligen Schwunde zurückbildet.

Da dieses terminale Organ bei Amphioxus am wahr-

---

1) Studien zur vergl. Entwicklungsgeschichte des Kopfes der Kranioten, München 1893, S. 77.

scheinlichsten als Riechorgan gedeutet werden kann und da dieselbe Plakode bei den Monorhinen in die Bildung des allgemein als Riechorgan aufgefassten Sackes übergeht, so habe ich dieselbe als unpaarige Riechplakode bezeichnet.

An diese schliesst sich in der dorso-lateralen Reihe bei allen Amphirhinen dasjenige Plakodenpaar an, aus welchem die paarigen Riechgrübchen sich bilden, dann folgt das Paar, welches sich an der Bildung des vorderen Trigeminusganglions beteiligt und weiter die Plakoden für die übrigen Hauptganglien. In der zweiten, weiter ventral gelegenen, epibranchialen Reihe, folgt auf die unpaarige Riechplakode diejenige, aus welcher die Linse entsteht und in engstem Anschlusse an letztere abermals Ganglienplakoden.

Alle drei Riechplakoden haben das gemeinsam, dass aus denselben keine Ganglien entstehen, sondern dass ihre Nervenzellen, wie die Histiologie heute lehrt, peripher im Epithel des Sinnesorgans verbleiben.

Aus den paarigen Riechgruben entwickeln sich, wie Kölliker und His beobachtet haben, die paarigen Riechnerven in centripetaler Richtung. Ein unpaarer Riechnerv tritt bei den Amphirhinen nicht auf. — Bei Petromyzon besteht bei ganz jungen Larven von $3^1/_2$—4 mm Länge ein bald verschwindender medianer, einige Kerne enthaltender Fibrillenstrang, der die Kuppe des Riechsackes mit dem vordersten Hirnende, dem lobus olfactorius impar verbindet. Wenn derselbe verschwindet, leitet sich die Bildung der paarigen Riechnerven ein und diese sind ohne Zweifel den paarigen Riechnerven der Amphirhinen homolog.

Nun besteht also die Schwierigkeit für die Vergleichung, dass das gleiche Nervenpaar bei den Amphirhinen den paarig auftretenden Riechgruben, bei den Monorhinen dem zunächst jedenfalls unpaarig erscheinenden Riechsacke angehört. Es wirft sich also die Frage auf, ob bei den Monorhinen, speziell bei Petromyzon neben der unpaarigen noch paarige Riech-

plakoden nachweisbar seien und diese Frage kann ich bejahen. Die gesuchten Bildungen lassen sich embryologisch ganz scharf definieren, als Verdickungen der Epidermis, die innerhalb der dorso-lateralen Plakodenreihe zwischen der terminalen Plakode und der vorderen Trigeminusplakode ihre Lage haben; und solche sind vorhanden. Sie sind bei Petromyzon erst schwach entwickelt und an der Innenseite durch eine Furche von der unpaarigen Riechplakode scharf abgesetzt. Bei der fortschreitenden Einstülpung der letztgenannten werden sie aber mit in die Bildung des Riechsackes einbezogen. Sie liefern also die lateralen Partien des Riechsackes, welche später zu den seitlichen Buchten des durch ein Septum unvollständig geteilten Sackes werden. Im Bereich des mittleren Feldes aber, das der unpaarigen Riechplakode entspricht, entsteht das Septum und es ist fraglich, ob sich an demselben, wenigstens in ganzer Ausdehnung, das Riechepithel enthält.

So fehlt also auch hinsichtlich des Riechorgans eine scharfe Scheidung zwischen Monorhinen und Amphirhinen. Allerdings ist die paarige Nase nicht vollständig derjenigen der Petromyzonten homolog, sondern nur teilweise, denn in die Bildung des Riechsackes der letzteren gehen drei Plakoden ein, das Geruchsorgan der Amphirhinen entsteht dagegen nur aus den lateralen Plakoden, die mittlere fällt dabei ganz aus. Petromyzon stellt also ein verbindendes Glied dar zwischen den reinen Monorhinen, welche aber in der Gegenwart wohl nur durch Amphioxus noch repräsentiert sind, und den reinen Paarnasern, bei welchen die unpaarige Riechplakode nur während kurzer Entwicklungsperiode noch nachweisbar ist. Die Ausschaltung der terminalen unpaarigen Plakode bei der Bildung der Nase der Gnathostomen steht wohl im Zusammenhange mit der Ausbildung des Kieferapparates und der fortschreitenden Rückbildung der Hypophysis.

Sitzung vom 3. März 1894.

1. Herr LEONHARD SOHNCKE macht eine Mittheilung: „Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten". Dieselbe wird in den Denkschriften erscheinen.

2. Herr EUGEN v. LOMMEL legt eine in seinem Institut ausgeführte Arbeit des Herrn B. W. STANKEWITSCH, a. o. Professor an der Universität Warschau: „Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der dielectrischen Polarisation in Flüssigkeiten" vor.

3. Herr GUSTAV BAUER bespricht eine Arbeit des Herrn Privatdozenten Dr. Hermann BRUNN: „Exakte Grundlage für eine Theorie der überall convex begrenzten Gebilde" und überreicht ein Referat über dieselbe.

4. Herr AD. v. BAEYER hält einen Vortrag: „über Kümmelöl". Die Resultate seiner Untersuchung werden an einem anderen Orte zur Veröffentlichung kommen.

Experimentelle Beiträge
zur Kenntniss
der dielectrischen Polarisation in Flüssigkeiten.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von B. W. Stankewitsch,
a. o. Professor an der k. Universität Warschau.

(Eingelaufen 3. März.)

Gegen das Ende der Sommerferien 1893 unternahm ich, der liebenswürdigen Erlaubniss des Herrn Professor Dr. von Lommel gemäss, eine experimentelle Arbeit über dielectrische Polarisation in Flüssigkeiten im Physikalischen Institute der Universität München. Die Arbeit ist jetzt beendigt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, den Herren Professoren Dr. von Lommel und Dr. Grätz, sowie dem Herrn Assistenten Dr. Fomm, für ihre liebenswürdige Unterstützung im Laufe der Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.

Es ist der Zweck dieser Arbeit:

I. eine neue Modification der bekannten „Capacitätsmethode" (unter Benutzung von Wechselströmen) vorzuschlagen, die gewisse Vortheile hat, nämlich: A. sie nimmt nur kleine Mengen von Substanzen in Anspruch und ist daher besonders für die Untersuchung seltener organischer Flüssigkeiten geeignet; B. sie gestattet nicht nur die Be-

stimmung der Dielectricitätsconstanten verschiedener Flüssigkeiten in Bezug auf Luft, sondern auch in Bezug auf einander, welcher Umstand ein werthvolles Mittel zur Controle der in Bezug auf Luft gefundenen Werthe von Dielectricitätsconstanten bietet;

II. zu prüfen, ob nicht bei hinreichender Vervollkommnung der mechanischen Unterbrechung des zur Erzeugung von Wechselströmen benutzten primären Stromes (bei hinreichender Verkleinerung der Ladungsdauer des Condensators) gute Resultate nach der Capacitätsmethode auch für diejenigen Flüssigkeiten zu bekommen sind, für welche sonst (bei üblicher langsamer Unterbrechung) nur die von den Herren Cohn und Arons vorgeschlagene Methode der Kraftmessung giltig ist; diese Bemühungen blieben, wie aus dem Weiteren zu sehen ist, nicht ohne Erfolg: der zu diesem Zwecke construirte Unterbrecher erlaubt mir sogar für den Alkohol (99 %) den richtigen Werth der Dielectricitätsconstante nach der Capacitätsmethode zu bekommen; nur für den mehr wasserreichen Alkohol (etwa 93 %) sind die auf diese Weise ermittelten Werthe noch etwas zu gross; für die Flüssigkeiten, deren electrisches Leitungsvermögen kleiner als dasjenige des absoluten Alkohols ist, bekomme ich Werthe, die beinahe mit den von der Kraftmessungsmethode gelieferten zusammenfallen;

III. speciell eine Reihe von Flüssigkeiten zu untersuchen, für welche die D.C.-en noch nicht bestimmt sind, und welche ihren optischen Eigenschaften nach merkwürdig sind: es sind ätherische Oele, die mit der Eigenschaft, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, begabt sind.

A. Apparate.

I. Den wesentlichsten Theil meiner Versuchsanordnung bildet ein Doppelcondensator, bestehend aus drei horizontal über einander gelegten cylindrischen Kupferplatten (Durchmesser der Grundebenen = 15 [cm], Höhe = 0,95 [cm]), die von einander mittelst je drei sehr nahe gleich dicker parallelepipedischen Spiegelglasplättchen getrennt sind (die Dicken der Plättchen betragen: für das der oberen Zwischenschicht angehörige System 0,1630; 0,1628; 0,1634, im Mittel also 0,1631 [cm]; für das andere System 0,1635; 0,1632; 0,1631, im Mittel also 0,1633 [cm]); die Grundflächen dieser Plättchen sind klein im Verhältnisse zu dem Flächeninhalte der Grundebenen von Kupferplatten (die gesammte Grundflächengrösse für je ein System von drei Glasplättchen macht ungefähr den 0,0037ten Theil des Flächeninhaltes der Grundebene einer Kupferplatte aus). Von den zwei dünnen Zwischenschichten, welche die Kupferplatten trennen, wird entweder die obere allein mit einer Flüssigkeit gefüllt (zur Bestimmung der D. C. dieser Flüssigkeit in Bezug auf Luft), oder die beiden gleichzeitig mit zwei verschiedenen Flüssigkeiten (Controle-Versuche). Die Idee, solche capillare Lamellen herzustellen, gehört bekanntlich Herrn Christiansen (Wied. Ann., Bd. 14, 1881, S. 23), und ist schon öfters von mehreren Forschern zur Bestimmung der relativen Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten benutzt. Jedoch geschieht bei meinen Versuchen die Füllung von Zwischenschichten nicht nach der von Herrn Christiansen vorgeschlagenen Weise, sondern es werden die horizontal verlaufenden Spitzen von Trichterröhren von der Seite aus in die Zwischenschichten eingesteckt.

Der Doppelcondensator ist von einer zur Erde abgeleiteten metallischen „Schutzhülle" umgeben. Dieselbe ist aus einer 28 [cm] hohen und 26 [cm] breiten Glasglocke

hergestellt, deren innere Fläche mit einem Netzwerke aus Stanniolstreifchen belegt ist; die Glocke ruht auf einem ebenfalls mit Stanniol bedeckten Brette, auf welchem auch die untere Kupferplatte liegt (sie bleibt auch stets mit der Erde leitend verbunden). Das Brett ist von einem Gestell mit drei Fussschrauben, welches das horizontale Einstellen der Kupferplatten gestattet, getragen. Die Trichterröhre, sowie Zuleitungsdrähte zu den Kupferplatten gehen durch Löcher, welche durch die Glocke durchgebohrt sind, (die Zuleitungsdrähte durch Paraffinpfropfen).

II. Zur Messung der Potentiale dient ein Mascart'sches Electrometer in „Doppelschaltung" (Hallwachs, Wied. Ann., Bd. 29, 1886, S. 1) unter Benutzung einer etwa 30 [cm] hohen unifilaren Suspension der Nadel mittelst dünnen Platindrahtes und bei Beseitigung der Flüssigkeitsdämpfung (das Stäbchen, welches die Nadel trägt, berührt nicht die Schwefelsäure; letztere dient also ausschliesslich zur Beseitigung der Feuchtigkeit im Innern des Electrometergehäuses). Unifilare Suspension, sowie Beseitigung der Flüssigkeitsdämpfung sind nämlich, wie Hallwachs gezeigt hat (l. c.), für die Festigkeit des „Nullpunktes" und überhaupt für das regelmässige Functioniren des Electrometers von sehr grosser Wichtigkeit. Unter diesen Umständen ist die Schwingungsdauer der Nadel gleich 3,96 [sec]; das Verhältniss der Directionskraft des Platindrahtes zu dem Trägheitsmomente der Nadel beträgt also 0,63 $[\mathrm{sec}]^{-2}$. Es ist aus diesen Zahlen ersichtlich, dass die Empfindlichkeit meines Electrometers verhältnissmässig klein ist. Das bildet aber für mich keinen Uebelstand, weil ich mit hohen Potentialen zu thun habe; indessen hat die kleine Empfindlichkeit den Vortheil, den Nullpunkt fast absolut fest zu machen (wegen grosser Directionskraft des Platinfadens). Das logarithmische Decrement der Nadelschwingungen ist gleich 0,0396 (Luftdämpfung). Die Beobachtungen am Electrometer geschehen

mittelst Scala und Fernrohr (Abstand des Spiegels von der Scala = 294 [cm]).

Es sei das eine Quadrantenpaar sowie das Electrometergehäuse mit der Erde, das andere Quadrantenpaar und die Nadel mit einander und mit einer Quelle von constantem Potentiale $= v$ verbunden (Doppelschaltung), dann ist, wie Hallwachs gezeigt hat, der Ausschlag gleich

$$\alpha = av^2 + bv + c. \qquad (1)$$

Hier bedeutet α die „reducirte" (auf Proportionalität mit den Bögen) Zahl der Scalentheile a, b, c — Constanten, von denen c immer sehr klein ist: es ist nämlich c dem Producte der beiden kleinen Hallwachs'schen Constanten

$$N|Q \text{ und } q_{12}$$

(l. c., SS. 4—5) proportional. Bei praktischen Anwendungen der Formel (1) kann immer c vernachlässigt werden: diese Constante hat nur theoretische Bedeutung (indem sie zur Bestimmung der theoretischen Constanten q_{12} dient); ihr Werth kann nur mittelst der, so zu sagen „mikrometrischen" Methode bestimmt werden, welche von Hallwachs vorgeschlagen ist (l. c., SS. 13—15).

Es sei nun v kein constantes, sondern ein periodisch (mit voller Periode $= \tau$) oscillirendes Potential, und zwar derart, dass

$$\int_0^\tau v\,dt = o$$

ist. Diese Eigenschaft kommt bekanntlich dem Potentiale am isolirten Ende der Secundärrolle eines Inductoriums zu, wenn das andere Ende der Rolle mit der Erde verbunden ist und in derselben elektrische Schwingungen stattfinden.

Wenn wir das Elektrometer in Doppelschaltung mit dem erwähnten isolirten Pole verbinden, so muss der Ausschlag, wie es ganz einfache Betrachtungen zeigen, gleich sein

$$\alpha = a \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v^2 \, dt.$$

Das heisst: bei Anwendung der Doppelschaltung zur Energiemessung von Wechselströmen ist der Ausschlag von der Constanten b unabhängig (c aber ist einfach vernachlässigt worden). Für diesen Fall gilt also anstatt (1) eine einfachere Formel

$$\alpha = a w^2, \tag{2}$$

wo w^2 — das mittlere Quadrat des oscillirenden Potentials v bedeutet. Natürlich wird dabei vorausgesetzt, dass τ gegen die Periode der Eigenschwingungen der Electrometernadel sehr klein ist.

III. Ein in der soeben erwähnten Weise oscillirendes Potential liefert bei meinen Versuchen ein Inductorium, dessen secundäre Rolle die Länge = 31 [cm] und den Durchmesser = 11 [cm], bei dem Widerstande = 411 Siem. E., hat. Der primäre Strom ist von einem Grove-Elemente geliefert; der Widerstand der primären Kette kann mittelst eines eingeschalteten Rheostaten variirt werden; diese Variationen finden in den Grenzen von etwa 10 bis etwa 30 [Ohm] statt.

Als Unterbrecher wurde im Anfange der Arbeit das eine Rad eines Buff'schen Disjunctors (Durchmesser = 5,15 [cm]) mit einer auf ihm federnd schleifenden Bürste aus feinen Kupferdrähten benutzt. Es ist derselbe Unterbrecher, welcher Herrn Dr. Franke bei seiner Untersuchung über die Abhängigkeit der D.C.-en flüssiger Körper von der Temperatur diente (Franke, Inauguraldissertation, Bunzlau 1893; auch: Wied. Ann., Bd. 50, 1893, S. 163). Dieser Unterbrecher

(ich will ihn „Unterbrecher No. I“ nennen) liefert 8 Unterbrechungen bei einer Umdrehung des Rades; wenn also das Rad n Umdrehungen in einer Secunde macht, so ist die volle Periode der Oscillationen von v auf dem isolirtem Pole des Inductoriums gleich

$$\tau = \frac{1}{8n} \text{ [sec]};$$

die Ladungszeit aber eines mit diesem Pole verbundenen Condensators beträgt

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{16 \cdot n} \text{ [sec]}. \qquad (\omega)$$

Die Berechnung der Ladungsdauer nach der Formel (ω) setzt voraus, dass die Bürste stets dicht am Rade liegt. Das kann aber natürlich durchaus nicht bei einer beliebigen Rotationsgeschwindigkeit des Rades der Fall sein: bei grossen Geschwindigkeiten findet ganz sicher das Ueberspringen der Bürste statt, und dann wird die Formel (ω) nicht mehr richtig; das kann zweifellos aus Messungen der D. C.-en von gut leitenden Flüssigkeiten geschlossen werden, wie es weiter unten ausführlich besprochen wird. Und zwar ist es selbstverständlich, dass beim Ueberspringen der Bürste die Formel (ω) nur zu kleine Werthe für die Ladungsdauer geben kann.

Es kann also nur bis auf eine gewisse Grenze vortheilhaft sein, die Rotationsgeschwindigkeit eines derartigen Unterbrechers zu vergrössern; nach dem Ueberschreiten dieser Grenze kann, wegen der Eigenschwingungen der Bürste, sogar die Zunahme der Ladungsdauer bei Vergrösserung der Geschwindigkeit eintreten.

Nachdem solches Verhalten des Unterbrechers No. I aus den Versuchsergebnissen festgestellt war, wurde ein neuer Unterbrecher construirt, welchen ich „Unterbrecher No. II“ nennen werde. Der Unterbrecher No. II liefert 120 Unter-

brechungen bei einer Umdrehung; bei n Umdrehungen in der Secunde kann also die Ladungsdauer auf

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{240 \cdot n} \text{ [sec]} \qquad (\Omega)$$

herabgesetzt werden, wenn nur n eine gewisse obere Grenze nicht überschreitet.

Bei einer mässigen Rotationsgeschwindigkeit, die in den Grenzen

$$\text{von } n = 10 \text{ bis } n = 16$$

liegt, giebt der Unterbrecher No. II sehr gute Resultate.

Der Unterbrecher No. II hat folgende Dimensionen: Durchmesser des Rades = 13,8 [cm]; seine Breite an der Peripherie = 1,49 [cm]; Länge je eines metallischen resp. isolirenden Streifchens (die nämlich Schliessungen resp. Unterbrechungen des primären Stromes besorgen) = 0,2 [cm] (das ist die Dimension eines Streifchens in der Richtung der Peripherie des Rades); Breite dieser Streifchen (d. h. die der Rotationsaxe des Rades parallele Dimension) ist gleich der Breite des Rades an seiner Peripherie. Wegen kleiner Länge der Streifchen konnte natürlich eine aus feinen Drähten bestehende Bürste nicht mehr benutzt werden; statt dieser wurde ein dünnes 1 [cm] breites Kupferstreifchen angebracht, welches am Ende fein abgeschliffen und mit 7 Zähnen versehen ist; das Streifchen ist von einer Stahlfeder getragen, und sein abgeschliffenes Ende trifft die Peripherie des Rades unter dem Winkel von etwa 45°.

Die Räder der beiden benutzten Unterbrecher wurden durch eine Hefner-Alteneck'sche Maschine getrieben; die Maschine von 2 bis 5 grossen Accumulatoren gespeist; kleinere Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeit wurden durch Aenderungen in einem eingeschalteten Widerstande erzielt.

Die Rotationsgeschwindigkeit der Unterbrecherräder wird mittelst eines Tourenzählers und einer Secundenuhr bestimmt.

Da es meine Absicht war, die Versuche bei einer Reihe von ziemlich verschiedenen Ladungszeiten anzustellen, war es für mich von Wichtigkeit, auch sehr langsame elektrische Schwingungen zur Verfügung zu haben. Die beiden Unterbrecher konnten mich aber in dieser Hinsicht nicht befriedigen: bei sehr kleinen Rotationsgeschwindigkeiten functioniren sie gar nicht regelmässig (wegen der unter diesen Umständen zu geringen Trägheit der Räder). Dann habe ich, nach dem Rathe des Herrn Dr. Fomm, eine kleine Hauptschlussmaschine (bezogen von der Anstalt der Allgemeinen Elektricitäts-Gesellschaft zu Berlin, No. 2839) zur Erzeugung des oscillirenden primären Stromes benutzt, indem dieselbe in eine Wechselstrommaschine dadurch verwandelt worden ist, dass von zwei gegenüberliegenden Collectorstreifchen durch Bürsten stetig der Strom abgenommen wurde. Die Resultate erwiesen sich als sehr gut: wenn die Maschine von 30 Akkumulatoren gespeist ist, macht der Gramm'sche Ring von 4,5 bis 7 Umdrehungen in einer Secunde; der von der Maschine für das Inductorium gelieferte primäre Strom bietet von 9 bis 14 Wechsel der Richtung in einer Sekunde, und die vom secundären Strome bedingte Ladungsdauer des Condensators beträgt

$$\text{von } \tfrac{1}{14} \text{ bis } \tfrac{1}{9} \text{ [sec]}.$$

Dabei sind aber die Schwingungen der die Energie des secundären Stromes messenden Electrometernadel merkwürdig regelmässig, und die Berechnung einer Gleichgewichtslage aus Umkehrpunkten gibt eine auffallende Genauigkeit: öfters kommt es vor, dass die vier aus fünf Umkehrpunkten berechneten Gleichgewichtslagen bis auf ein Zehntel eines Scalentheiles übereinstimmen, und zwar bei grossen Schwingungsamplituden. Indessen, wie aus den weiter unten mitgetheilten Zahlen ersichtlich ist, bekommt man unter Anwendung der Wechselstrommaschine

für die D.C.-en von gut iolirenden Flüssigkeiten sehr nahe richtige Werthe. Ich kann also die Anwendung dieser Maschine als ein sehr elegantes Mittel zur Untersuchung der dielectrischen Polarisation in gut isolirenden Substanzen empfehlen.

Beinahe eben so regelmässig sind die Schwingungen der Electrometernadel bei Anwendung des Unterbrechers No. II, wenn nur die Rotationsgeschwindigkeit innerhalb der oben mitgetheilten Grenzen liegt.

Was den Unterbrecher No. I betrifft, so functionirte er überhaupt bei Weitem nicht so regelmässig wie der Unterbrecher No. II. Dieser Umstand ist selbstverständlich dem kleineren Schwunge seines Rades zuzuschreiben. Der Unterbrecher No. I wurde von mir nur im Anfange der Arbeit benutzt, später aber ganz verlassen.

IV. Zur Herstellung von verschiedenen Verbindungen zwischen dem Doppelcondensator, dem Electrometer und dem Inductorium dient mir ein Commutator aus Paraffin. Derselbe gestattet:

1) die obere und mittlere Platte des Doppelcondensators zur Erde abzuleiten (die untere Platte, wie schon erwähnt, bleibt stets mit der Erde verbunden);

2) die obere Platte mit dem isolirten Pole des Inductoriums (der andere Pol stets zur Erde abgeleitet) und gleichzeitig die mittlere Platte mit dem Electrometer in Verbindung zu setzen;

3) das Electrometer allein mit dem erwähnten freien Pole des Inductoriums zu verbinden;

4) das Electrometer mit der oberen Platte und mit dem Inductorium zu verbinden, indem die mittlere Platte isolirt bleibt (NB.: die Anordnung für diese letzte Combination wurde nur bei den Vorversuchen benutzt; da sie

sich als nicht nöthig erwiesen hat, wurde sie später beseitigt).

Alle Verbindungen sind mittelst sehr dünner Messingdrähte hergestellt; zur Unterstützung derselben sind paraffinirte Glasstäbchen und Seidenfäden benutzt.

B. Messungsverfahren.

Nennen wir die obere Zwischenschicht des Doppelcondensators — „Schicht No. 1", die untere — „Schicht No. 2".

Nehmen wir weiter die Capacität des aus der oberen und mittleren Kupferplatte bestehenden Condensators, wenn die Luft die betreffende Zwischenschicht füllt, als Einheit der Capacitäten an, dann ist die Capacität des von der mittleren und unteren Platte gebildeten Luftcondensators auch (sehr nahe: s. oben) gleich Eins. Wenn aber die Schichten No. 1 und 2 mit Flüssigkeiten von D. C.-en δ_1 resp. δ_2 erfüllt sind, so sind die Capacitäten der beiden Condensatoren gleich δ_1 resp. δ_2.

Es sei noch γ die als constant vermuthete Capacität des Electrometers in Doppelschaltung + Capacität des Paraffincommutators + Capacität gesammter Zuleitungsdrähte.

Es seien jetzt die beiden Zwischenschichten mit Flüssigkeiten (δ_1 und δ_2) gefüllt; alle Platten und Electrometer seien zunächst mit der Erde verbunden, dann aber Electrometer und mittlere Platte isolirt und miteinander verbunden, während die obere Platte bis auf das Potential $= V$ geladen wird. Dann bekommt die mittlere Platte ein kleineres Potential $= v$, welches am Electrometer gemessen wird. Wenn wir nun annehmen, dass die beiden Flüssigkeiten und alle benutzten isolirenden Stützen vollkommene Isolatoren seien, so muss offenbar die Gleichung

$$\delta_1 (V - v) = \delta_2 v + \gamma v,$$

oder

$$(V : v) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1 \qquad (3)$$

bestehen.

Natürlich kann unsere Voraussetzung in Wirklichkeit nie in ganzer Strenge erfüllt werden. Man vermuthet jedoch, dass diesem ideellen Falle um so mehr genähert wird, je kleiner die Ladungsdauer ausfällt. Darauf beruht die Anwendung von Wechselströmen zur Bestimmung der D. C.-en; die Vermuthung wird von der Erfahrung bestätigt.

Es sei die obere Platte mit dem freien Pole eines Inductoriums, in welchem elektrische Schwingungen vor sich gehen, verbunden; die mittlere Platte aber isolirt und mit einem Electrometer in Doppelschaltung verbunden.

Das Potential der oberen Platte V ist dann eine periodische Function der Zeit t mit der Periode $= \tau$; das Potential der mittleren Platte v ist ebenfalls eine periodische Function von t und zwar mit derselben Periode.

Wenn wir nun

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau V^2 dt = W^2$$

und

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau v^2 dt = w^2$$

setzen, so wird anstatt der Gleichung (3) die folgende bestehen:

$$(W : w) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1. \qquad (4)$$

Auf unvollkommene Isolatoren angewandt gilt die Gleichung (4) nur angenähert; der oben ausgesprochenen Vermuthung gemäss ist aber die Annäherung um so grösser, je kleiner τ gemacht wird.

Die Grösse w ist nun unmittelbar von dem mit der mittleren Platte verbundenen Electrometer gegeben; und zwar kann sie nach der Gleichung (2) (Abschnitt A, Artikel II) aus dem Werthe des Ausschlages α berechnet werden.

Wie aber kann die Bestimmung von W geschehen?

Das geschieht ganz einfach im Falle, wo die zwei folgenden Voraussetzungen berechtigt sind: 1) dass die „electrostatische Capacität" der secundären Rolle des Inductoriums sehr gross gegen die von uns angenommene Capacitätseinheit erscheint; 2) dass die elektrischen Schwingungen im Inductorium ganz regelmässig vor sich gehen und keine merkliche Aenderung während der zu den weiter beschriebenen Manipulationen nöthigen Zeit erfahren.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass die beiden Voraussetzungen erfüllt seien; dann verfahren wir folgendermassen:

Nachdem der Ausschlag α bestimmt ist, trennen wir sowohl das Electrometer als auch das Inductorium von unserem Doppelcondensator ab und verbinden sie miteinander. Dann entspricht offenbar der neue Ausschlag der Nadel (nennen wir ihn A) dem Potentiale W, d. h. es besteht dann die Gleichung

$$A = \alpha \cdot W^2.$$

In diesem Falle ist also

$$W : w = \sqrt{A} : \sqrt{\alpha},$$

und die Gleichung (4) wird zu

$$(\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1. \qquad (5)$$

Wenn aber die erste von den oben erwähnten Voraussetzungen nicht berechtigt ist, so kann die „electrostatische Capacität" des Inductoriums experimentell bestimmt, und ihr Werth in der von uns angenommenen Einheit angegeben werden. Dann kann man, jedoch unter der An-

nahme, dass die zweite von jenen Voraussetzungen doch richtig ist, das oben beschriebene Verfahren noch anwenden; nur die Formeln werden in diesem Falle ein wenig complicirter, indem die „electrostatische Capacität" des Inductoriums in die Gleichungen eintritt. Diese complicirteren Formeln theile ich nicht mit, weil bei meinen Versuchen die erste Voraussetzung so nahe erfüllt war, dass die „electrostatische Capacität" des Inductoriums wegen ihrer Grösse gegen die oben angenommene Capacitätseinheit nicht geschätzt werden konnte. Beim Anfange der Arbeit habe ich mehrmals versucht diese Capacität zu bestimmen, indem ich folgendermassen verfuhr: ich bestimmte den Ausschlag des Electrometers bei der im Abschnitte A, Artikel IV, unter 3) bezeichneten Verbindung; dann wurde auf die unter 4) bezeichnete Verbindung commutirt und der Ausschlag von neuem bestimmt; dabei hat sich aber bei einer ziemlich grossen Anzahl derartiger Versuche kein Unterschied zwischen den Grössen der beiden Ausschläge ergeben. Deshalb betrachte ich es als berechtigt das oben mitgetheilte vereinfachte Verfahren anzuwenden und zur Berechnung der Versuchsergebnisse die Formel (5) zu benutzen. Was aber die zweite von den oben erwähnten Voraussetzungen betrifft, so konnte sie bei meinen Versuchen nur ausnahmsweise, in durchaus seltenen Fällen, nicht erfüllt sein. Die Bürgschaft dafür ist erstens die grosse Regelmässigkeit des Functionirens der Wechselstrommaschine und der beiden Unterbrecher (bei passenden Rotationsgeschwindigkeiten), welche Regelmässigkeit aus dem Verhalten der Ausschläge der Electrometernadel wohl erkennbar ist; zweitens aber auch gute Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen einzelner Beobachtungen. Und zwar ist die Regelmässigkeit am grössten bei der Wechselstrommaschine, dann beim Unterbrecher No. II; dem Unterbrecher No. I kommt in dieser Hinsicht die letzte Stelle zu.

Mein Verfahren besteht also im Folgenden:

I. Ich beginne mit der im Abschnitt A, Artikel IV unter 1) bezeichneten Verbindung, um die Möglichkeit zufälliger Elektrisirung der Platten beim Anfange des Versuches auszuschliessen;

II. dann commutire ich auf die Verbindung, welche unter 2) angedeutet ist, und bestimme den Ausschlag α;

III. schliesslich commutire ich auf die unter 3) bezeichnete Verbindung und bestimme den Ausschlag A.

Um die ganze Manipulation möglichst kurz zu machen, was von grosser Wichtigkeit ist, werden die Gleichgewichtslagen aus Schwingungen bestimmt, nämlich aus 3 oder 5 Umkehrpunkten; für die Verkürzung der Dauer des Verfahrens ist der Umstand sehr günstig, dass die Schwingungen der Nadel meines Electrometers sehr rasch sind (s. oben). Das Abwarten des Eintretens der thatsächlichen Ruhe der Nadel raubt sehr viel Zeit, da die Luftdämpfung nur gering ist (s. oben), und kann deshalb gar nicht empfohlen werden. Zur Erleichterung der Berechnung von Gleichgewichtslagen aus Umkehrpunkten habe ich eine Hilfstabelle construirt.

Die Berechnung von Versuchsergebnissen geschieht nach der Formel (5). Dass diese Berechnung, wenn sie sich auf leitende Flüssigkeiten und dabei auf langsame elektrische Schwingungen bezieht, nur ganz illusorische Werthe für die D.C.-en geben kann, das liegt auf der Hand. Aber ich habe mir, wie oben schon erwähnt ist, die Aufgabe gestellt, zu prüfen, ob nicht diese Werthe, bei Abnahme der Ladungsdauer $\frac{\tau}{2}$, sich asymptotisch einer festen unteren Grenze nähern.

Kehren wir zur Gleichung (5) zurück. Wenn die beiden Zwischenschichten des Doppelcondensators mit Luft erfüllt sind, kommt dieser Gleichung folgende Gestalt zu:

$$\sqrt{A} : \sqrt{\alpha} = 2 + \gamma. \qquad (6)$$

Wie aus (6) erhellt, geben die Versuche mit der Luft in den beiden Zwischenschichten unmittelbar den Werth der Constanten γ.

Wenn nun die Schicht No. 1 mit einer Flüssigkeit (von der D.C. $= \delta_1$) erfüllt ist, die Schicht No. 2 dagegen mit Luft, so verwandelt sich die Gleichung (5) in

$$(\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}) - 1 = (1 + \gamma) : \delta_1. \qquad (7)$$

Derartige Versuche können also zur Bestimmung der D.C. einer Flüssigkeit in Bezug auf Luft dienen, wenn der Werth von γ aus Vorversuchen bekannt ist.

Endlich können Versuche mit zwei Flüssigkeiten [Gleichung (5)] als Controlversuche dienen.

C. Ergebnisse.

Wegen grosser Wichtigkeit einer möglichst genauen Kenntniss des Werthes von γ wurde zur Ermittelung desselben eine ziemlich grosse Anzahl Versuche angestellt.

Resultate:

aus Versuchen mit

Unterbrecher No. II	Unterbrecher No. I
$\gamma = 0{,}63$ (Mittel aus 117 Vers.)	$\gamma = 0{,}65$ (aus 30 Vers.)

Wechselstrommaschine

$\gamma = 0{,}66$ (Mittel aus 98 Versuchen).

Dabei wurden fast immer die mässigen Rotationsgeschwindigkeiten der beiden Unterbrecher benutzt (welche Geschwindigkeiten, wie schon erwähnt, dem regelmässigsten Functioniren der Unterbrecher entsprechen). Trotz grosser Anzahl von Beobachtungen konnte eine Abhängigkeit der Grösse γ von der Höhe der benutzten Potentiale (von der Grösse A) nicht nachgewiesen werden. Auf eine solche Abhängigkeit deutet Herr Arons bei dem von ihm benutzten Mascart'schen Electrometer hin (Wied. Ann. Bd. 35, 1888, SS. 294—295). Uebrigens variirten bei

meinen Versuchen die Potentiale innerhalb nicht so weiter Grenzen, wie es bei Herrn Arons der Fall war.

Was die Verschiedenheit der Werthe von γ bei verschiedenen Ladungsdauern betrifft (s. die oben angeführten Zahlen), so zeigen sie eine derartige Gesetzmässigkeit (je kleiner die Ladungsdauer ist, desto kleiner fällt auch γ aus), die wohl erklärbar zu sein scheint: es muss zu der wahren Capacität des Electrometers und der Zuleitungen (d. h. derjenigen Capacität, welche einer vollkommenen Isolation entsprechen würde) noch eine scheinbare hinzukommen, welche von der oberflächlichen Leitung der Seidenfäden und Unterstützungsstäbchen herrührt; es ist aber sehr wohl denkbar, dass die von Isolationsmangel herrührenden Electricitätsverluste (also auch die scheinbare Capacität) desto grösser sind, je länger die Ladungsdauer ausfällt; bei den ziemlich grossen Unterschieden in der Ladungsdauer, wie es bei den drei erwähnten Versuchsreihen der Fall war, können vielleicht diese Unterschiede einen wahrnehmbaren Einfluss auf das Resultat ausüben.

Jedenfalls kann die Verschiedenheit der Werthe von γ bei verschiedener Ladungsdauer nur einen kleinen Einfluss auf die Werthe der D.C.-en haben, nämlich: bei Berechnung dieser Werthe wird nicht γ selbst, sondern $1 + \gamma$ benutzt [s. Gleichung (7)]. Es kann also dieser Einfluss höchstens durch

$$1{,}8\,\%$$

der Grösse einer zu bestimmenden D.C. dargestellt werden.

Doch halte ich es für nothwendig, bei der Berechnung einer D.C. immer denjenigen von den oben mitgetheilten Werthen von γ zu benutzen, welcher zur zugehörigen Unterbrechungsart gehört.

Jetzt theile ich die bei den Versuchen mit verschiedenen Flüssigkeiten bekommenen Resultate mit. Die Versuche beziehen sich auf gewöhnliche Zimmertemperatur, die etwa

zwischen 17° und 20° schwankte. Bei zähen Flüssigkeiten wurde der Durchfluss durch die dünnen Trichterröhren (bei Füllung von Zwischenschichten des Doppelcondensators) durch Ausübung eines Luftdruckes beschleunigt.

Die weiter unten mitgetheilten Werthe der Ladungsdauer $\frac{\tau}{2}$ wurden nach den Formeln (ω) und (Ω) (Abschnitt A, Art. III) berechnet; aus dem oben erörterten Grunde wird diesen Werthen keine absolute Genauigkeit zugeschrieben: es handelt sich nur um eine ungefähre Schätzung der Ladungsdauer.

A. Schlecht leitende Flüssigkeiten.

I. Benzol.

Dicht. = 0,879 bei 19° C.

Unterbrecher No. II

$$\delta = 2{,}11 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2600}\right)$$

Unterbrecher No. I

$$\delta = 2{,}17 \left(\frac{\tau}{2} \text{ von } \frac{1}{160} \text{ bis } \frac{1}{320}\right)$$

Wechselstrommaschine

$$\delta = 2{,}18 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}\right).$$

Man sieht, dass die Wechselstrommaschine einen bis auf 3,3 % richtigen Werth geliefert hat.

Die von anderen Forschern gefundenen Werthe sind: 2,198 (Silow); 2,43 (Winkelmann); 2,13 (bei 20° C.) (Negreano); 1,948 (Donle); 1,766 (Ladungsdauer = 1 Secunde) (G. Weber); 2,207 (Ladungsdauer = $\frac{1}{8{,}33}$ [Sec.]) (G. Weber); 2,17 (Tshegläjew).

II. Olivenöl (käufliches.)

Dicht. = 0,9158 bei 18° C.

Unterbrecher No. II	Wechselstrommaschine
$\delta = 2{,}81 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2700}\right)$	$\delta = 2{,}86 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}\right)$

Der Unterschied beträgt nur 1,8 %.

Die von anderen Forschern gefundenen Werthe sind: 3,08 (Arons und Rubens; 3,16 (Hopkinson).

Die bedeutenden Unterschiede sind wahrscheinlich dem Umstande zuzuschreiben, dass Olivenöl keine chemisch definirbare Substanz ist, und verschiedene Proben desselben können ziemlich bedeutende Unterschiede der Zusammensetzung darbieten.

B. Besser leitende Flüssigkeiten.

a) Aetherische Oele.

Eine grosse Anzahl dieser Oele wurde schon im Jahre 1889 für das Physikalische Institut von der Firma Dr. H. Koenig in Leipzig bezogen. Für manche dieser Oele wurde damals die Rotations- und Refractionsdispersion von Herrn Dr. R. Steinheil untersucht (Steinheil, „Beobachtungen über Rotations- und Refractionsdispersion", Inaugural-Dissertation, München, 1889). Unter den Oelen gibt es mehrere gleichen Namens, aber verschiedener Qualität. Ueber den Unterschied in der Herstellung der verschiedenen Sorten konnte nichts erfahren werden; dass aber die Oele von Verunreinigungen durch fette Oele vollständig frei und nur aus aromatischen Bestandtheilen zusammengesetzt sind, das wurde durch eine von Herrn Steinheil angestellte Untersuchung nachgewiesen (l. c., SS. 12—13).

Im Weiteren wird die von der Fabrik angewendete Unterscheidung der Proben durch Numerirung beibehalten, (wie es auch in der Abhandlung von Steinheil geschehen ist).

Für die drei ersten von den weiter unten angeführten Oelen wurden die Werthe der D.C.-en, zur Controle, auch nach der Methode der Kraftmessung bestimmt.

Das Verfahren war das von den Herren Cohn und Arons vorgeschriebene (Wied. Ann., Bd. 33, 1888, SS. 15—19). Als Flüssigkeitselectrometer wurde das von Herrn Dr. Franke schon früher zu dem nämlichen Zwecke benutzte angewendet, (Wied. Ann., Bd. 1893, S. 163). Für dasselbe beträgt die Schwingungsdauer der „Nadel" in der Luft 18 [sec], das logarithmische Decrement (ebenfalls in der Luft) 0,0100. Der Abstand des Spiegels von der Scala war gleich 560 [cm]. Zur Erzeugung von oscillirenden Ladungen wurde das schon oben erwähnte Inductorium benutzt; die Unterbrechung des primären Stromes (2 Daniel-Elemente, Widerstand von 5 bis 15 Ohm) war vom Unterbrecher No. II bei der günstigsten (für die Regelmässigkeit des Functionirens desselben) Rotationsgeschwindigkeit besorgt; die Ladungsdauer, nach der Formel (Ω) berechnet, betrug dabei etwa $\frac{1}{2400}$ [sec].

Die Beobachtungen wurden folgendermassen angestellt: zunächst bestimmte ich 3 Umkehrpunkte der Nadel des Mascart'schen Electrometers; dann machte ich dasselbe mit dem Edelmann'schen Electrometer (Flüssigkeitselectrometer); schliesslich von neuem mit dem Mascart'schen Electrometer. Aus den beiden für die Mascart'sche Nadel berechneten Ausschlägen wurde das arithmetische Mittel genommen. Der Unterbrecher functionirte so regelmässig, dass die beiden Ausschläge sehr oft zusammenfielen. Die Umkehrpunkte wurden am Edelmann'schen Electrometer nur für die Schwingungen seiner „Nadel" in der Luft bestimmt; bei den Schwingungen dieser „Nadel" in Oelen war die Dämpfung

sehr stark, und man konnte sehr wohl das Eintreten der thatsächlichen Ruhe derselben abwarten. Die Nullpunktsverschiebungen in den Oelen waren sehr klein im Verhältnisse zu den benutzten Ausschlägen: sie machten kaum $^1/_2$ % derselben aus. Dieser Umstand ist der bedeutenden Schwere der von Herrn Franke und mir für das Edelmann'sche Electrometer benutzten „Nadel" zuzuschreiben. Die davon herrührende kleine Empfindlichkeit des Edelmann'schen Electrometers stellte aber für mich keinen Uebelstand dar, weil, wie oben erwähnt, das Mascart'sche Electrometer auch eine kleine Empfindlichkeit besass, während die vom Inductorium gelieferten Potentiale genügend hoch waren.

Das von den Herren Cohn und Arons durch $F_0 : M_0$ bezeichnete Verhältniss (l. c., S. 16) erwies sich für meine Electrometer im Mittel gleich 2,80.

Ich konnte die Kraftmessungsmethode nur für diejenigen Oele anwenden, von denen mir hinreichend grosse Mengen (zur Füllung des Flüssigkeitselectrometers) zur Verfügung standen.

Im Weiteren behalte ich das Zeichen δ zur Bezeichnung der nach der Kraftmessungsmethode bekommenen Werthe von D. C.-en bei; die nach der Capacitätsmethode bekommenen Werthe (welche, bei kleiner Ladungsdauer, natürlich, illusorisch sind) werden durch D bezeichnet.

I. Oleum Juniperi e baccis No. IV.

Dicht. = 0,8657 bei 19,5°C.

Unterbrecher No. II:		Wechselstrommaschine:
$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3860}$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{1900}$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}$
$D = 2{,}19.$	$D = 2{,}45.$	$D = 2{,}54.$

Methode der Kraftmessung:

$$\delta = 2{,}29 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

Der von der Wechselstrommaschine gelieferte Werth ist bei diesem Oele schon bedeutend zu gross.

II. Oleum Foeniculi rectif. No. IV.

Dicht. = 0,9671 bei 20°C.

Unterbrecher No. II:

$$D = 4{,}32 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2900}\right)$$

Wechselstrommaschine:

$$D = 12{,}7 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}\right)$$

Methode der Kraftmessung:

$$\delta = 4{,}50 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

III. Oleum Lavendulae extrafin. No. III.

Dicht. = 0,881 bei 20°C.

Unterbrecher No. II:

$$D = 3{,}52 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

Methode der Kraftmessung:

$$\delta = 3{,}56 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

Bei diesem Oele stimmen die nach beiden Methoden gefundenen Werthe befriedigend überein. Was die bedeutenderen Abweichungen derselben bei den ersten Oelen betrifft, so können sie vielleicht von dem Unterschiede in der Ladungsdauer herrühren? Der Sinn dieser Abweichungen steht mit dem Sinne jener Unterschiede in keinem Widerspruche. Die Möglichkeit einer derartigen Erklärung ist also nicht ausgeschlossen.

IV. Oleum Foeniculi rectif. No. III.
Dicht. = 0,9561 bei 20°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstr.-Masch.	$\frac{1}{12}$	17,7
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{860}$	5,02
— —	$\frac{1}{2400}$	4,44
— —	$\frac{1}{3800}$	4,35

(Mit diesem Oele wurde eine sehr grosse Anzahl Messungen angestellt.)

Eine asymptotische Annäherung der Werthe von D zu einer festen unteren Grenze tritt hier sehr deutlich hervor.

Wenn wir es ferner als berechtigt betrachten, in den oben mitgetheilten kleinsten Werthen von D etwa den wahren D. C.-en nahe kommende Grössen zu vermuthen (die Controle durch die Kraftmessungsmethode scheint hiezu zu berechtigen), dann können wir constatiren, dass bei den beiden oben angeführten Proben des „Oleum Foeniculi" die D. C.-en nahezu gleich sind. Nur für die grösste Ladungsdauer ist der Unterschied der Werthe von D sehr bedeutend, was auf eine merkliche Verschiedenheit des elektrischen Leitungsvermögens der beiden Proben hinzudeuten scheint. Wenn nun aber die wahren D. C.-en der beiden Proben wirklich nahezu einander gleich sind, dann gewährt die oben ausgesprochene Vermuthung über die Ursache einer bedeutenderen Abweichung zwischen den nach Capacitäts- bezw. Kraftmessungsmethode für die D. C. des „Oleum Foeniculi No. IV" gelieferten Werthen eine Bestätigung: in der That haben wir bei dem „Oleum Foeniculi No. III" einen Werth von D, welcher genau derselben Ladungsdauer entspricht,

wie der Werth von δ beim „Oleum Foeniculi No. IV"; die Zusammenstellung der beiden Werthe zeigt aber, dass zwischen ihnen nur ein 1.3 %-grosser Unterschied besteht:

Ol. Foenic. r. No. IV:	Ol. Foenic. r. No. III:
$\delta = 4{,}50 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right)$	$D = 4{,}44 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right)$

V. Oleum Juniperi e ligno No. I.
Dicht. = 0,985 bei 19°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstrommasch.	$\frac{1}{10}$	29,1
— —	$\frac{1}{11{,}6}$	26,3
— —	$\frac{1}{12}$	20,7
Unterbrecher No. I	$\frac{1}{440}$	15,9
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{3600}$	5,26

VI. Oleum Juniperi e ligno No. II.
Dicht. = 0,939 bei 19°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstrommasch.	$\frac{1}{9{,}6}$	20
— —	$\frac{1}{12}$	9,8
Unterbrecher No. I	$\frac{1}{380}$	7,23
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{3840}$	3,55

VII. Oleum Juniperi e ligno No. III.

Dicht. = 0,909 bei 19°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstrommasch.	$\frac{1}{12,3}$	12,6
Unterbrecher No. I	$\frac{1}{300}$	4,29
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{3120}$	2,98

VIII. Oleum Juniperi e ligno No. IV.

Dicht. = 0,973 bei 18,5°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstrommasch.	$\frac{1}{12,4}$	31,3
Unterbrecher No. I	$\frac{1}{360}$	18,3
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{3360}$	4,82

Für alle 4 angeführten Proben des Wachholderöls aus Holz ist die Drehung der Polarisationsebene von Herrn R. Steinheil gemessen worden.

Ich lasse eine Zusammenstellung der Werthe der D. C.-en dieser Oele mit den Grössen der ihnen zukommenden Drehungen folgen.

Nummern der Proben des Wachholderöls aus Hoix	D.C.	Drehung	Dichtigkeit bei 15°	Zähigkeit.
No. I	5.26	klein: 1.2° für das ganze Spectrum	0.985	Am grössten.
No. II	3.55	35.29° für die Fraunhofer'sche Linie *B*	0.939	zwischen den den Nummern III und IV zukommenden.
No. III	2.96	43.09° für die *B*-Linie	0.909	am kleinsten.
No. IV	4.92	19.09° für die *B*-Linie	0.973	zwischen den den Nummern I und II zukommenden.

Die Grössen der Drehung (alle Proben links drehend) beziehen sich auf die 20 [cm] lange Flüssigkeitssäule.

Die Zähigkeiten wurden nur qualitativ nach den Durchflusszeiten durch ein und dasselbe Rohr geschätzt.

Es lassen sich folgende Gesetzmässigkeiten für diese 4 Oele gleichen Namens, aber verschiedener Qualität, constatiren: je grösser die D.C. ist, desto grösser sind auch Dichtigkeit und Zähigkeit, desto kleiner aber fällt die Drehung aus. Bei den Proben No. II und No. III besteht sogar umgekehrte Proportionalität zwischen der D.C. und der Drehung für die *B*-Linie:

$$43.09 : 35.29 = 1.221, \text{ während } 3.55 : 2.96 = 1.219.$$

Ich habe noch für manche andere ätherische Oele Versuche angestellt. Die Ergebnisse sind aber noch nicht ausgerechnet worden.

b) Alkohol.

I. Eine der beiden untersuchten Proben wurde unter dem Titel „absoluter Alkohol" bezogen. Jedoch hat die Dichtigkeitsbestimmung für diese Probe ergeben Dicht. =

0,797 bei 15°C. Hieraus ergibt sich nach der „Alkoholometrischen Tabelle" die Stärke des Alkohols gleich etwa 99 %.

Ich theile die Werthe von A und α (s. oben), welche bei einer von zwei mit dieser Probe angestellten Versuchsreihen bekommen wurden, mit:

Unterbrecher No. II.

Capacitätsmethode:

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3240} \text{ [sec]}$$

A	α	$\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}$
257,5	219,8	1,082
265,9	232,6	1,069
256,2	224,1	1,069
271,9	232,9	1,080
293,9	267,5	1,048
291,2	255,4	1,068
286,8	249,1	1,073
343,5	292	1,084
281,1	253,3	1,053
278	245,8	1,063
304	264,9	1,071

Mittel (aus 11 Beobachtungen): $\sqrt{A} : \sqrt{\alpha} = 1{,}069$

Die zweite Reihe (nach einer neuen Füllung der Schicht No. 1) hat ergeben: $\sqrt{A} : \sqrt{\alpha} = 1{,}071$ (aus 10 B).

Hauptmittel: $\sqrt{A} : \sqrt{\alpha} = 1{,}070$.

Die Formel (7) (Abschnitt B) ergibt also für diese Probe:

$$D = \frac{163}{7} = 23{,}3 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3240}\right).$$

Die von anderen Forschern gefundenen Werthe sind: $\delta = 26{,}5$ (98 %) (Cohn und Arons); $\delta = 25{,}8$ („absolut", bei 14°C.) (Tereschin); $\delta = 22{,}29$ (Dicht. = 0,811 bei 15°C.) (Donle).

II. Die andere Probe wurde unter dem Titel „96%iger Alkohol" bezogen. Lange in grosser Vorrathsflasche des Instituts gestanden. Unmittelbar vor den Versuchen wurde Dichtigkeitsbestimmung ausgeführt. Aus dem Werthe der Dichtigkeit konnte geschlossen werden, dass zu den Versuchen nur etwa 93% starker Alkohol benutzt wurde.

Unterbrecher No. II.

Capacitätsmethode:

$$D = 67{,}9 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{1400}\right); \qquad D = 34{,}7 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3600}\right)$$

Kraftmessungsmethode:

$$\delta = 32{,}4 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

Bei einem so wasserreichen Alkohole gibt also der Unterbrecher No. II unter Anwendung der Capacitätsmethode noch zu grosse Werthe. Da aber mein Unterbrecher No. II natürlich kein letztes Wort der Technik darstellt, so wage ich zu vermuthen, dass mit einem noch bedeutend grösseren und (das ist die Hauptsache) noch mehrere Unterbrechungen bei einer Umdrehung gestattenden Unterbrecher vielleicht sogar die D. C. des Wassers nach der Capacitätsmethode richtig bestimmt werden kann.

Wie schon erwähnt, gibt der Unterbrecher No. II die besten Resultate, wenn seine Rotationsgeschwindigkeit in den Grenzen liegt, welche 10 und 16 Umdrehungen in einer Secunde entsprechen. Bei grösseren Geschwindigkeiten werden nicht nur die Electrometernadelausschläge bedeutend unregelmässiger, sondern es wird auch eine sehr deutliche Zunahme der Werthe von D wahrgenommen. Bei manchen gut leitenden Flüssigkeiten habe ich sogar bei 41 Umdrehungen in einer Secunde Werthe von D gefunden, welche etwa doppelt so gross sind, wie diejenigen, welche den günstigsten Rotationsgeschwindigkeiten entsprechen. Das deutet

offenbar auf ein bei grossen Geschwindigkeiten stattfindendes Ueberspringen der Bürste hin. Die erwähnten Grenzen, innerhalb deren die günstigsten Geschwindigkeiten liegen, wurden aus sehr vielen Versuchen bestimmt.

Es mögen noch die Resultate einiger Controle-Versuche (mit zwei Flüssigkeiten) mitgetheilt werden.

I. Die Schicht No. 1 ist mit Olivenöl, die Schicht No. 2 mit Benzol gefüllt. Es ist also $\delta_1 = 2{,}81$ und $\delta_2 = 2{,}11$ (s. oben), und der nach der Formel (5) berechnete Werth von $\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}$ ist

$$1{,}975;$$

der beobachtete Werth aber desselben Verhältnisses betrug

$$1{,}980.$$

(Unterbrecher No. II, $\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2600}$; bei Berechnung ist deshalb $\gamma = 0{,}63$ angenommen).

II. Umgekehrte Füllung. Unterbr. No. II, $\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2600}$. Es ist also $\delta_1 = 2{,}11$ und $\delta_2 = 2{,}81$; $\gamma = 0{,}63$.

$\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}$ (berechnet) $= 2{,}630$; $\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}$ (beobachtet) $= 2{,}659$.

III. Die Schicht No. 1 enthält — „Oleum Lavendulae extraf. No. III"; die Schicht No. 2 — „Oleum Foeniculi rect. No. III". Unterbrecher No. II, $\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}$. Es ist:

$$D_1 = 3{,}52 \left(\text{bei } \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right) \text{ und } D_2 = 4{,}44 \left(\text{bei } \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right);$$

$$\gamma = 0{,}63.$$

$\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}$ (berechnet) $= 2{,}44$; $\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}$ (beobachtet) $= 2{,}48$.

Um noch raschere, als die vom Unterbrecher No. II gelieferten, elektrische Schwingungen zu haben, habe ich versucht, die bei Entladungen von Leydener Flaschen entstehenden Oscillationen bei meiner Methode anzuwenden. Leider aber ging es nicht: aus den grossen Werthen, welche dabei für die D.C.-en ätherischer Oele bekommen wurden, liess sich mit Sicherheit erkennen, dass für die Ladung des Doppelcondensators nicht die Entladungsoscillationen, sondern nur die eigenen elektrischen Schwingungen eines die Ladung der benutzten Leydener Flasche besorgenden Inductoriums maassgebend waren (es wurde nicht das oben erwähnte, sondern ein anderes Inductorium dazu benutzt; der primäre Strom wurde dabei auf übliche Weise automatisch unterbrochen).

Referat über eine Arbeit:

Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale.

Von Hermann Brunn.

(*Eingelaufen 3. März.*)

Der Verfasser hat in seiner Doctordissertation, betitelt: „Ovale und Eiflächen" jene einfachen geometrischen Gestaltungen in der Ebene und im Raume behandelt, welche überall convex nach aussen begrenzt sind. In jener Arbeit kam es ihm darauf an, zu zeigen, dass sich auch über derartige geometrische Gebilde von ungemein wenig specialisirtem Bildungsgesetz eine Menge nicht ganz auf der Hand liegender Sätze aussagen lässt. Die Grundlagen für seine Entwicklungen entnahm er der Anschauung, und verzichtete bei den auf Seite 1—3 der Dissertation gegebenen Sätzen, auf welchen die folgenden sich aufbauen, in eine ausführliche Beweisführung einzutreten. Es geschah dies indess nicht, weil er die genannten Sätze eines Beweises nicht für fähig oder für bedürftig erachtet hätte.

Gerade auf eine exacte Festlegung dieser Grundlagen für die Theorie der Eigebilde nun bezieht sich die gegenwärtige Arbeit. Dass das Thema nicht so einfach ist, als uns der Augenschein verleiten möchte anzunehmen, dürfte schon der Umstand beweisen, dass es dem Verfasser nicht

gelang, seine Aufgabe auf weniger als etwa fünf Druckbogen zu erledigen.

Die Anregung, auf diesen Gegenstand zurückzukommen, dessen Bearbeitung dem Verfasser lange Zeit als eine undankbare erschien, schöpfte derselbe aus der Kenntnissnahme von gleichgerichteten Bestrebungen des Herrn Prof. Minkowski in Bonn (künftig Königsberg). Minkowski hat bei Teubner[1]) die Voranzeige eines im Drucke befindlichen Werkes betitelt „Geometrie der Zahlen" erscheinen lassen, in welchem eine unvermuthete und fruchtbare Verbindung zwischen der Zahlentheorie und der Geometrie der nirgends concav begrenzten Gebilde hergestellt werden und desswegen auch die Theorie der letzteren ausführlicher in analytischem Gewande behandelt werden soll. Es kommt somit den Eigebilden auch von anderem als rein geometrischem Standpunkt eine gewisse Wichtigkeit zu, und dies hat den Verfasser ermuntert, seine Doctorarbeit in der oben angedeuteten Weise zu ergänzen. Die vorliegende Arbeit wird vermuthlich mit gewissen Capiteln des Minkowskischen Buches in der Materie die grösste Verwandtschaft haben, doch steht zu hoffen, dass bei der grossen Verschiedenheit der Behandlungsmethoden (analytisch und rein geometrisch), sowie des Ausgangspunktes und des Zieles der Forschungen sich doch auch viele wesentliche und instruktive Abweichungen im Ausbau ergeben werden.

Die Untersuchung beschränkt sich auf die ebenen Ovalgebilde, auf deren Theorie sich diejenige der Eigebilde im Raume naturgemäss zu stützen hat.

Die Arbeit beginnt mit einem Abschnitt, der mit dem Namen „Seitenrechnung" betitelt ist. Es stellte sich näm-

1) Im Juni 1893 in den Anzeigen. Vgl. auch Bulletin des Sc. math. 2. série t. XVII janv. 1893: Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, par M. H. Minkowski.

lich heraus, dass bei Besprechung der Eigenschaften der Ovale die Hälften, in welche eine Ebene durch eine Gerade, eine Gerade durch einen Punkt zerlegt wird, eine fast bedeutendere Rolle spielen, als die vollständigen Gebilde, dass es fortwährend galt, zwei „Seiten" zu unterscheiden. Um den auf Seiten bezüglichen Schlüssen eine handliche Form und Präcision zu geben, wurden ein Symbol S für „Seite" und symbolische Gleichungen der Form

$$Sa = Sb;\ c;\ d$$
$$Sa = -\ Sb;\ c;\ d$$

eingeführt. Die Bedeutung der ersten Gleichung ist, dass innerhalb einer getrennten Mannigfaltigkeit d die Elemente a, b auf der nämlichen, die der zweiten, dass sie auf verschiedenen Seiten der trennenden Mannigfaltigkeit c liegen. Es wurden die Bedingungen für die Anwendung der Seitenrechnung auf Gerade und Ebene untersucht, d. h. es wurde untersucht, welcher Theil der Axiome für die Ebenengeometrie bei der Seitenrechnung vorauszusetzen ist, resp. welche Fassung diese Axiome erhalten, wenn man den Seitenbegriff in den Vordergrund drängt.

Sodann war die Definition und Nomenclatur einer Anzahl unerlässlicher Grundbegriffe wieder mit steter Rücksicht auf den Seitenbegriff zu geben.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wurde das eigentliche Thema mit der, wie der Verfasser glaubt, einfachsten Definition eines Ovals eröffnet, welche sich nicht auf das Oval als Curve, sondern als Flächenstück bezieht und aussagt, dass eine Gerade der Ebene des Ovals mit dem Oval höchstens ein Stück gemein hat. „Ein Stück", das soll heissen: einen Punkt, oder eine durch zwei Endpunkte begrenzte gerade Strecke. Die Möglichkeit von „Figuren" dieser Eigenschaft liegt auf der Hand, es wurde speciell von der Dreiecksfläche bewiesen, dass sie dazu gehört. Im übrigen wurde über die Figuren, welche der Definition genügen,

keine weitere Voraussetzung gemacht, auch nicht ein Mal die, dass es sich um zusammenhängende Ebenenstücke mit Rand und Inhalt etc. handle, wie es in gegenwärtiger kurzer Darstellung nach obiger Erwähnung des Wortes „Flächenstück" scheinen könnte. Im Gegentheil sucht die Arbeit ihr Verdienst eben darin, rein aus den Axiomen und der Definition alles andere abzuleiten und nicht zu postuliren.

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass das, was Ovalen gemeinsam ist, wieder ein Oval sein muss. Es wird gezeigt, wie der Satz umzukehren ist, und ein Satz über „Ovaldifferenzen" angeschlossen. Gerade Strecken zwischen Ovalpunkten gehören vollständig zum Oval; es sind dabei je nach der Art der Endpunkte verschiedene Fälle zu behandeln (innere Punkte, Randpunkte). Es werden dann die Ovale in Beziehung gesetzt zu Strahlenbüscheln, deren Centrum innerhalb, auf dem Rande, oder ausserhalb des Ovals liegt. Es wird mittels innerer Büschel auf eine erste Art und Weise die Reihenfolge der Randpunkte des Ovals definirt. Die mit Figurpunkten belegten Geraden aus einem äussern oder Randpunkt füllen einen und nur einen von zwei „angelehnten" Geraden begrenzten Winkel. Die beiden von jedem Randpunkt ausgehenden Strahlen = Halbgeraden jener angelehnten Geraden, in deren Strahlwinkel die ganze Figur eingeschlossen liegt, werden Grenzstrahlen genannt, ihre Existenz und Bestimmtheit exact bewiesen.

Eine längere Reihe von Paragraphen beschäftigt sich sodann mit dem Nachweise, dass die Gesammtheit der Ovalrandpunkte die Natur eines stetigen geschlossenen Curvenzuges hat, eine Ovallinie bildet. Gerade hier ist Sorgfalt nöthig, um Sätze, die man mit grosser Bereitwilligkeit unbewiesen anzunehmen geneigt ist, strenge zu begründen. Es gibt für jeden Ovalrandpunkt Nachbarrandpunkte, welche ihm beliebig nahe liegen. Bei dieser Gelegenheit wird der Begriff des „Näherungsbogens" für einen Curvenpunkt a ein-

geführt. Ein Näherungsbogen $a\,b$ für a muss die Eigenschaft haben, dass wenn c ein beliebiger Punkt desselben ist, alle zwischen a und c liegenden Bogenpunkte näher an a liegen als c. Um über das Zwischenliegen entscheiden zu können, muss man natürlich durch ein anderes Mittel, als die Entfernung ist, bereits über die „Reihenfolge" der Punkte eine Entscheidung getroffen, wie Kronecker sagt, „ein Fortgangsprincip" aufgestellt haben. Ein solches hat sich für die Ovalrandpunkte oben mittels innerer Strahlbüschel auch bereits ergeben. Es wird gezeigt, dass der ganze Ovalrand sich in eine endliche Anzahl aneinanderschliessender Näherungsbögen zerlegen und somit seine Punkte mittels des Fortgangsprincips der Entfernung sich in Reihenfolge setzen lassen, eine Reihenfolge, welche mit der vorher gewonnenen übereinstimmt. Schwierigkeit für die bei diesem Satz zunächst sich darbietende Beweismethode bot das mögliche Vorkommen gewisser Stellen, die als „Ecken $\geqq \frac{\pi}{2}$" bezeichnet werden, übrigens an einem Oval höchstens viermal auftreten können. Die Schwierigkeit wurde schliesslich mittels eines Satzes überwunden, welcher die Bedingung angibt, unter der ein Curvenbogen Näherungsbogen für seine beiden Endpunkte ist. Es werde gleich hier erwähnt, dass später mittels eines dritten Fortgangsprincipes — nämlich mittels einer parallel verschobenen Geraden — abermals die nämliche Reihenfolge der Ovalrandpunkte, zunächst auf einem Theilbogen erzielt wird.

Die Haupteigenschaft der nun als stetige, geschlossene Curven erkannten Ovalränder besteht darin, dass sie mit Geraden ihrer Ebene höchstens zwei getrennte Punkte oder höchstens eine zusammenhängende Strecke gemein haben.

Die Begriffe der angelehnten Geraden des Ovals und der Tangenten ihres Randes decken sich ihrem Umfange nach, was bei andern Arten von Figuren nicht der Fall ist. Dabei

ist unter einer angelehnten Geraden eine solche zu verstehen, welche Randpunkte des Ovals enthält und alle übrigen Ovalpunkte auf einer Seite liegen hat, und die Tangente ist als Grenzlage einer Secante zu definiren, auf der beide Schnittpunkte als beweglich und gegen einen festen Punkt der Curve hinrückend angenommen werden dürfen, während man gewöhnlich nur den einen beweglich, den andern fest denkt. Wollte man dem Begriff der Tangente diese Weite nicht geben, so würden die angelehnten Geraden in den sogenannten „Ecken" des Ovals nicht sämmtlich auch Tangenten sein, sondern diese Charakterisirung würde nur den beiden äussersten, auf welchen die Grenzstrahlen liegen, zukommen.

Ein besonderer Theil der Arbeit befasst sich mit einer Reihe von Sätzen bezüglich auf die Schnitte von Grenzstrahlen, Tangenten und Secanten untereinander, welche sich, abgesehen von ihrem selbständigen Interesse, für das Folgende als nothwendig erweisen. Es handelt sich nicht um die Thatsache, dass die Tangenten etc. sich schneiden, sondern darum, welche Hälften derselben sich schneiden, und ist daher in diesem Theile der Arbeit die ausgedehnteste Anwendung von der Seitenrechnung zu machen. Die beiden Hälften einer Tangente werden als erste und zweite unterschieden mittels eines von fester Anfangslage ausgehenden, um einen inneren Ovalpunkt in bestimmtem Sinne σ sich drehenden Strahles, welcher die „erste" Hälfte einer Tangente auf seinem Wege vor Erreichung des Berührpunktes, die „zweite" nach dem Passiren desselben überstreicht. Nur für die Tangente des Ausgangspunktes dreht sich die Beziehung um. Einer der hauptsächlichsten Hilfssätze sei zur Charakterisirung hier angeführt: Sind c und d zwei Punkte auf einer der beiden Hälften eines Ovalrandes, in welche derselbe zerlegt wird durch die Berührungspunkte zweier parallelen Tangenten, und geht im Sinne σ genommen der Punkt c dem Punkt d voraus, so schneidet der zweite Grenz-

strahl aus c den ersten aus d, während sich der erste Grenzstrahl aus c und der zweite aus d, oder auch gleichbenannte Grenzstrahlen aus c und d nicht schneiden.

Man gelangt zu dem Satze, dass es für die Feststellung der Reihenfolge der Tangenten gleichgültig ist, ob man die Reihenfolge ihrer Berührungspunkte auf sie überträgt oder die Reihenfolge der Strahlen eines Büschels (mittels Parallelität) auf die „ersten" oder „zweiten" Hälften der Tangenten. Nur lässt das eine Fortgangsprincip unter Umständen die Reihenfolge eines Theiles der Tangenten unbestimmt und willkürlich, während das andere dieselbe eindeutig bestimmt. Die Totalkrümmung eines Ovalrandbogens ergibt sich demnach stets grösser als die eines Theiles von ihm, die Gesammtkrümmung des Randes natürlich zu 2π.

Es werden dann weiter die an einem Ovalrand möglicherweise vorkommenden Singularitäten: Ecken und gerade Stellen besprochen. Ecken sind solche Randpunkte, deren Grenzstrahlen einen Winkel $< \pi$ miteinander einschliessen. Die Grösse einer Ecke soll jedoch durch den Ergänzungswinkel dieses Winkels gemessen werden. Ecken, deren Grösse über einer endlichen Grenze bleibt, gibt es an einem Ovalrand nur in endlicher Anzahl. Dies schliesst nicht aus, dass die Anzahl der endlich grossen Ecken an einem Ovalrand über jede Zahl hinaus wächst, was nur eine geometrische Einkleidung der Thatsache ist, dass die Summe endlicher Grössen, deren Anzahl über jede Zahl hinauswächst, eine gewisse endliche Zahl nicht zu übersteigen braucht. Es gibt Ovale mit Rändern, von denen man kein noch so kleines Stück angeben kann, auf dem nicht Ecken endlicher Grösse enthalten wären. Es wird ein Beispiel eines solchen Ovales construirt, es werden die dualen Betrachtungen angedeutet, bei denen statt der Ecken gerade Strecken des Ovalrandes eintreten, und die genauere Discussion dieser nicht uninteressanten Curven einem anderen Orte vorbehalten. Das Gesagte

lässt ermessen, welche Hindernisse der allgemeinen Formulirung des Krümmungsmasses für Ovalränder in den Weg treten. Man hat bei einem allgemein definirten Oval keine Garantie dafür, dass das Krümmungsmass in einem Randpunkt nicht eine vollkommen unstetige Function der Lage des Randpunktes ist.

Wesentlich andere Singularitäten ergeben sich auf Ovalrändern als ausgeschlossen, insbesondere eigentliche Doppelpunkte, Wendepunkte, Rückkehrpunkte, Doppeltangenten. Nur jene Ausartungen eines Ovals, für welche auch sonst die gegebenen Sätze nur cum grano salis zu verstehen sind: der einzelne Punkt und die einzelne gerade Strecke, nehmen auch hier eine gewisse Ausnahmestellung ein.

Bisher ist die Ovallinie nur als Rand eines sogenannten „vollen" Ovals, d. h. eines Flächenstückes von gewissen Eigenschaften definirt. Es ist erwünscht durch Umkehr früherer Sätze unabhängige Definitionen für die Ovalcurven zu erhalten. Bei dem hierauf gerichteten Bestreben ergeben sich Sätze wie die folgenden:

Eine im Endlichen liegende, stetige, geschlossene Curve aus einem Zug, die mit einer Geraden höchstens 2 Punkte oder höchstens eine gerade Strecke gemein hat, ist stets Berandung eines vollen Ovals.

Oder:

Eine im Endlichen liegende etc. etc. Curve, welche in jedem Punkt angelehnte Gerade aufweist, ist ein Ovalrand.

Nur für den Fall, dass man unter die obigen geschlossenen Curvenzüge auch gewisse Doppelcurven (uneigentlich geschlossene) einschliesst, muss den Sätzen eine Clausel angehängt werden.

Schliesslich werden sorgfältig ausgeführte Beweise dafür erbracht, dass jede Ovallinie eine bestimmte Länge, jedes volle Oval einen bestimmten Inhalt hat. Um die Nothwendigkeit dieser Beweise einzusehen, muss nochmals darauf

hingewiesen werden, dass wir nichts uns als gegeben betrachten wollen, als die Axiome, die Oval-Definition und das, was wir daraus abgeleitet haben, dass wir dagegen, was die Anschauung uns darbietet, mag es noch so plausibel erscheinen, nicht ungeprüft annehmen dürfen. Wir müssen diese Strenge der Auffassung innehalten, wenn wir wünschen, dass unseren geometrischen Sätzen auch ein functiontheoretischer Werth zukomme. Machen wir uns aber diese Auffassung zu eigen, so erscheint es eher wunderbar, als selbstverständlich, dass aus jener einfachen Definition des Ovals die ziemlich verwickelten Bedingungen folgen, welche das Vorhandensein einer mathematisch wohldefinirten Länge und eines wohldefinirten Inhaltes gewährleisten. Es ist die angewandte Vorsicht auch in Anbetracht der Erfahrung nöthig, dass es z. B. wirklich Curven gibt von scheinbar einfachem Verlauf, welche doch keine bestimmte Länge besitzen. Wir müssen, um beruhigt mit Ovalen operiren zu können, die absolute Sicherheit gewinnen, dass keine bisher unbemerkten die Allgemeinheit der aus der Anschauung geschöpften Sätze störenden Einzelfälle möglich sind.

Auf das Detail der Beweise kann hier nicht eingegangen werden.

Ein Satz über Eiflächen.

Im Anschluss an das Vorstehende sei es gestattet, einen Hauptsatz aus des Verfassers Doctorarbeit gegen etwaige Einwendungen sicherzustellen. Derselbe lautet (Ov. u Eifl. S. 23):

1. „In einer Eifläche findet sich unter einer Schaar von parallelen ebenen Schnitten ein und nur ein Maximum an Inhalt, das entweder durch *eine* Schnittfigur oder durch *eine* stetige Folge congruenter Schnittfiguren gebildet ist, die einen Cylindertheil bilden.

Der Beweis des ersten Theiles des Satzes lässt sich, ohne dass er im wesentlichen irgendwie geändert würde, vermittels der im vorausgehenden Referate beschriebenen Untersuchungen schärfer präcisiren. Bezüglich der letzten Behauptung des Satzes, dass ein Cylindertheil entsteht, hat mich Herr Professor Minkowski aufmerksam gemacht, dass die in meiner Doctorarbeit (III, 9, 10) gegebenen Andeutungen des Beweises in Anbetracht einer auftretenden Schwierigkeit doch gar zu dürftig sind. Es möge dem Verfasser gestattet sein, diese Lücke hier auszufüllen.

2. Satz:

Wenn eine Eifläche $\mathfrak{E}$ drei ebene Parallelschnitte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ von gleichem Inhalt $\mathfrak{J}$ aufweist, so sind diese Schnitte von congruenter Form, ähnlich gelegen und die Begrenzung von $\mathfrak{E}$ zwischen den Ebenen der beiden äussern Schnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ ist ein Cylindermanteltheil.

Beweis.

3. Voraus schicken wir als Hilfssatz: An einem von zwei Rechtecken gleichen Inhalts i als Deckflächen begrenzten „Obelisken" ist der Inhalt m eines parallel zu den Deckflächen geführten ebenen Schnittes A grösser als i, gleich nur dann, wenn die Deckrechtecke congruent sind, s. Ov. u. Eifl. S. 23. Es folgt aus den dort gegebenen Formeln

$$m - i = \lambda\lambda' \frac{(b' - b)^2}{b'} \cdot a; \; (\lambda + \lambda' = 1) \; (0 < \lambda < 1)$$

a und a' sind die Längen der Seiten des einen Deck-Rechtecks, b und b' die Längen der resp. parallelen Seiten des andern.

4. Den Eiflächenschnitt $\mathfrak{A}$ zerlegen wir nun durch parallele Gerade $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$ der Richtung ϱ in Streifen, ebenso $\mathfrak{B}$ durch die Geraden $B_0, B_1 \ldots B_n$, $\mathfrak{C}$ durch C_0,

$C_1 \ldots C_n$; alle diese Geraden seien ebenfalls von der Richtung ϱ. A_0, B_0, C_0 speciell seien die Tangenten (angelehnten Geraden) der Richtung ϱ der Schnittovale auf der linken, A_n, B_n, C_n die desgleichen auf der rechten Seite, und die Geraden sollen von links nach rechts nach Angabe ihrer Indices aufeinander folgen. Der Inhalt eines Ovalstreifens zwischen zwei aufeinander folgenden Parallelgeraden werde durch die in runde Klammer gesetzten Buchstaben der Geraden ausgedrückt und es sei die Eintheilung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ so getroffen, dass

$$(A_\nu A_{\nu+1}) = (C_\nu C_{\nu+1}) \qquad \nu = 0, 1 \ldots n-1$$

B_ν sei die durch die Verbindungsebene von A_ν und C_ν in der Ebene von $\mathfrak{B}$ ausgeschnittene Gerade. Wir nennen die Streifen $(A_\nu A_{\nu+1})$, $(B_\nu B_{\nu+1})$, $(C_\nu C_{\nu+1})$ entsprechende. Im folgenden werden an Stelle der Streifen Rechtecke treten zwischen den nämlichen Parallelgeraden, welche wir durch die in eckige Klammer gesetzten Buchstaben der Geraden ausdrücken. Die auf den Geraden A, B, C liegenden Seiten dieser Rechtecke nennen wir die „Langseiten"; die andern, die „Schmalseiten" gehen von den Endpunkten der Ovalsehnen auf A_ν, B_ν, C_ν aus nach rechts. Beim Beweis vom Inhalt der Ovale ist vom Verfasser gezeigt, dass bei genügend enger Annahme der Geraden A die Summe der Rechtecke einer festen Grösse, dem Inhalte $\mathfrak{J}$, beliebig nahe kommt. Es fragt sich nun, ob sich die Theilung von $\mathfrak{A}$ so annehmen lässt, dass auch die davon abhängigen Theilungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ unseren Wünschen entsprechend eng genug werden, d. h. dass zu gleicher Zeit

$$\mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [A_\nu A_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon; \mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [C_\nu C_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon$$

$$\mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [B_\nu B_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon$$

wird. In der That ist dies möglich und lässt sich beweisen auf Grund folgender Thatsachen:

a) Wenn $\mathfrak{A}$ kein entartetes Oval ist, so sind auch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ eigentliche Ovale und es hat in ihnen jede von einer Tangente wenn auch noch so wenig entfernte parallele Sehne endliche Länge.

b) Bei genügender Annäherung einer parallelen Sehne an eine Tangente wird der zwischen beiden enthaltene Ovalstreifen beliebig klein seinem Inhalte nach.

c) Es ist möglich, durch genügende Annäherung von A_1 und A_0 die Entfernungen von A_0 und A_1, C_0 und C_1 zu gleicher Zeit unter eine beliebig kleine Grösse herabzudrücken, zugleich auch die Entfernung von B_0 und B_1, weil sie linear von jenen abhängt. Analoges gilt von $A_{n-1}A_n$, $C_{n-1}C_n$, $B_{n-1}B_n$.

d) Die Breite eines Rechtecks mit noch so kurzer, constanter Langseite, das einem gegebenen flächengleich ist, wird beliebig klein, wenn nur das gegebene Rechteck genügend klein an Inhalt ist. (In Anwendung zu bringen für die mittleren Seiten.)

5. Wir beweisen weiterhin: Die Sehnen auf A_ν und C_ν sind längengleich.

Denn nehmen wir ein Mal an:

$$A_\mu - C_\mu = d_\mu; \qquad d_\mu > 0.^{1)}$$

a_μ, c_μ seien die obern, α_μ, γ_μ die untern Endpunkte der resp. Sehnen A_μ, C_μ, und sei $0 < \mu < n$. Irgend ein rechts (oder links) von A_μ in endlicher Entfernung innerhalb $\mathfrak{A}$ gelegener Punkt heisse p, die von c_μ und γ_μ nach rechts (oder links) ziehenden Grenzstrahlen seien C'_μ und Γ'_μ. Man lege Ebene $\mathfrak{C}$ auf Ebene $\mathfrak{A}$, Gerade C_μ auf Gerade A_μ und zwar so, dass die Strecke $c_\mu\gamma_\mu$ ganz innerhalb der Strecke $a_\mu\alpha_\mu$ liegt,

1) A_μ, C_μ bezeichnen jetzt kurz die Sehnenlängen.

γ_μ zwischen c_μ und α_μ, so dass $\overline{a_\mu c_\mu}$, $\overline{\alpha_\mu \gamma_\mu}$ von Null verschieden sind. Dann müssen auch $\overline{c_\mu s}$ und $\overline{\gamma_\mu \sigma}$ endlich sein, wo s, σ die resp. zweiten Schnittpunkte von C'_μ, Γ'_μ mit dem Rande des Dreiecks $a_\mu p \alpha_\mu$ sind, welches sich innerhalb $\mathfrak{A}$ befindet. Es sei die Gerade $G \parallel C_\mu$ und

$$Ss = S\sigma = - SC_\mu;\ G,$$

dann liegen ersichtlich alle zwischen C_μ und G parallel zu C_μ gezogenen $\mathfrak{C}$-Sehnen innerhalb $\mathfrak{A}$, sind also kleiner wie die entsprechenden $\mathfrak{A}$-Sehnen und zwar wird der Unterschied entsprechender Sehnen in diesem Intervall über einer von den übrigen Daten der Figur abhängigen angebbaren endlichen Grenze Δ bleiben. Es ist erlaubt, die Theilung so eng anzunehmen, dass sowohl $A_{\mu+1}$, als $C_{\mu+1}$ in das Intervall $C_\mu G$ fallen.

Wir verdichten die Theilung der Streifen $(A_\mu A_{\mu+1})$ und $(C_\mu C_{\mu+1})$ durch Einschiebung der Geraden

$$\begin{array}{l} A_{\mu,1},\ A_{\mu,2} \ldots\ldots A_{\mu,q} \\ C_{\mu,1},\ C_{\mu,2} \ldots\ldots C_{\mu,q} \text{ u. der „entsprechenden“}^{1)} \\ B_{\mu,1},\ B_{\mu,2} \ldots\ldots B_{\mu,q} \text{ in } \mathfrak{B} \text{ und setzen} \end{array}$$

$$A_{\mu,0} \equiv A_\mu;\ A_{\mu,q+1} = A_{\mu+1};\ C_{\mu,0} \equiv C_\mu \text{ etc.}$$

Die Entfernung von $A_{\mu,\varkappa}$ und $A_{\mu,\varkappa+1}$ kürzen wir durch $e_{\mu,\varkappa}$, welches somit die Länge einer Rechteckschmalseite ist. Nun ist

$$D_{\mu x} \equiv [B_{\mu,x},\ B_{\mu,x+1}] - [A_{\mu,x},\ A_{\mu,x+1}]$$
$$= \lambda\lambda' \frac{(A_{\mu,x} - C_{\mu,x})^2}{C_{\mu x}} \cdot e_{\mu,x}$$

nach 3. Bedenkt man, dass $A_{\mu,x} - C_{\mu,x} > \Delta$, und setzt den grössten Werth unter den $C_{\mu,x}$ gleich C, so kommt:

$$D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\Delta^2}{C} \cdot e_{\mu,x} \text{ und } \sum_{x=0}^{x=q} D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\Delta^2}{C} \sum_{x=0}^{x=q} e_{\mu,x}$$

1) Die unter 4. festgesetzte Art der Abhängigkeit zwischen den Geraden, welche mittels der Buchstaben A, C, B bezeichnet werden, soll auch für die neuen Geraden gelten.

oder $$\sum D_{\mu,x} > \lambda' \frac{\Delta^2}{C} \cdot e = K$$

wenn e die Entfernung von A_μ und $A_{\mu+1}$ bedeutet. Die rechts stehende Grösse K in der Ungleichung ist nun ganz unabhängig von dem Grad der Enge der Theilung zwischen A_μ und $A_{\mu+1}$.

Da weiter, nach dem Hilfsatz, die übrigen ausserhalb des bisher betrachteten Intervalls $(\mu, \mu+1)$ gelegenen Rechtecke $[B_\nu B_{\nu+1}]$ niemals kleiner sind als die entsprechenden $[A_\nu A_{\nu+1}]$, so gilt für jede noch so weit getriebene Theilung, sobald die $A_{\mu x}$ schon vorliegen, und die Geraden wieder durchlaufend mit einem Index bezeichnet werden:

$$\Sigma [A_\nu A_{\nu+1}] + K < \Sigma [B_\nu B_{\nu+1}]$$

im Widerspruch zu der aus 4. folgenden Ungleichung:

$$\Sigma [B_\nu B_{\nu+1}] - \Sigma [A_\nu A_{\nu+1}] < 2\varepsilon$$

welche für beliebig klein gegebenes ε (also auch für $2\varepsilon < K$) gelten soll bei genügend enger Theilung.

Auf solchen Widerspruch führt uns die Annahme, A_μ und C_μ seien verschieden, also muss

$$A_\mu = C_\mu$$

sein. q. e. d.

Eine Ergänzung bedarf der Beweis für den Fall, dass μ gleich 0 oder n gesetzt wird. Dann und nur dann können C'_μ und Γ'_μ in die Richtung von C_μ selbst fallen. In diesem Falle bestimme man auf dem Ovalrande, doch nicht auf $\overline{c_\mu \gamma_\mu}$, zwei Punkte c', γ' innerhalb von Kreisen, die mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ um c_μ, γ_μ resp. geschlagen sind. ε sei jedenfalls kleiner als die endlichen Sehnen der von c_μ, γ_μ ausgehenden Näherungsbögen. Dann lege man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ wie oben aufeinander und mache ε auch noch kleiner als die endlichen Entfernungen der Punkte c_μ, γ_μ von den Geraden $a_\mu p$, $\alpha_\mu p$ resp, wobei p wieder einen inneren Punkt von $\mathfrak{A}$ bedeutet.

$C_1 \parallel C_0$ werde so nahe an C_0 gerückt, dass beide kleinen Kreise um c_0, γ_0 geschnitten werden (resp. C_{n-1} so nahe an C_n etc.). Dann enden die Sehnen C_0 und C_1, sowie alle dazwischen liegenden parallelen Sehnen von $\mathfrak{C}$ innerhalb der Kreise und sind kleiner als die entsprechenden Sehnen von $\mathfrak{A}$ (Analoges gilt bei C_n, C_{n-1}) um eine Differenz, welche über einer angebbaren endlichen Grösse bleibt. Von hier aus vollzieht sich der Beweis genau wie vorher.

Unser bisheriges Resultat können wir so formen:

Schneiden die parallelen Sehnen A_μ, C_μ von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ resp. Stücke gleichen Inhalts ab, welche auf *einer* Seite der Ebene $A_\mu C_\mu$ liegen, so ist ihre Länge gleich.

Hieraus folgt weiter:

6. Die Entfernung von A_0 und A_μ ist gleich der von C_0 und C_μ.

Man findet nämlich, dass bei genügend enger Theilung die Inhalte und damit die Schmalseiten zweier entsprechenden Rechtecke sich nur noch um einen beliebig kleinen Bruchtheil ihrer Grösse unterscheiden. Daher wird sich auch die Summe der Schmalseiten der Rechtecke zwischen A_0 und A_μ von der entsprechenden Summe zwischen C_0 und C_μ bei genügend enger Theilung beliebig wenig unterscheiden, d. h. die beiden Summen müssen dann, weil constante Grössen, gleich sein.

7. Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich zwar noch nicht die Congruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, aber doch so viel, dass $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{A}$ durch eine Transformation hervorgeht, bei welcher die Sehnen der Richtung ϱ von $\mathfrak{C}$ in ihren Geraden ohne Aenderung der Länge verschoben werden. Die völlige Willkürlichkeit der Richtung ϱ zieht die Congruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ indess nothwendig nach sich, wie wir sehen werden.

8. Die Entsprechung zwischen den Sehnen A_μ, C_μ zieht eine Entsprechung der Endpunkte a_μ, c_μ einer-, α_μ, γ_μ andrer-

seits nach sich. Bedenkt man noch, dass $\overline{a_0 \alpha_0}$ und $\overline{c_0 \gamma_0}$, $\overline{a_n \alpha_n}$ und $\overline{c_n \gamma_n}$ congruent sind, so erkennt man, wie die Ränder von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ für jede Richtung ϱ der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ Punkt für Punkt aufeinander in bestimmter Weise beziehbar sind. Die geraden Strecken zwischen entsprechenden Randpunkten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ bilden ein Stück $\mathfrak{M}$ einer Regelfläche, welches ganz innerhalb oder höchstens auf der Fläche $\mathfrak{E}$ selbst liegt; es liegt also auch die Schnittfigur $\mathfrak{S}$ der Ebene von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{M}$ völlig innerhalb $\mathfrak{B}$ oder reicht wenigstens nicht über dessen Rand hinaus.

Somit ist Inhalt von $\mathfrak{S}$ kleiner höchstens gleich $\mathfrak{J}$, letzteres nur, wenn $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{B}$ identisch sind. Zugleich ist aber nach 1. Inhalt von $\mathfrak{S}$ grösser höchstens gleich $\mathfrak{J}$.[1]) Inhalt $\mathfrak{S}$ kann daher nur gleich $\mathfrak{J}$, und $\mathfrak{S}$ muss mit $\mathfrak{B}$ identisch sein. Auf jeder erzeugenden Strecke von $\mathfrak{M}$ liegt daher ausser einem Punkte a_μ, resp. α_μ und einem Punkte c_μ, resp. γ_μ ein dritter Punkt b_μ, resp. β_μ der Fläche $\mathfrak{E}$, woraus folgt, dass diese Strecken vollständig auf $\mathfrak{E}$ liegen, $\mathfrak{M}$ ein Theil von $\mathfrak{E}$ ist.

9. Unser Beweis wird nun vollendet:

a) Durch Verwendung der Maximalsehne bestimmter Richtung in den Ovalen;

b) Durch Benutzung der Thatsache, dass gewisse Theile der Eifläche, resp. der Ovale, welche durch Abschneiden mittels Gerader und Ebenen entstehen, die nämlichen Eigenschaften haben müssen, wie die ganzen Ovalgebilde.

10. Hilfsatz. Die Sehnen $a_0 a_n$ und $c_0 c_n$ müssen parallel und gleichlang sein.

---

1) Denn die Annahme, dass zwischen zwei gleich grossen Parallelschnitten von $\mathfrak{E}$ ein kleinerer Parallelschnitt sich befinde, ist mit dem Vorhandensein nur eines Maximums unverträglich.

Aus 6. folgt:

$$\text{Entfernung } (A_0 A_n) = \text{Entfernung } (C_0 C_n)$$

$$\overline{a_0 \alpha_0} = \overline{c_0 \gamma_0}$$

$$\overline{a_n \alpha_n} = \overline{c_n \gamma_n}$$

Maximalsehne d. Richt. $(a_0 a_n)$ in $\mathfrak{A}$ = Max.-S. d. Richt. $(a_0 a_n)$ in $\mathfrak{C}$

" " " $(c_0 c_n)$ " $\mathfrak{C}$ = " " " $(c_0 c_n)$ " $\mathfrak{A}$

Weiter:

Wenn eine Folge von Maximalsehnen der Richtung $a_0 a_n$ in $\mathfrak{A}$ ein Parallelogramm bildet, so müssen die Maximalsehnen der nämlichen Richtung in $\mathfrak{C}$ ein congruentes Parallelogramm erfüllen, da hier wie dort Gerade von gleicher Länge zwischen parallelen angelehnten Geraden gleicher Entfernung eingespannt werden, also hier wie dort gleiche Neigung gegen letztere haben, und hier wie dort wegen 5. und 6. die erste von der letzten Maximalsehne den nämlichen Abstand hat. Analoges gilt bei Vertauschung der Rollen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$.

Wir dürfen ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit unserer Annahmen die Bezeichnungen so vertheilt voraussetzen, dass:

$$\overline{a_0 \alpha_0} \leqq \overline{a_n \alpha_n} \quad \text{also auch} \quad \overline{c_0 \gamma_0} \leqq \overline{c_n \gamma_n} \text{ ist.}$$

Man bringe nun durch Parallelverschiebung a_0 mit c_0, α_0 mit γ_0 und dadurch A_n mit C_n zur Deckung. Würden hierauf a_n und c_n nicht aufeinanderfallen, sondern ein Punkt „unter" den andern — z. B. c_n unter a_n — so würde entgegen erwiesener Thatsache ein Parallelogramm von Maximalsehnen des einen Ovals im andern kein congruentes Analogon finden können — z. B. das Parallelogramm mit den Ecken α_0, a_0, α_n kein Analogon in $\mathfrak{C}$ — folglich müssen nach der Parallelverschiebung auch a_n und c_n sich decken. Also ist $\overline{a_0 a_n} = \overline{c_0 c_n}$. Der Beweis ist auch für den Fall gültig, dass in

den Ovalen nur eine einzige Maximalsehne der betrachteten Richtung existirt. Analoges wie für a_0, a_n, c_0, c_n gilt für α_0, α_n, γ_0, γ_n.

Zurück zum Beweise des Hauptsatzes! (s. Fig. 1 und 2)

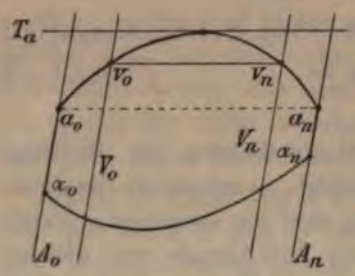


Fig. 1.

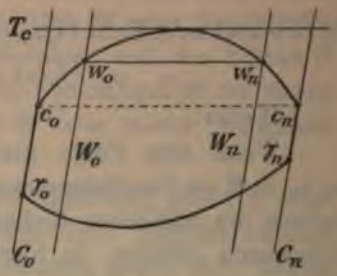


Fig. 2.

Die angelehnten Geraden von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, welche den Sehnen $a_0 a_n$ und $c_0 c_n$ parallel sind und deren Berührpunkte zu den a und c, nicht zu den α und γ gehören, sollen resp. T_a und T_c heissen. Nach 6. ist die Entfernung von T_a und $\overline{a_0 a_n}$ gleich der von T_c und $\overline{c_0 c_n}$. Wir betrachten jetzt für die Ebene $\mathfrak{A}$ die Geraden A_0 und T_a, für $\mathfrak{C}$ die Geraden C_0 und T_c als Axen (X und Y resp.) cartesischer Coordinatensysteme und nennen Punkte und Figuren in beiden Ebenen entsprechend, wenn sie die nämlichen Grössen zu resp. Coordinaten haben.

Es werde nun in $\mathfrak{A}$ zu A_0 irgend eine parallele Sehne V_0 gezogen, in $\mathfrak{C}$ die entsprechende W_0. Die zu den a gehörigen Endpunkte mögen resp. v_0, w_0 heissen. Von v_0 ziehe man dann eine Sehne parallel T_a, deren anderer Endpunkt v_n heisse und durch diesen wieder eine Sehne V_n parallel V_0. In $\mathfrak{C}$ ziehe man zu V_n die entsprechende Sehne W_n, deren zu den c gehöriger Endpunkt w_n heisse.

Der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ liegende Theil der „vollen" Eifläche $\mathfrak{E}$ ist seitlich durch ein Regelflächenstück $\mathfrak{M}$ begrenzt und bildet selber eine volle Eifläche $\mathfrak{F}$. Die Ebenen (V_0 W_0)

und $(V_n\ W_n)$ schneiden von $\mathfrak{F}$ gewisse Theile ab, ebenso von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, aber das übrigbleibende ist wieder eine Eifläche $\mathfrak{G}$ mit Deckovalen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$; der Mittelschnitt $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{F}$ wird zu einem Mittelschnitt $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$ zugestutzt, der ebenfalls ein Oval ist und den nämlichen Inhalt erhält wie die gleichen Ovale $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$. Folgt alles aus den vorhergehenden Sätzen. Wir können daher auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ die nämlichen Schlüsse anwenden wie auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, erhalten also durch Anwendung unseres letzten Hilfsatzes: $\overline{v_0\,v_n}$ ist gleich und parallel zu $\overline{w_0\,w_n}$. Ausserdem ist nach 6.

$$\text{Entf. } (T_a,\ \overline{v_0\,v_n}) = \text{Entf. } (T_c,\ \overline{w_0\,w_n}) \text{ und nachdem schon}$$
$$\text{Entf. } (V_0\ A_0) = \text{Entf. } (W_0\ C_0)$$
$$\text{Entf. } (V_n\ A_0) = \text{Entf. } (\mathrm{W}_n\ C_0)$$

ist, so erkennt man leicht, dass v_0 und w_0, v_n und w_n für beide Coordinatensysteme entsprechende Punkte sind. V_0 und v_0 waren aber ganz beliebig, und was auf Seite der a gilt, gilt analog auf Seite der α, daher stellen sich die Ovale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ als entsprechende Figuren beider Coordinatensysteme und als congruent heraus. q. e. d.

Im Austausch gegen meinen Beweis hat mir Herr Professor Minkowski einen analytischen Beweis des nämlichen Satzes mitgetheilt, der sich auch auf Gebilde von mehr als drei Dimensionen erstreckt.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 135. Stiftungstages

am 28. März 1894.

Der Classensecretär Herr C. v. Voit gedachte der seit dem vorigen Stiftungstage gestorbenen Mitglieder.

Die mathematisch-physikalische Classe hat im verflossenen Jahre zwei einheimische Mitglieder durch den Tod verloren, das ordentliche Mitglied Johann Bauschinger und das ausserordentliche Mitglied Adolf Steinheil. Dann acht auswärtige und correspondirende Mitglieder: die Mathematiker Ernst Eduard Kummer in Berlin und Moritz Abraham Stern in Göttingen; die Physiker John Tyndall in London und Heinrich Rudolf Hertz in Bonn; die Zoologen Alexander Theodor von Middendorff in St. Petersburg und Peter J. van Beneden in Löwen; den Botaniker Alphonse de Candolle in Genf und den Geologen Arcangelo Scacchi in Neapel.

Johann Bauschinger.

Am 25. November 1893 starb im 59. Lebensjahre das ordentliche Mitglied der Classe, Johann Bauschinger, Professor der technischen Mechanik und graphischen Statik an der hiesigen technischen Hochschule, nachdem er nur ein Jahr lang unserer Akademie angehört hatte. Er hat in der Stille der Arbeitsstube und des Laboratoriums als ein echter, sein ganzes Leben der Wissenschaft dienender Gelehrter eine Reihe wichtiger Arbeiten auf dem Gebiete der Wärmelehre und der Festigkeitslehre ausgeführt und sich dadurch einen bedeutenden Namen gemacht.

Bauschinger wurde am 11. Juni 1834 zu Nürnberg geboren. Das Geschick hatte ihn in ärmliche Verhältnisse gesetzt, aber ihm dafür mancherlei Fähigkeiten mit auf den Weg gegeben. Der Vater war ein einfacher Handwerker, der eine zahlreiche Familie zu ernähren hatte; es muss schon in dem Knaben ein hohes Maass von Energie und sittlichem Ernst, die ihm stets zu eigen geblieben sind, gewohnt haben, denn bereits im Alter von 14 Jahren erwarb er sich durch Stundengeben die Mittel zum Lebensunterhalt. Er liess sich durch Entbehrungen und Hindernisse nicht abschrecken, sondern gewöhnte sich, nicht in äusserlichen Vergnügungen, sondern in dem Streben nach Höherem seine Freude zu suchen. Der ganz auf seine eigene Kraft Angewiesene empfand aber auch bald den Segen, der in der Arbeit ruht.

Frühe zeigte sich in ihm eine besondere Begabung und Neigung für die mathematischen Naturwissenschaften; er besuchte in seiner Vaterstadt die Gewerbeschule und dann die polytechnische Schule mit grossem Erfolge, so dass er im Jahre 1853 das Absolutorium der letzteren mit Auszeichnung bestand und nebenbei gleichzeitig auch das der Lateinschule.

Es war von Anfang an der Wunsch Bauschinger's sich dem Lehrfach der Mathematik und Physik zu widmen; er trat daher an die hiesige Universität über, woselbst er als „Techniker" die kleine Matrikel erhalten hatte und sieben Semester verblieb. Zunächst wurde er hier mit dem hervorragenden Physiker Simon Ohm, der leider schon im Jahre 1854 starb, näher bekannt; er schätzte denselben als Lehrer ausserordentlich hoch, da er ihm in seiner Ausbildung viel verdankte und in ihm einen stets hilfsbereiten Berather fand. Er hörte nicht nur seine Vorlesungen über Experimentalphysik und die physikalischen Uebungen, sondern durfte auch an den bekannten abendlichen Zusammenkünften in dem Franziskanerkeller Theil nehmen, wobei physikalische Fragen zu ernster Besprechung kamen. Ausserdem gelang es dem strebsamen, den Namen eines Studenten mit Recht tragenden Jünglings, in der Sternwarte in Bogenhausen, deren Vorstand Lamont war, auf Empfehlung Ohm's, Aufnahme zu finden; er konnte sich daselbst in theoretischer und praktischer Astronomie sowie in höherer Mechanik ausbilden, besonders aber auch in der Behandlung und Beobachtung mit magnetischen, elektrischen und meteorologischen Instrumenten, was für ihn später von grossem Vortheil war.

Im Jahre 1856 machte er die Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik mit und bestand sie mit der ersten Note, worauf er alsbald als Aushilfslehrer für Physik und darstellende Geometrie an der polytechnischen Schule in Augsburg Verwendung fand. Ein Jahr darauf wurde er als Lehrer der Mathematik und Physik an der Gewerbeschule in Fürth angestellt, woselbst er neun Jahre zubrachte. Hier begannen neben einer angestrengten Lehrthätigkeit die ersten wissenschaftlichen Arbeiten Bauschinger's; der Tag war durch die Schule in Anspruch genommen, ein Theil der Nacht dem Studium und den Versuchen gewidmet. Diese seine Arbeiten lenkten die Aufmerksamkeit der Kreise der Wissen-

schaft und der Technik sowie der Staatsregierung auf den jungen Gelehrten. Er wurde im Jahre 1866 an das Realgymnasium zu München versetzt, kam aber zwei Jahre darauf an die richtige Stelle, nämlich an die damals neu gegründete technische Hochschule dahier, an der er durch die Einsicht ihres ersten Direktors, des Geheimraths v. Bauernfeind, die Professur für technische Mechanik und graphische Statik erhielt.

Hier war dem nun im 34. Lebensjahre Stehenden die seinen Talenten völlig entsprechende Wirksamkeit eröffnet. Er beschränkte sich dabei nicht nur auf theoretische Vorlesungen, sondern gründete alsbald für sein Fach ein Laboratorium, wie es der Physiker oder der Chemiker besitzt. Er hatte nämlich mit klarem Geiste erkannt, dass die technische Mechanik nicht mehr auf der Empirie beruhen dürfe, sondern eine wissenschaftliche Grundlage durch Thatsachen haben müsse, und um diese zu erhalten ein besonderes Laboratorium nothwendig sei. Nach vielen Bemühungen konnte er im Jahre 1870 ein mechanisch-technisches Laboratorium eröffnen, welches anfangs noch provisorisch untergebracht war; erst im Jahre 1873 wurde für solche Zwecke auf dem Areal der technischen Hochschule ein eigenes Haus erbaut, das ganz nach seinen Plänen eingerichtet wurde und ein Muster und Vorbild für alle Anstalten der Art geworden ist. Durch die Gründung dieses Laboratoriums, einer Versuchsstation für die Festigkeitslehre, namentlich der Baumaterialien, wirkte Bauschinger bahnbrechend: er hat durch seine zahlreichen und genauen Versuche der Mechanik eine feste Basis geschaffen.

Seine ersten in Fürth (1863—65) entstandenen wissenschaftlichen Arbeiten sind noch rein theoretischer Natur und beziehen sich auf die Grundgesetze der mechanischen Wärmelehre. Dieselben müssen als wichtige Vorarbeiten für die von Clausius so glänzend durchgeführte mechanische Wärme-

theorie bezeichnet werden. Ueber den sogenannten Entropiebegriff entspann sich zwischen ihm und Clausius eine Controverse, welche zu wissenschaftlich interessanten Ergebnissen führte und darthat, dass Bauschinger seinem berühmten Gegner vollständig gewachsen war. Im Speziellen behandelte er dann das wichtige Problem des Ausströmens von Gasen und Dämpfen sowie auch das des Druckes im Erdinnern, indem er in seinen Bemerkungen zu einigen Stellen von Heim's Untersuchungen „über den Mechanismus der Gebirgsbildung" aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre einige interessante Resultate über das Gleichgewicht der Erdkugel ableitete, welche dabei als feste, von einer Flüssigkeit erfüllte Hohlkugel gedacht wird. Er erkannte als einer der Ersten, dass beide Probleme nur unter Zuziehung der Prinzipien der Wärmetheorie eine befriedigende Lösung finden können. Wenn dieselben auch damals nicht zum Abschluss gebracht wurden und später durch neue Hilfsmittel bedeutend gefördert worden sind, so werden doch Bauschinger's Leistungen auf diesem Gebiete stets ihren Werth behalten.

Sein der Anwendung der Wissenschaft schon früh besonders zugeneigter Geist beschäftigte sich ausserdem mit Vorliebe mit der theoretischen und angewandten Mechanik, aus welchen Studien sein vortreffliches, nach Delaunay's Buch frei bearbeitetes, in zwei Auflagen (1861 und 1866) erschienenes Werk: „Schule der Mechanik" entstand. In diese Zeit (1867 und 1868) gehören auch seine Versuche mit dem zur Feststellung der Leistung von Dampfmaschinen dienenden Richards'schen Indikator, welche für die Wissenschaft besonders werthvoll geworden sind; dabei wurden acht Lokomotiven, vier mit Stephenson- und vier mit Meyer-Steuerung auf zahlreichen Fahrten untersucht und auf sieben Bahnstrecken mit 63 Meilen Gesammtlänge und mit Höheunterschieden bis zu 300 Metern 500 Diagramme aufgenommen.

Diese theilweise auch die Nacht über währenden mit ungewöhnlich grosser Mühe und Anstrengung verbundenen Versuche hielt Bauschinger für seine beste Leistung und that sich auf sie immer am meisten zu Gute.

Vor der Einrichtung des Laboratoriums erfolgte seine Bearbeitung der „Elemente der graphischen Statik", von welcher zwei Auflagen (1871 und 1880) erschienen sind. Der Zweck des Buches war, auf die Culmann'schen Arbeiten in einfacher gemeinverständlicher Art vorzubereiten, was dem Autor auch völlig gelungen ist.

Seine hauptsächlichste und ganz eigenartige Wirksamkeit, die seinen Namen erst weiterhin bekannt gemacht hat, entfaltete aber Bauschinger durch die im mechanisch-technischen Laboratorium gemachten, wahrhaft klassischen Versuche, welche, im Jahre 1871 begonnen, nicht nur der Praxis eine Menge werthvoller Thatsachen brachte, sondern auch der Wissenschaft zu Gute kamen.

Es wurden während 22 Jahren alle Baumaterialien auf ihre Festigkeit und Elastizität geprüft: Eisen und Stahl, Holz, Steine, Cemente und Mörtel.

Er hat zu diesen Bestimmungen die genauesten und sinnreichsten Messapparate und Methoden angewendet und zum Theil selbst erfunden, wie sie zu ähnlichen Zwecken für die physikalische Forschung gebraucht werden, so dass die erhaltenen Resultate für die Physik nicht minder werthvoll sind wie für die Kenntniss der in der Technik verwendeten Materialien. So hat er z. B. durch Einführung der Gauss'schen Methode der Spiegelablesung die Messung der Dehnung ausserordentlich verfeinert und die elastischen Formänderungen der schwersten Maschinentheile oder der stärksten Brückenglieder der Wahrnehmung zugänglich gemacht; hundertstel Millimeter wurden von ihm gemessen mittelst seiner Rollenfühlhebel, durch welche die Relativbewegungen der beobachteten

Punkte durch Reibung einer Stange auf das Zeigerwerk übertragen werden.

Auf diese Weise entstanden die Zug-, Druck-, Biegungs- und Torsions-Versuche Bauschinger's, seine Versuche über die Abnützbarkeit und die Frostbeständigkeit der Gesteine, und die über die Knickfestigkeit und die Widerstandsfähigkeit von Säulen im Feuer. Zuletzt (von 1881 an) machte er die wichtigen Dauerversuche mit oft wiederholter Beanspruchung des nämlichen Körpers, wodurch die Veränderungen der Eigenschaften des Materials durch längeren Gebrauch ersichtlich wurden. Seine Apparate sind auch angewendet worden, um die Festigkeit der Knochen des menschlichen Körpers zu prüfen, was für die Mechanik der Bewegungen desselben sowie für die Chirurgie von Bedeutung geworden ist.

Die Versuche sind zumeist in den 23 Heften der Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium veröffentlicht worden; dieselben bilden eine Fundstätte für den wissenschaftlich gebildeten Techniker und haben vielfache Anregungen gebracht, welche noch auf lange Zeit richtunggebend sein werden. Das Institut Bauschinger's stand an der Spitze der Unternehmungen der Art und es flossen ihm von allen Seiten Materialien zur Untersuchung und Aufträge für die Praxis zu. Ein besonderes Verdienst erwarb er sich noch durch die Gründung der so ungemein nützlich gewordenen „Konferenzen zur Vereinbarung einheitlicher Methoden für die Prüfung von Bau- und Konstruktionsmaterialien"; als Vorstand derselben wusste er mit grossem Geschick die Verhandlungen zu leiten, die vielfachen Gegensätze auszugleichen und die gemeinsamen Versuche nach bestimmten, meist von ihm geschaffenen Methoden zu veranlassen.

Es ist schon betont worden, dass Bauschinger's Zerreissungsversuche nicht allein für die Praxis, sondern auch für die Wissenschaft von Wichtigkeit geworden sind, da sie Aufschluss über das Verhalten der festen Körper in der

Nähe der Elastizitätsgrenze und bei Ueberschreitung derselben geben. Eine rationelle Elastizitätstheorie muss aber das Verhalten der Körper von den kleinsten bis zu den grösstmöglichen Deformationen berücksichtigen.

Als Forscher war Bauschinger von grossem Scharfsinn in der Beobachtung der Erscheinungen und im Ausdenken der richtigen Versuche, von unermüdlicher Ausdauer und seltener Gewissenhaftigkeit. Diese Gewissenhaftigkeit war ihm auch als Lehrer eigen; er lehrte gerne: sein Vortrag war durchdacht und von durchsichtiger Klarheit. Der Mann, welcher sich durch seine wissenschaftlichen Arbeiten so hoch in den Reihen der Gelehrten erhoben hatte, hätte wohl auch den Titel eines Doktors verdient.

Durch eigene Tüchtigkeit aus den einfachsten Verhältnissen hervorgewachsen, blieb er sein Leben hindurch schlicht und bescheiden. Er drängte sich nicht vor, sondern liess die Leute an sich herankommen; dann aber war er ungemein freundlich und wohlwollend und gerne bereit, Jedem zu nützen und zu helfen. Seine unverbrüchliche Wahrheitsliebe liess ihn stets offen seine Meinung sagen, so dass manchmal sein Wesen etwas schroff erscheinen konnte. In der Arbeit und in der Erfüllung der Pflicht suchte und fand er die höchste Befriedigung.

Bauschinger ist in seiner Art für die technische Hochschule und die Wissenschaft kaum zu ersetzen; sein Name wird als der eines sehr verdienten, seine eigenen Wege einschlagenden Forschers noch lange fortleben.

Adolf Steinheil.

Dr. Adolf Steinheil, Inhaber der optisch-astronomischen Werkstätte Carl August Steinheil Söhne, ist am 4. November 1893 aus dem Leben geschieden. Es ist von besonderem Interesse, den Entwicklungs- und Lebensgang dieses so überaus thätigen und eigenartigen Gelehrten zu verfolgen.

Er wurde am 12. April 1832 als der zweite Sohn unseres berühmten Mitgliedes Carl August v. Steinheil dahier geboren. Dieser Sohn hatte das ungewöhnliche Talent des Vaters für Mathematik sowie für die Anwendung derselben zur Lösung physikalischer Probleme geerbt. Die Beiden waren sich überhaupt in ihren Anlagen ungemein ähnlich und bieten ein vortreffliches Beispiel dafür, wie sich die Organisation und die Ausbildungsfähigkeit bestimmter Theile des Gehirns zu vererben vermag. Denn schon im kindlichen Alter trat bei dem Sohne das Verständniss für Zahlenverhältnisse und die entschiedene Vorliebe dafür hervor. Es wird erzählt, er habe als fünfjähriger Knabe vor dem Eintritte in die Volksschule bei Betrachtung seiner gewürfelten Bettdecke sich klar gemacht, dass 2×6 und 3×4 die gleiche Zahl geben. In dem Gymnasium übertraf er die Mitschüler weit in dem Verständniss für Arithmetik und Mathematik und bei den mathematischen Aufgaben erfand er Lösungen, welche von dem Lehrer nicht vorgetragen worden waren. Dem entsprechend hatte er auch zeitlebens das treueste Gedächtniss für Zahlen: so z. B. wusste er von jeder Pflanze zu sagen, auf welcher Seite von Koch's Deutscher Flora sie sich beschrieben findet, und konnte er eine grosse Anzahl von Logarithmen aus dem Kopfe angeben.

Es ist verständlich, dass der so veranlagte Sohn sich zu dem gleich gearteten Vater besonders hingezogen fühlte und schon früh für dessen Thun das lebhafteste Interesse empfand.

Man muss die Besonderheit des Vaters gekannt haben, um die Stellung des Sohnes zu ihm zu verstehen. Der Vater war ein selten genial angelegter Mann, unablässig geistig beschäftiget und voll von Ideen; er verband mit der Gründlichkeit und Schärfe des Gelehrten den beweglichen Geist, den sicheren Blick und die Beherrschung der Technik des ausgezeichneten Praktikers. Ein Schüler von Bessel und

Gauss, die ihn, wie ihr Briefwechsel darthut, besonders hoch hielten, hatte er von diesen Geistesheroen gelernt, die Mathematik als Mittel zum Zweck anzusehen. Man nennt ihn wohl gewöhnlich als den Begründer der jetzt die ganze Erde umspannenden Telegraphen, welche er durch seine Erfindungen praktisch möglich gemacht hat. Zu diesen gehören: die Art des Aufschreibens und die Wahl der Zeichen, dann die Benützung der leitenden Erde statt des zweiten Drahtes und die Ableitung des Blitzes von den Apparaten durch die Blitzplatten, ferner der sogenannte schweizerische Commutator und die Translatoren, durch welche eine an einer Station anlangende Depesche sich selbst weiter telegraphirt. Aber man vergisst häufig, dass in vielen anderen Fällen, wo es galt eine schwierige physikalische Aufgabe durchzuführen, sein Geist alsbald die Mittel dazu fand.[1]) Wer das Glück

1) Es sei nur erinnert: an sein Photometer zur Bestimmung der relativen Helligkeiten der Sterne; an das zur Sendung optischer Zeichen in grosse Entfernungen bestimmte Heliotrop; an die erste Verwendung physikalischer Eigenschaften z. B. der Brechbarkeit und der Zerstreuung des Lichtes, des specifischen Gewichtes etc. etc. zur quantitativen chemischen Analyse; an die Herstellung genauer Maassstäbe, Gewichte und Waagen; an seinen Astrographen zum Zeichnen der Sternkarten; an das Pyroskop zur sicheren Ermittelung von Brandstätten bei Nacht; an seine Angabe durch einen mit einer elektrischen Batterie in Verbindung gebrachten Draht kranke Theile rasch abzubrennen als erstes Beispiel der für die Chirurgie so wichtig gewordenen Galvanokaustik; an die Vorrichtung, um bei der Richtung des astronomischen Fernrohrs auf den Quecksilberhorizont das Spiegelbild des Fadenkreuzes sichtbar zu machen, wobei er eine Aufgabe, welche optisch derjenigen des viel jüngeren Augenspiegels ganz nahe verwandt ist, mit völlig ähnlichen Mitteln löste; an den für die berühmten spectralanalytischen Versuche von Bunsen und Kirchhoff von ihm construirten Spectralapparat, und endlich an die mit Kobell vor Daguerre gemachte erste Fixirung von Lichtbildern auf Papier, welche als erste Photographien auf Papier noch auf der letzten Nürnberger Ausstellung zu sehen waren. Wahrlich eine reiche Anzahl der wichtigsten, noch jetzt fortwirkenden Leistungen, wie sie nicht leicht ein Gelehrter aufzuweisen vermag.

hatte, diesem merkwürdigen Manne näher zu treten, der wird die Stunden, die er in seinem Umgange zubrachte, nie vergessen. So wenig bestechend sein Vortrag war, so war er doch im Umgang ein ungemein anregender Lehrer für reifere Schüler, bei denen er durch den Reichthum und die Originalität der Gedanken das grösste Interesse für seine Wissenschaft zu erwecken wusste.

So kam es auch, dass der Sohn zeitlebens zu dem Vater, welcher für ihn das Ideal eines Naturforschers war, voll Verehrung aufsah und in Pietät das that, was der Vater forderte, wenn ihm auch die Erfüllung nicht selten recht schwer geworden ist.

Denn der Vater hielt strenge Zucht in seinem Hause, verlangte unbedingten Gehorsam und pünktlichste Ausführung seiner Anordnungen. Er war jedoch durchaus kein finsterer Mann von pedantischem grübelndem Wesen, sondern vielmehr gerne heiterem Leben zugewandt, an dem er auch seine Kinder Theil nehmen liess.

Besondere Anschauungen hatte der Vater sich über die Erziehung gebildet; der gewöhnliche Bildungsgang durch das Gymnasium und die Universität sagte diesem unabhängigen Geiste nicht zu und er wünschte nicht, dass seine Söhne in den Staatsdienst giengen: sie sollten sich ganz durch eigene Kraft durch das Leben durchringen. Er beachtete bei der genialen Leichtigkeit seines Arbeitens nicht, dass nur besonders veranlagte Naturen dies vermögen und der Mittelmässige am sichersten den gewöhnlichen Weg einschlägt.

Durch diesen Widerstand entschloss sich der junge Steinheil, die Nothwendigkeit akademischer Studien erkennend, nach Absolvirung der zweiten Gymnasialklasse Privatstunden im Lateinischen und Griechischen zu nehmen, wozu er sich die vom Vater verweigerten Mittel durch Stundengeben in der Mathematik erwarb, so dass er schon nach einem Jahre (1849) am Gymnasium zu St. Anna in

Augsburg das Absolutorium bestand. Er hörte darnach während eines Jahres (1849/50) als Eleve des ersten Kurses Vorlesungen über Mathematik und Physik an der früheren hiesigen polytechnischen Schule, die ihm jedoch keinen besonderen Gewinn brachten, und gieng dann mit seinen Eltern (1850) nach Wien, wohin der Vater als Sektionsrath in das Ministerium berufen worden war, um in Oesterreich die elektrischen Telegraphen einzurichten. In Wien besuchte er während des Jahres 1850/51 an der Universität und der polytechnischen Schule mathematische, chemische und botanische Vorlesungen bei Moth, Petzval, Schrötter und Unger, und lernte auch hervorragende Naturforscher im elterlichen Hause näher kennen, was für ihn von nachhaltiger Bedeutung war.

Aber bald riss ihn der Wille des Vaters aus diesen regelmässigen Studien heraus; er bestimmte ihn (1851) den Lehrkurs und die Prüfung zur theoretisch-praktischen Heranbildung von Staatstelegraphisten mitzumachen, liess ihn zum Aushilfstelegraphisten mit einem Taggeld von 1 fl. ernennen und beauftragte ihn mit der Herstellung der Telegraphenlinien in der Lombardei. Es war dies eine schlimme Zeit für den jungen wissensdurstigen Mann, eine Zeit voller Anstrengungen und Entbehrungen, denn er musste mit seinen italienischen Arbeitern, mit denen er die harte Arbeit und die ärmliche Kost theilte, die Träger aufrichten und die Drähte ziehen. Nach Lösung dieser Aufgabe schwer krank nach Wien zurückgekehrt, fand er keine Ruhe, denn der Vater hatte die Herstellung des Telegraphennetzes in der Schweiz übernommen und die Einrichtung der Büreaux und die Ueberwachung der Legung der Leitungen sowie die Ausbildung der Obertelegraphisten dem noch nicht zwanzigjährigen Sohne in selbständiger Stellung vorbehalten. Es war eine schwierige, aber dankbare Aufgabe, welche ihm hier zuviel; man erkannte in der Schweiz die Wichtigkeit

der Sache und interessirte sich in allen Kreisen lebhaft dafür; bald hatte sich auch der junge zum Oberinspektor ernannte Mann durch seine Kenntnisse und Energie die lebhafteste Anerkennung der Behörden und des Publikums erworben. Seine Schüler bei den in deutscher und französischer Sprache abgehaltenen Lehrkursen waren älter als er; aber sie haben ihn alle hoch geachtet, wie aus den mit ihm noch später unterhaltenen Beziehungen hervorgeht, und auch er hat sich stets mit Freude und Genugthuung dieser Zeit erfreulicher Wirksamkeit (Februar bis Oktober 1852) erinnert.

Es hätte sich ja wohl daran eine bleibende Stellung anknüpfen lassen, aber es sollte die Aufgabe seines Lebens eine ganz andere werden. Im Herbst 1852 von der Schweiz nach München zurückgekommen, wo der Vater wieder Anstellung gefunden hatte, hörte er an der Universität im Winter- und Sommersemester historische und philologische Vorlesungen, besonders aber die Experimentalphysik bei Simon Ohm, um sich für die Doktorprüfung vorzubereiten. Er war aber auch zu gleicher Zeit Hospitant des Ingenieurkurses an der polytechnischen Schule, wodurch er befähiget wurde, schon im Sommer 1853 das Absolutorium dieser Schule zu erlangen und im Herbst desselben Jahres die theoretische Prüfung für den Staatsbaudienst als Ingenieur zu bestehen. Er glaubte dadurch einen Rückhalt für alle Fälle zu haben. Seit dieser Zeit hatte er in seinem damaligen verehrten Lehrer Bauernfeind einen väterlichen Freund erworben.

Mittlerweile hatte der Vater praktisch-optische Arbeiten begonnen, um die Mittel zum Lebensunterhalte für seine Familie zu verdienen. Er war dazu besonders geschickt, nicht nur durch die frühere Erfindung optischer Instrumente, sondern auch durch deren vortreffliche Ausführung in seiner Werkstätte bei der mathematisch-physikalischen Sammlung der Akademie; er hatte auch in seiner Jugend Fraunhofer's Arbeiten verfolgt und war sogar von diesem aufgefordert

worden als Theilnehmer in sein Institut einzutreten, was er bescheiden abgelehnt hatte. König Maximilian II. ermunterte ihn zu seinem neuen Unternehmen, indem er ihm den Wunsch aussprach, es möchte München als der Vorort für die praktische Optik in Deutschland, der es durch Fraunhofer geworden war, erhalten bleiben. Nach einigen Vorarbeiten konnte im Mai 1855 die optisch-astronomische Werkstätte in Schwabing bei München eröffnet und der erste Prospekt ausgegeben werden. Der Sohn wurde der erste und beste Mitarbeiter bei derselben. Nur mit Mühe und unter Widerstreben des Vaters vermochte er noch die Zeit zu gewinnen, das Doktorexamen zu machen, welches er im Jahre 1855 unter dem Dekanate Liebig's, der mit Scharfblick sein Talent erkannte und ihm stets gewogen blieb, mit der Dissertation: „Tafeln zur Entnehmung der Radien von Fernrohrobjectiven, deren innere Flächen in einander passen" bestand.

Von da an blieb er ganz bei der Optik, welche sein Lebensberuf werden sollte. Er wurde durch den Vater in dessen Ideen und Entwürfe eingeweiht und hatte die Aufgabe dieselben durchzuführen. Es war ihm namentlich die Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen durch die Linsen und das Suchen nach den besten Formen übertragen. Es begann damit für ihn eine Zeit rastlosester Thätigkeit, ein Schaffen ohne Gleichen; Jahrelang hat er, ohne sich eine Erholung gewähren zu dürfen, täglich zwölf Stunden gerechnet; dadurch aber eine so grosse Erfahrung und so eingehende Kenntnisse erlangt, wie sie in diesem Zweige des Wissens wohl noch Niemand gehabt hat. Dieser geistige Erwerb bildete die sichere Grundlage für seine späteren Leistungen; eine kurze Rechnung belehrte ihn später, ob der eingeschlagene Weg zum Ziele führt, und ein Blick in die Rechnungen, ob und welche Fehler die Rechner gemacht hatten. Jene ersten Jahre des Betriebs der Werkstätte waren Steinheils eigentliche Lehrjahre; er fühlte, dass er jetzt in

seinem Elemente sich befinde und befähiget sei, hierin das Beste zu vollbringen.

Im Jahre 1865 zog sich der Vater, welcher eine Sache nur so weit verfolgte, als er glaubte, schöpferisch wirken zu können, von dem optischen Institute zurück, um ausser Problemen der Wissenschaft seinen Neigungen, der Malerei und der Musik, sich hinzugeben. In Folge davon war der Sohn von da an ganz auf seine eigene Kraft angewiesen; er kaufte dem Vater das Geschäft ab, und führte es anfangs mit seinem älteren Bruder Eduard[1]), welcher im Wesentlichen den technischen und kaufmännischen Theil übernommen hatte, später nach dessen Tode allein fort. Und welchen Aufschwung nahm das Institut in kurzer Zeit unter seiner sachkundigen Leitung!

Von Anfang an gieng sein Bestreben dahin, alles Empirische zu verbannen und auf rein wissenschaftliche Weise durch strenge trigonometrische Rechnung, nachdem die optischen Constanten der Glassorten bestimmt waren, die besten Formen zu ermitteln und diese dann mit den feinsten von seinem Vater verbesserten Methoden der Prüfung mittelst des Sphärometers, des Fühlspiegels und der Newton'schen Farbenringe auf das Genaueste auszuführen. Solchen Proben auf die Güte unterlagen auch die Glasarten und die fertigen Instrumente. Es ist ihm dadurch gelungen, eine Anzahl der wichtigsten Neuerungen in die Optik einzuführen.

Steinheil ist in seinen optischen Untersuchungen der direkte Nachfolger Fraunhofer's geworden; er hat da ange-

---

1) Dieser Bruder Eduard, welcher sich ursprünglich für die Maschinenkunde, dann für die Landwirthschaft ausgebildet hatte, war ebenfalls für die Naturwissenschaft begeistert; er war eine Autorität in der Entomologie und besass eine unwiderstehliche Lust ferne Welttheile zu sehen. Er hatte die Insel Elba, Algier und Columbien kennen gelernt; auf seiner zweiten Reise nach Columbien erlag der talentvolle Mann auf der Insel St. Thomas dem Sonnenstich.

schlossen, wo letzterer durch einen allzu frühen Tod die Arbeit abbrechen musste. Stets hat er jedoch dankbarst anerkannt, welche Förderung ihm durch die hervorragenden theoretischen dioptrischen Arbeiten unseres verehrten Mitgliedes Seidel geworden ist.

Fraunhofer hatte durch Verwendung der von ihm im Sonnenspektrum entdeckten fixen Linien eine strenge Rechnung in der Optik ermöglicht; er war dadurch in den Stand gesetzt worden, die Lichtstrahlen durch trigonometrische Rechnung durch ein Linsensystem zu verfolgen, den Einfluss der Halbmesser, der Dicken und der Abstände der Linsen auf die Vereinigungsweiten verschiedener Strahlen zu bestimmen und so die Dimensionen festzustellen, welche für gegebene Glasarten ein möglichst deutliches Bild eines in der Axe gelegenen leuchtenden Punktes ergeben.

Fraunhofer's Fernrohrobjektive mit kleineren Dimensionen erfüllten drei Bedingungen: sie hatten eine bestimmte Brennweite bei gleichzeitiger Hebung des Kugelgestalt- und Farbenfehlers. Bei seinen Fernrohrobjektiven von grösseren Dimensionen kam noch die Wahl der Glassorten in Bezug auf das nach Vereinigung der Hauptfarben noch bleibende sogenannte sekundäre Spektrum hinzu, sowie die von ihm angestrebte Erfüllung einer vierten Bedingung, welche aber trotz eifriger Untersuchungen des berühmten Fernrohrs noch nicht mit Sicherheit festgestellt werden konnte. Alles dieses hatte Fraunhofer durch Anwendung von nur zwei Linsen erreicht und dadurch zuerst bewiesen, dass die Wissenschaft eine zuverlässigere Führerin ist als die Empirie, um unter vielen Möglichkeiten die günstigste Form zu wählen.

Steinheil's erste Aufgabe war, in der Construktion der Fernrohre womöglich über Fraunhofer hinaus zu kommen. Er studirte eingehend das Objektiv desselben und berechnete dann (1861) das von Gauss, dessen Oeffnung im Verhältniss zur Brennweite eine grosse ist, wodurch die Helligkeit be-

trächtlicher als bei dem ersteren Fernrohr wird. Es gelang Steinheil in dieser Beziehung (Grösse des Oeffnungswinkels) noch das von Gauss Geleistete zu übertreffen. Ferner erkannte er es als einen wesentlichen Vortheil, wenn die dauerhaftere Flintglaslinse der aus Crownglas vorausgestellt werde; das Objektiv erhält dadurch stärker gekrümmte Flächen, wodurch das Bild ausser der Axe genauer wird und die unvermeidlichen Reflexbilder weiter vom Objektivbild entfernt werden, so dass sie nicht so störend wirken. Da aber bei den Fernrohren im Wesentlichen nur das Bild in der Axe deutlich zu sein braucht, und das Fraunhofer'sche die dafür nöthigen drei Bedingungen erfüllt, so ist letzteres auf einem so hohen Grad der Vollkommenheit angelangt, dass man es kaum zu überbieten vermag.

Eine ganz neue Form führte dann Steinheil durch die Mikrometerokulare und die vorzüglichen aplanatischen Lupen ein. Früher hatte man bekanntlich als Lupen zumeist nur einfache chromatische Linsen mit ganz geringem Gesichtsfelde und als Okulare nur getrennt stehende einzelne Linsen, welche ebenfalls chromatisch waren und vielfach störende Reflexe zeigten, verwendet. Steinheil setzte die beiden aus drei mit einander verkitteten Linsen, einer biconvexen Crownglaslinse zwischen zwei Flintglaslinsen, zusammen, wodurch er achromatische, von Reflexen freie Bilder erhielt. Seine eigenthümlichen monocentrischen Okulare bestehen ebenfalls aus einer Kugel von Crownglas, welche von zwei Flintglasmenisken eingeschlossen ist, deren Radien sich nur durch die Dicke unterscheiden, so dass alle Radien den gleichen Mittelpunkt haben, der zugleich optischer Mittelpunkt ist; sie zeigen grosse Bildschärfe in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt des Gesichtsfelds und haben mannigfache Anwendung z. B. bei Ringmikrometern gefunden.

Die grösste Aufgabe erwartete Steinheil jedoch durch die Photographenobjektive. Die sich so rasch entwickelnde

Photographie stellte nämlich an die Optik eine Reihe anderer Anforderungen, viel schwierigere als es bis dahin die Astronomie gethan hatte. Auf diesem Felde konnte Steinheil's Methode der Rechnung und der Herstellung der Objektive die bedeutendsten Erfolge erringen. Bei dem astronomischen Fernrohr wird nämlich von dem durch das Objektiv entworfenen Bild gewöhnlich nur ein kleiner centraler Theil durch das Okular betrachtet, wesshalb das Fernrohrobjektiv, wie erwähnt, zumeist nur in der Axe und deren nächster Nähe ein scharfes Bild zu liefern braucht, während es gleichgiltig ist, ob dieses Bild in seiner weiteren Ausdehnung scharf bleibt, d. h. ob es eben oder gekrümmt ist. Bei der Photographie dagegen soll das vom Objektiv entworfene Bild eine grosse Ausdehnung besitzen und in der ganzen Ausdehnung gleich genau sein, es soll ferner vollkommen in einer Ebene liegen und eine grosse Tiefe besitzen, welches letztere dann erreicht ist, wenn die Linse die Fähigkeit hat, von ungleich entfernten Objekten gleichzeitig ein deutliches Bild in der nämlichen Ebene zu erzeugen.

Dabei genügt es nicht wie bei dem Fernrohr nur die Strahlen in der Axe in einem Punkte zu vereinigen, da das Bild eines ausser der Axe liegenden leuchtenden Punktes einen zu grossen Durchmesser erhalten kann; man muss daher in diesem Falle die trigonometrische Durchrechnung auch noch auf einen Bildpunkt ausser der Axe ausdehnen, wodurch die Aufgabe eine viel complizirtere wird. Man hat hier nach den Darlegungen Steinheil's zu berücksichtigen: bei dem Bildpunkt in der Axe: die Brennweite, die Hebung des Kugelgestaltfehlers und des Farbenfehlers; bei dem Bildpunkt ausser der Axe: die Hebung der Farben ausser der Axe, dann der Verzerrung, der Bildkrümmung, des regelmässigen und unregelmässigen Astigmatismus und des Kugelgestaltfehlers ausser der Axe. Die Correktur der drei letzteren Fehler wurde ihm nur durch die von Seidel entwickelten

„trigonometrischen Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen“ möglich. Fraunhofer hatte schon, wie gesagt, bei seinen Fernrohrobjektiven von grösseren Dimensionen ausser den drei Bedingungen für den Bildpunkt in der Axe eine vierte einzuführen gesucht.

Bevor sich Steinheil mit der Construktion photographischer Objektive befasste, existirte nur ein einziger guter Typus, der von dem Mathematiker Petzval in Wien bald nach Erfindung der Daguerreotypie ersonnene; er war aus vier Linsen zusammengesetzt, von denen drei einzeln stehen, und aus drei Glasarten hergestellt. Dieses Petzval'sche Objektiv ist noch immer im Gebrauch, alle anderen, wesentlich neuen Photographenobjektive sind von Steinheil eingeführt worden. Hierin zeigt sich seine vollkommene, einzig dastehende Beherrschung der Theorie am prägnantesten.

Im Laufe der Zeit sind von ihm drei Construktionstypen für Photographen-Apparate ausgegeben worden.

Zuerst das Periskop (1865), welches nur aus zwei symmetrischen Linsen von einer Glasart besteht, also chromatisch und von geringer Helligkeit ist, jedoch ein sehr grosses Gesichtsfeld und eine ganz correkte Zeichnung besitzt. Dieses Instrument wird noch heute trotz seiner Farbenzerstreuung gewünscht, da es in Folge der ausserordentlich einfachen Construktion für seine Leistung sehr billig ist.

Den zweiten Typus nannte er Aplanat, welcher aus vier paarweise verkitteten symmetrischen Linsen von zwei Glasarten besteht. Im Jahre 1866 wurden die ersten Apparate der Art vollendet, im Jahre 1871 die Weitwinkelapparate für Reproduktion von topographischen Landkarten als Lösung einer von dem österreichischen Kriegsministerium gestellten Aufgabe ausgeführt, und im Jahre 1879 die ersten Gruppenaplanate ausgegeben. Diese Aplanaten haben die weiteste Verbreitung gefunden und wurden überall unter den ver-

schiedensten Namen nachgemacht. In ihnen finden sich die Elemente für alle Bedingungen; nur eines dieser Elemente, der Astigmatismus, ist darin noch nicht berücksichtiget.

Der dritte Typus ist der im Jahre 1881 entstandene Antiplanet. Derselbe beruht auf einem ganz neuen, höchst geistreich erdachten Prinzip, indem durch eine vordere Doppellinse alle Fehler absichtlich gross gemacht und dann durch ein zweites Linsenpaar vollständiger, als dies sonst möglich war, korrigirt werden. Er besteht aus nur vier paarweise verkitteten nicht symmetrischen Linsen von nur zwei Glasarten, und es ist in ihm auch der letzte Fehler, der des Astigmatismus, fast ganz gehoben. Dieser Antiplanet, ein Instrument von denkbar grösster Einfachheit, erforderte unendlich mühsame Berechnungen, bis die Möglichkeit der Anwendung des Prinzips erkannt war, er hat aber auch zu einem glänzenden Resultat geführt. In Folge der in dem letzten Jahrzehnt in der Glastechnik gemachten grossen Fortschritte haben Andere versucht, diesen Steinheil'schen Antiplanet noch zu verbessern.

Von Steinheil wurde die von dem deutschen Reiche zur Beobachtung des Venusdurchgangs im Jahre 1874 ausgesandte Expedition mit vortrefflichen photographischen Fernrohrobjektiven ausgestattet.

Zuletzt fesselte ihn die wichtige Aufgabe der Herstellung von Instrumenten zur Photographie der Himmelskörper. Bei den Pariser Verhandlungen, welche die einheitliche photographische Aufnahme des Fixsternhimmels vorzubereiten hatten, vermochte er darzuthun, welchen Bedingungen ein astrophotographisches Objektiv zu genügen hat, woraufhin er zunächst das Potsdamer Observatorium mit Apparaten der Art versorgte, welche schon manche neue Aufschlüsse geliefert haben.

Steinheil's astrophotographische Objektive bedingen einen erheblichen Fortschritt in der Wissenschaft, mit dem sein

Name stets verknüpft bleiben wird, denn sie gestatten die Stellung der Sterne noch nach Jahrhunderten zu ersehen und die Veränderungen derselben zu erkennen. Die hiesige Sternwarte, welche überhaupt kein grösseres Instrument von Steinheil besitzt, ist wegen Mangel von Mitteln leider nicht in der Lage, sich an diesem durch unseren Mitbürger ermöglichten geistigen Wettkampfe zu betheiligen.

Die Hauptschwierigkeiten bei der Berechnung optischer Construktionen liegen darin, für den jeweiligen Fall die richtige Reihenfolge zu finden, in welcher alle die nothwendigen Bedingungen erfüllt werden müssen, und direkt vergleichbare Fälle für die Auswahl herzustellen, sowie auch die in Bezug auf ihr Brechungs- und Zerstreuungsvermögen passenden Glasarten zu wählen. Steinheil liess nie ab, immer wieder zu prüfen, ob sich der Zweck nicht vollständiger und mit einfacheren Mitteln erreichen lasse. Er besass ausserdem ein ganz besonderes Geschick in der Erfindung von Methoden, nach welchen genaue Formen hergestellt werden können, ohne vom Arbeiter besondere Kenntnisse zu verlangen, wobei er zumeist von aus der Mathematik bekannten Sätzen ausgieng. Um z. B. eine genaue Planfläche herzustellen, liess er, ganz unabhängig von Withworth und Anderen, drei Flächen schleifen, von welchen jede auf jede der beiden anderen passt, denn in diesem Falle mussten auch die Flächen eben sein. War ihm ferner die Aufgabe gestellt, ein Prisma zu machen mit einem Winkel von genau 90° und zwei Winkeln von genau 45°, so gieng er von den beiden geometrischen Sätzen aus, dass im Quadrat jeder Winkel ein rechter ist und dass im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck die Winkel an der Hypothenuse einander gleich und von 45° sind.

Aus der optisch-astronomischen Werkstätte Steinheil's, welche im Jahre 1862 aus Schwabing nach München in die Landwehrstrasse verlegt und im Jahre 1890 in ein eigens

für diesen Zweck auf der Theresienhöhe errichtetes grosses Gebäude transferirt wurde, sind Tausende von kleinen und grossen Fernrohren, Prismen, Photographenapparaten etc. in alle Welttheile ausgegangen und haben seinen Namen als den eines der erfindungsreichsten und sorgfältigsten Optiker aller Zeiten bekannt gemacht. Seine Kenntnisse und seine Energie haben das berühmte Institut geschaffen; sein Geist wird in letzterem noch ferner walten. Die in seine Fussstapfen Tretenden haben jetzt leichtere Mühe das von ihm Erdachte weiter fortzuführen.

Steinheil hat durch seine optischen Untersuchungen und die Herstellung optischer Instrumente nicht nur indirekt die Wissenschaft gefördert, sondern sich auch direkt an der Erweiterung derselben betheiligt. In manchen exklusiven Kreisen der Gelehrten sieht man zwar noch immer nur die ganz ideale, auf keinen praktischen Nutzen gerichtete Thätigkeit als die wissenschaftliche an und hält eine Beschäftigung um so weniger für eigentlich wissenschaftlich und für würdig, je mehr sie einer direkten Anwendung fähig ist. Aber hören wir denn nicht so oft sagen, dass jede durch die Wissenschaft festgestellte Thatsache, auch die allerabstrakteste, einmal ihre Bedeutung für das menschliche Leben gewinnt, eine Bedeutung, welche zumeist Niemand vorzuahnen im Stande ist? Und soll es für den Forscher einen Unterschied machen, ob dieser Nutzen erst nach Hunderten von Jahren oder alsbald sich einstellt? Der Entdecker neuer Gebiete und Thatsachen in der Wissenschaft erkennt nicht selten bei einem gewissen Stande des Wissens auch zuerst deren Anwendbarkeit und findet wohl auch am besten den richtigen Weg dazu. In solcher Weise wurde Lavoisier der erste praktische Hygieniker, denn er hat sich nach der Erkenntniss der Rolle des Sauerstoffs im Thierkörper viel mit der Beschaffung reiner Luft und mit anderen Fragen der öffentlichen Gesundheitspflege befasst. Gerade unsere Aka-

demie bietet in ihrer Vergangenheit leuchtende Beispiele dafür, dass die grössten Gelehrten es nicht verschmäht haben, die Früchte ihrer wissenschaftlichen Arbeit zum Wohle der Menschheit zu verwerthen. Liebig wurde auf Grund seiner chemischen Untersuchungen der Begründer des rationellen Ackerbaues; der edle Fraunhofer, gegen dessen Aufnahme in die Akademie als eines Autodidakten und Praktikers von mancher Seite Bedenken bestanden, stellte in seinem optischen Institut die ersten genauen achromatischen Fernrohre her, mit denen er, wie die von Utzschneider ihm gesetzte stolze Grabschrift aussagt: approximavit sidera; es ist schon erwähnt worden, wie der geistvolle Steinheil, der Aeltere, zuerst die Apparate für die elektrische Telegraphie brauchbar zu gestalten wusste, wodurch er der Kultur einen der grössten Dienste erwies. Sollen dies Alles wirklich keine wissenschaftlichen Werke gewesen sein? In der That, seitdem auf vielen Gebieten die Praxis nicht mehr eine Empirie ist, sondern nichts Anderes als Wissenschaft, ist hierin die Grenze zwischen Theorie und Praxis nicht mehr zu bestimmen. Den Entscheid, ob eine Leistung eine wissenschaftliche ist oder nicht, liefert nur die dabei benützte Methode. Häufig gehört auch zur Herstellung nutzbarer Dinge auf wissenschaftlichem Wege mehr Geist und schöpferische Kraft als zu einer rein wissenschaftlichen Thätigkeit auf schon längst gebahnten Wegen. Und dass Steinheil bei seinen Arbeiten nach streng wissenschaftlicher Methode verfuhr, das weiss Jeder, der sie kennt.

Er hatte auch auf dem Höhepunkt seines Lebens die grosse Freude sich als Mann der Wissenschaft voll anerkannt zu sehen. Unsere Akademie, in welcher sich Männer befinden, die als erste Sachverständige auf dem Gebiete der Optik gelten, hat ihn im Jahre 1888 zum ausserordentlichen Mitgliede gewählt. Bei dem vorher erwähnten internationalen Congresse in Paris (1887), bei welchem die Methoden der

photographischen Aufnahmen des Sternhimmels festgesetzt werden sollten, hat der deutsche Optiker mit Alle überzeugender Klarheit und Sicherheit seine gereiften Anschauungen hierüber dargelegt, denen sich die illustre Versammlung einstimmig anschloss. Als im Jahre 1891 die internationale astronomische Gesellschaft dahier ihre Versammlung abhielt, konnte er den sachkundigen Gelehrten seine neue Werkstätte mit ihren vollendeten Einrichtungen zeigen; Alle haben damals die Ueberzeugung gewonnen, dass sie eine auf wissenschaftlicher Grundlage ruhende Anstalt gesehen haben. Ein Zeichen der Anerkennung seiner Verdienste um die Wissenschaft war es auch, dass er im Jahre 1887 zum Mitgliede des Kuratoriums der physikalischen-technischen Reichsanstalt, deren Vorstand Helmholtz ist, ernannt wurde, wo sein erfahrener unparteiischer Rath gerne gehört wurde.

In seiner Liebe zur Wissenschaft hat er in uneigennützigster Weise Alles zu ihrer Förderung gethan. Wie oft haben sich Astronomen und Physiker, welche zu einem besondern Zweck eines optischen Apparates bedurften, an Steinheil gewendet, der denselben ersann und herstellte, ohne für seine geistige Thätigkeit und besondere Mühe einen Preis in Ansatz zu bringen. Bei Gelegenheit der 100jährigen Geburtstagsfeier Fraunhofer's machte er zu Gunsten der hiesigen technischen Hochschule eine Stiftung von 10000 Mark zur Errichtung einer optischen Prüfungsstation, in welcher von sachkundiger Seite Prüfungen optischer Instrumente vorgenommen werden können; es war sein Wunsch dadurch den wissenschaftlichen Betrieb der Mechanik und Optik in München, wo die Werkstätten von Utzschneider, Fraunhofer, Reichenbach und Ertel blühten und in der Bevölkerung noch so viel Talent für solche Arbeiten sich findet, zu fördern; allerdings scheint von diesem hochherzigen Geschenk in weiteren Kreisen nichts bekannt geworden zu sein. Das gemeinschaftlich mit Ernst Voit herausgegebene verdienst-

volle Handbuch der angewandten Optik, an dem beide Autoren den gleichen Antheil haben, ist ein Hilfsbuch für den ausübenden Optiker, um ihm ein klares Bild von der Leistung optischer Systeme zu verschaffen und ihn in den Stand zu setzen, die Berechnung derselben mit wissenschaftlicher Strenge durchzuführen. Steinheil hat darin alle seine Methoden der Oeffentlichkeit preisgegeben, damit sie Gemeingut und Anderen nutzbar würden und es nicht so gehe, wie mit den leider verloren gegangenen Methoden Fraunhofer's. Wo aber fände sich ein zweiter, der in gleichem Falle so uneigennützig gehandelt hätte?

Durch die frühzeitige intensivste, lange Zeit sein ganzes Denken in Anspruch nehmende Beschäftigung mit einem besonderen Zweige des Wissens, ohne die er nie sein Ziel erreicht hätte, erhielt er scheinbar eine gewisse Einseitigkeit. Er besass jedoch auch für andere Dinge ein lebhaftes Interesse. Mit den einheimischen Pflanzen, Käfern und Schmetterlingen war er, wie sein Vater und Bruder, in seltenem Grade vertraut; er kannte genau ihre Fundorte und Lebensweise, so dass Spaziergänge mit ihm für den Naturfreund zu einem wahren Genusse wurden. Gerne und mit Verständniss folgte er Erörterungen über schwierige, noch nicht aufgeklärte Fragen aus ihm sonst ganz fremden Gebieten und wusste nicht selten den Kernpunkt zu finden und auf den richtigen Weg zu leiten. Der hiesigen Stadt hat er während 12 Jahren (1869—1881) als Gemeindebevollmächtigter namentlich durch seine rechnerischen Kenntnisse und seinen leichten Ueberblick bei Aufstellung des städtischen Haushaltes und auch auf dem Gebiete der Volksschule erspriessliche Dienste geleistet, wobei er sich die intimste Freundschaft des unvergesslichen Bürgermeisters Erhardt erwarb.

Das Bild von Steinheil's Wirken und Wesen wäre unvollständig, wenn man nicht auch seiner Charaktereigenschaften gedenken würde. Bei so Manchem entspricht die

Ausbildung des Charakters nicht der des Geistes; wir vermögen ihn ob letzterer zu bewundern, ihn aber ob ersterer nicht zu lieben. Steinheil ist durch ruhiges und tiefes Nachdenken über sich und die Welt sowie durch sein Handeln darnach zu einem der edelsten Menschen geworden.

Wer ihn nur oberflächlich kennen lernte, bemerkte an ihm eine auffallende, manchmal fast zu gross erscheinende Bescheidenheit. Diese hatte er nicht, weil er seine Person zu niedrig stellte, denn er wusste für sich im Stillen recht wohl, was er werth war; sie entsprang vielmehr einer gewissen Verlegenheit und Unbeholfenheit im Umgang mit Leuten, die ihm noch fremd waren, aber auch der aufrichtigen Hochachtung für jegliches Verdienst. Von einer ungewöhnlichen Milde im Urtheil gegen Andere hat ihn wohl Niemand in aufbrausendem Zorne gesehen; nur dann konnte er indignirt und sogar scharf seine Meinung äussern, wenn er eine Unwahrheit wahrnahm. Es währte darum lange, bis er von einem Menschen Böses dachte, aber es gelang schwer, wenn er einmal aus einem solchen Grunde gegen Jemanden eingenommen war, ihm eine bessere Meinung über ihn beizubringen.

Von einer unendlichen Liebe war er für seine Mitmenschen erfüllt. Von den reichen Mitteln, die er sich durch seinen Fleiss erworben, hat er den edelsten Gebrauch gemacht und unendlich viel Gutes und Segensreiches gestiftet. Vielen Menschen hat er geholfen und in einer Weise, dass sie die Wohlthaten nicht drückend, sondern als eine wahre Herzensfreude des Gebers empfanden. Für jeden seiner vielen Arbeiter war er ein sorgender Freund; sie wussten aber auch, was sie an ihm hatten und suchten es ihm durch treue Anhänglichkeit zu vergelten. Es war ein wahres Wort, was ein auswärtiger Fachgenosse an seinem Grabe aussprach: die soziale Frage wäre wohl bald gelöst, wenn alle Arbeitgeber so dächten und handelten wie Steinheil.

Sein Nachdenken hat ihn auch dazu geführt, die Welt trotz aller ihrer Unvollkommenheit als gut und weise eingerichtet zu betrachten, und er konnte gegen pessimistische Anschauungen lebhaft ankämpfen. Das Schlimme wusste er immer wieder zum Guten auszulegen und sich und Andere zu beruhigen. Das Unvermeidliche und das Unglück betrachtete er als nothwendige Folge der gegebenen Bedingungen, und er war sich klar darüber, dass der Mensch von der Natur nicht ausgenommen sei, sondern einen Theil derselben bilde. In diesem Sinne ertrug er die Abnahme seines Sehvermögens und den Verlust des einen Auges mit wahrhaftem Heldenmuth, während er der Verfeinerung dieses Sinnesorganes für die übrigen Menschen seine ganze geistige Kraft widmete.

Man kann ermessen, was ein Mann von solcher Gesinnung seinen Freunden sein musste. Er war für sie von unwandelbarer Treue, voller Theilnahme im Glück und Unglück, von geradezu rührender Aufmerksamkeit und Aufopferung. Sie allein haben die ganze Fülle von Edelsinn, dessen der nach Aussen hin so anspruchslos erscheinende Mann fähig war, erkennen können.

In einer Zeit, in welcher selbst in der Wissenschaft so Viele nicht mehr mit reinem Sinne ausschliesslich die Wahrheit suchen, sondern sie zu einem Tummelplatz niedriger egoistischer Leidenschaften machen, erfreut und erhebt man sich an dem Lebensbilde eines nur dem Idealen zugewandten Mannes wie Steinheil. Er hat die ihm verliehenen Gaben dazu benützt, unser Wissen und Können zu vermehren, und indem er Andere beglückte, ist er selbst glücklich gewesen.

Ernst Eduard Kummer.

Ernst Eduard Kummer[1]) war geboren zu Sorau in der Niederlausitz hart an der schlesischen Grenze den 29. Januar 1810. Schon 1813 verlor er seinen Vater und der Mutter fiel es bei knappen Mitteln schwer, ihn studiren zu lassen.

Er besuchte das Gymnasium seiner Vaterstadt und bezog 1828 die Universität Halle, wo er unter der Leitung von Professor Scherk sich der Mathematik widmete. Im 3. Studienjahre löste er eine mathematische Preisfrage und wurde auf Grund dieser Arbeit 1831 zum Doktor promovirt.

Von 1832—1842 wirkte Kummer als Gymnasiallehrer in Liegnitz. Hier legte er den Grund zu seinem künftigen Ruhme durch verschiedene Arbeiten, vorzugsweise dem Gebiete der Reihenlehre und der Integralrechnung angehörig; hervorzuheben ist hier das Liegnitzer Programm „Ueber eine Differentialgleichung 3. Ordnung" 1834, und ganz besonders seine Arbeit über die hypergeometrische Reihe (1836), in welcher er die berühmte Abhandlung von Gauss über diese Reihe fortsetzte und in würdiger Weise ergänzte. Diese Arbeiten verschafften ihm schon 1839 die Ernennung zum correspondirenden Mitglied der Berliner Akademie und 1842 die Berufung an die Universität Breslau.

In der Breslauer Periode von 1842—55 waren es zumeist zahlentheoretische Untersuchungen, die ihn beschäftigten. Auf diesem abstrakten Gebiete zeigte sich ganz besonders sein Scharfsinn und das tiefe Eindringen seines Geistes. Seine Abhandlung „über die aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen" (1845), in welcher er den neuen Begriff der „idealen complexen Prim-Faktoren" einführt und genau definirt; seine Untersuchungen über einen

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Gustav Bauer.

Satz von Fermat, dessen allgemeinen Beweis er zuerst erbrachte (1850), verschafften ihm den grossen Preis der Berliner Akademie.

Wie hoch damals das Ansehen Kummer's gestiegen war, geht wohl am besten daraus hervor, dass er 1855 Nachfolger Dirichlet's an der Berliner Universität, wie in der Akademie wurde. Es ist bemerkenswerth, dass Kummer in dieser letzten Periode seines Wirkens sich von den abstrakten Problemen der Zahlentheorie immer mehr den concreteren Problemen der Geometrie zuwandte. In diese Periode fällt seine berühmte Abhandlung „Ueber die allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlsysteme" (1860); seine Abhandlung über Flächen 4. Grads, auf denen Schaaren von Kegelschnitten liegen, und 1864 die Entdeckung der Fläche 4. Ordnung, die durch eine merkwürdige Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen ausgezeichnet ist und als „Kummer'sche Fläche" allen Mathematikern bekannt ist. Auch auf das Gebiet der Physik griff er über; seine Untersuchung über Strahlsysteme führten ihn auf die atmosphärische Strahlenbrechung; seine Vorträge an der Kriegsschule über ballistische Probleme auf physikalische Untersuchungen über den Luftwiderstand.

Kummer war ein ausgezeichneter Lehrer und hatte Freude am Lehren. Erst im Alter von 74 Jahren stellte er seine Vorlesungen ein und lebte fortan in stiller Zurückgezogenheit nur für seine zahlreiche Familie, bis ihn 9 Jahre später am 14. Mai 1893 ein Anfall von Influenza dahinraffte. Er war lange Zeit das Haupt der Berliner mathematischen Schule und der bedeutendste Vertreter dieser Wissenschaft in Deutschland.

Moritz Abraham Stern.

Moritz Abraham Stern[1]) war ein Schüler von Gauss und verbrachte seine ganze Gelehrten-Laufbahn als Professor der Mathematik zu Göttingen. Seit 1850 Mitglied unserer Akademie, hatte er das seltene Glück weit über das gewöhnliche Zeitmaass hinaus für die Wissenschaft thätig sein zu können. Seine zahlreichen und werthvollen Arbeiten, fast sämmtlich in dem Crelle'schen Journal veröffentlicht, erstrecken sich auf einen Zeitraum von 60 Jahren und ziehen sich durch 100 Bände des Journals hindurch. 1830 erschien seine erste Arbeit im 6. Bande des Journals und 1890 seine letzte im 106. Bande. Die meisten seiner Arbeiten, darunter auch seine erste und seine letzte Publikation, liegen auf dem Gebiete der höheren Arithmetik oder Zahlentheorie. Andererseits aber verdankt man ihm viele schätzbare Untersuchungen in verschiedenen Theilen der algebraischen Analysis, so insbesondere über die Theorie der Bernoulli'schen Zahlen und über die Theorie der Kettenbrüche. Ferner gehört hieher seine Abhandlung „über die Auflösung der transscendenten Gleichungen", eine von der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gekrönte Preisschrift (1840), und, als wichtige Ergänzung hiezu, seine Abhandlung „Ueber die Anwendung der Sturm'schen Methode auf transscendente Gleichungen" (1846). Als selbständiges Werk erschien 1860 sein vortreffliches und allbekanntes „Lehrbuch der algebraischen Analysis". Er ist im 87. Lebensjahre am 30. Januar 1894 zu Zürich im Hause seines Sohnes, des Historikers Alfred Stern, gestorben.

---

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Gustav Bauer.

John Tyndall.

In den weitesten Kreisen bekannt war der hervorragende englische Physiker und Naturforscher John Tyndall, der am 4. Dezember 1893 auf seinem Landsitze Hind Head bei Haslemere im 74. Lebensjahre verschieden ist. Er konnte sich nicht wie so viele seiner mit Glücksgütern gesegneten Landsleute sorgenlos seiner Ausbildung und seinen ersten Studien hingeben, denn armer Leute Kind musste er sich die Mittel dazu selbst erwerben. Er war zuerst als Gehilfe bei der trigonometrischen Vermessung Englands und dann beim Eisenbahnbau beschäftigt, wodurch er nach zehnjähriger Arbeit sich so viel erspart hatte, um das ersehnte Ziel, eine Universität besuchen und naturwissenschaftliche Studien betreiben zu können, zu erreichen. Es ist ein für unsere Universitäten ehrenvolles Zeugniss, dass ein Mann wie Tyndall nach Deutschland kam, um sich Wissen zu erwerben. Er begab sich zunächst, schon 28 Jahre alt, mit seinem Landsmann Frankland nach Marburg, wo er neben Mathematik und Physik die Chemie bei dem vorzüglich auf dem Grenzgebiete der Physik und Chemie thätigen Bunsen betrieb und auch die Doktorwürde erwarb. Darauf ging er nach Berlin, um bei Gustav Magnus zu arbeiten, in dessen Laboratorium damals eine ungewöhnlich grosse Anzahl talentvoller junger Naturforscher mit Problemen der Physik beschäftigt war. Tyndall untersuchte daselbst die Erscheinungen an einem Wasserstrahl, dann in Gemeinschaft mit Knoblauch, dem jetzigen verdienstvollen Präsidenten der Kais. Leopoldinischen Akademie der Naturforscher, das Verhalten krystallisirter Körper zwischen den Polen eines Magneten.

Diese Arbeiten, welche ein ungewöhnliches Talent verriethen, lenkten die Aufmerksamkeit der englischen Gelehrten auf den aufstrebenden Physiker; denn nach seiner Rückkehr nach England erhielt er alsbald eine Lehrstelle am Queenwood

College, dann an der Royal Society und im Alter von 33 Jahren die Professur der Physik an der Royal Institution zu London als der Nachfolger des genialen Thomas Young und von Faraday, des grössten Experimentators seiner Zeit. Und nun begann für Tyndall eine an Erfolgen reiche wissenschaftliche Thätigkeit. Seine rein physikalischen Forschungen erstreckten sich über fast alle Theile dieser Wissenschaft; man verdankt ihm namentlich die wichtigsten Bereicherungen der Lehren von dem durch Faraday entdeckten Diagmagnetismus, der Polarisation des Lichtes, der Wärmestrahlung und der Akustik.

Tyndall hat sich jedoch nicht nur auf dem Gebiete der Physik Verdienste erworben; er war ein umfassender Geist, der überall in der Natur Probleme für seine Forschung fand.

Er hat sich bei der Lösung der so ungemein wichtigen Frage nach der Entstehung der niedersten Organismen betheiliget, ob dieselben sich aus den Nährlösungen von selbst, durch sogenannte Urzeugung bilden können oder ob ihr Auftreten stets einen schon vorhandenen Keim oder eine Organisation voraussetzt. Es gelang ihm als einem der ersten in der Luft das Vorkommen von Milliarden von Keimen nachzuweisen, welche auch da noch sich finden, wo man sie früher zerstört zu haben glaubte; auch gab er im Anschlusse an die Versuche von Schwann, M. Schultze, Schröder und Dusch, Hofmann etc., Methoden an, durch welche man jene Keime sicher zu tödten vermag. Er hat sich dadurch, namentlich durch seine Abhandlung über Staub und Krankheit, um die Ausbildung der jetzigen Lehre von der Fäulniss und Gährung, wodurch man auch ganz andere Anschauungen über die niedersten Organismen als Krankheitserreger erhalten hat, sehr verdient gemacht. Er war der Ansicht, die ersten Keime des Lebendigen wären durch Meteore von entwickelteren Weltkörpern auf unsere Erde gebracht worden.

Von mächtiger Wirkung waren seine auf mühsamen Wanderungen gemachten Beobachtungen über das Entstehen

und die Natur der Gletscher, über die Bewegung derselben und über die physikalischen Eigenschaften sowie die Bildung des Eises. Es haben diese seine Forschungen viel zu der regen wissenschaftlichen Untersuchung der Alpen beigetragen.

Auch ist sein Antheil an der Feststellung und der Anwendung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, welches er in allen seinen Schriften consequent durchführte, zu erwähnen.

Sehr bemerkenswerth und von grossem Erfolge begleitet waren Tyndall's Bemühungen, das durch die Wissenschaft Erkannte dem Volke in verständlicher Weise zugänglich zu machen; er wollte das Wissen verbreiten, um das leibliche und geistige Wohl des Menschengeschlechtes zu fördern. Als eifriger Wanderlehrer hielt er durch Klarheit der Darstellung und Gedankenreichtum wahrhaft mustergiltige Vorträge: über die Wärme, den Schall, das Licht, die Elektrizität etc. welche auch durch treffliche Uebersetzungen seiner Fachgenossen und Freunde Helmholtz und Wiedemann dem deutschen Publikum bekannt geworden sind.

Tyndall war ein tiefer Denker, der sich nicht nur mit den nächsten Ursachen einer Erscheinung befasste, sondern auch die gemeinschaftliche Ursache für eine grössere Gruppe von Erscheinungen zu finden trachtete, und sich viel mit der Frage der Wege und der Grenzen der menschlichen Erkenntniss abgab. Eine zur Eröffnung der Jahresversammlung der British Association zu Belfast gehaltene Rede über Naturwissenschaft und Offenbarung rief leidenschaftliche Anklagen der Orthodoxen gegen ihn hervor; man wird in späteren Jahren nicht mehr verstehen, wie es möglich war, die Naturforscher zu bekämpfen, welche in ihrer Wissenschaft ausschliesslich die Erscheinungen festzustellen und die Ursachen der Dinge zu suchen haben, aber in der Offenbarung kein Objekt für ihre Forschung finden.

Tyndall hat durch seinen Aufenthalt an deutschen Uni-

versitäten das Wesen der deutschen Naturforscher näher kennen und schätzen gelernt und namentlich durch seine Freundschaft mit Helmholtz die Beziehungen der englischen und deutschen Gelehrten inniger gestaltet und dadurch beiden Theilen wesentliche Dienste erwiesen. Es ist mit Tyndall ein Forscher von grossem Scharfsinn und von unermüdlicher Ausdauer in der Arbeit dahingegangen, der die Wissenschaft über Alles liebte und in uneigennützigster Weise seine Mittel zu ihrer Unterstützung sowie zur Beförderung des Wohles der Menschheit verwendete. Man wird ihn stets zu den bedeutendsten Naturforschern unserer Zeit zählen.

Heinrich Rudolf Hertz.

Durch den am 1. Januar 1894 erfolgten frühzeitigen Tod des Professors der Physik an der Universität zu Bonn, Heinrich Rudolf Hertz, hat die Naturwissenschaft einen der schmerzlichsten Verluste erlitten.

Hertz wollte sich anfangs dem Baufache zuwenden und besuchte zu diesem Zwecke die technischen Hochschulen zu Dresden und Berlin; aber immer mehr trat bei ihm die lebhafteste Neigung für die Mathematik und die Physik hervor, so dass er sich bald ganz dem Studium derselben, zuerst in München und dann in Berlin bei Helmholtz, widmete. In kürzester Zeit hatte sich der ausserordentlich talentvolle junge Mann, namentlich durch seine mit grösstem Scharfsinn erdachten und mit seltener Beherrschung der Mittel durchgeführten elektrischen Versuche an die Spitze der Physiker gestellt. Nachdem schon vor ihm Manche, wie Faraday und besonders Maxwell, gewisse Beziehungen des Lichtes und der Elektrizität angenommen und glaublich zu machen versucht hatten, ferner Bezold dieselben durch höchst bemerkenswerthe, von Hertz voll anerkannte Versuche erwiesen hatte, gelang es Letzterem den sicheren Beweis des innigen Zusammenhanges von Licht und Elektrizität zu führen. Er zeigte in

seinem berühmten Buche „über die Ausbreitung der elektrischen Kraft", dass die elektrischen Wirkungen sich wie die Lichtwellen ausbreiten, dass sie ebenfalls auf Schwingungen des Aethers beruhen, dass die elektrischen und magnetischen Schwingungen wie die des Lichtes transversale sind, dass sie sich mit der nämlichen Geschwindigkeit wie die des Lichtes fortpflanzen, dass sie durch metallische Wände reflektirt, durch Hohlspiegel gesammelt, durch Prismen aus Asphalt gebrochen werden, durch Isolatoren wie die Lichtwellen durch Glas hindurchgehen, und die Erscheinungen der Polarisation zeigen können. Er hat die Länge der elektrischen Wellen gemessen und gefunden, dass sie viel grösser sind wie die Lichtwellen und eine Länge von mehreren Metern besitzen. Die Wellenbewegungen von einer sehr grossen Anzahl von Schwingungen in der Sekunde erregen unsere Netzhaut und bringen in uns die Empfindung des Lichtes hervor, bei einer geringeren Anzahl von Schwingungen haben wir die dunkeln Wärmestrahlen mit ihrer Wirkung auf die Thermosäule, und bei einer noch geringeren Anzahl die elektrischen Wellenerscheinungen.

Durch das hohe Interesse, welches diese Entdeckungen von Hertz bei jedem denkenden Menschen erregen mussten, ist sein Name auch ausserhalb der engeren Fachkreise weithin bekannt geworden; man durfte die grössten Hoffnungen in die fernere Thätigkeit des noch nicht 37 Jahre alten, in vollster geistiger Kraft stehenden Forschers setzen, welche nun durch sein Hinscheiden vernichtet sind.

Hertz war eine vornehme Natur, von edelster Gesinnung und tief bescheidenem Wesen. Noch wenige Wochen vor seinem Tode hat der schwer leidende Mann in einem an mich gerichteten Schreiben (vom 26. November 1893), in welchem er mich ersuchte, der Akademie, die ihn zu ihrem Mitgliede erwählte hatte, seinen Dank auszusprechen, dieser Bescheidenheit den rührendsten Ausdruck gegeben. Ich

kann es mir nicht versagen, in diesen seinem Andenken gewidmeten Zeilen seine Worte wiederzugeben; er schreibt: „Gleichzeitig aber bitte ich Sie auch, freundlichst der Vermittler meines Dankes an die Akademie selbst sein zu wollen, welche mir eine so grosse Freude bereitet hat und mir eine Ehre erwiesen hat, die mir unendlich theuer ist. Mit gerechtem Stolze erfüllt mich der Gedanke, nun in einen Kreis aufgenommen zu sein und ihm zugerechnet zu werden, welcher mir, wie ich mich wohl erinnere, schon während meiner Studienzeit in München als eine hoch und unerreichbar über mir schwebende Verkörperung idealen wissenschaftlichen Strebens erschien. Mit Schmerz erfüllt es mich freilich auch, dass ich nun in diesem Kreise nicht mehr diejenigen Männer begrüssen kann, welche damals in engerem Sinne meine Lehrer waren; vor allen wünschte ich gar zu gern den von mir hochverehrten v. Beetz noch als Collegen die Hand schütteln zu können, dessen einfache Gewissenhaftigkeit in der Forschung und milde Freundlichkeit als Lehrer mir immer als Vorbild vorgeschwebt hat. Doch dies liegt im natürlichen Lauf der menschlichen Dinge und auch so fühle ich durch diese Aufnahme dankbar die Vorstellungen und Empfindungen in mir aufleben, mit welchen es mir vergönnt war, mich in München zuerst der reinen Wissenschaft zuzuwenden".

Für alle Zeiten wird man gedenken, dass Hertz es war, der das neue grosse Gebiet der elektrischen Wellen und Strahlen durch Experimente erschlossen hat, welche der Ausgangspunkt für heute noch ungeahnte weitere Erkenntnisse sein werden.

Alexander Theodor v. Middendorff.

Der angesehene russische Naturforscher und Reisende Alexander Theodor von Middendorff ist am 28. Januar 1894 auf seinem Gute zu Hellenorm in Livland in einem Alter

von 78½ Jahren nach Vollendung seiner Lebensaufgabe gestorben. In St. Petersburg geboren, studirte er an der Universität Dorpat Medizin und erwarb sich daselbst den Grad eines Doktors der Heilkunde. Seine Begabung sowie auch die Neigung noch wenig bekannte Länder zu sehen und deren Fauna und sonstige Eigenart kennen zu lernen, führten ihn zu eingehenden naturwissenschaftlichen Studien, welche er an den Universitäten zu Berlin, Erlangen, Wien und Breslau eifrig oblag. Durch dieselben wohl vorbereitet, wurde er nach der Rückkehr in sein Vaterland zum Adjunkten des Professors für Zoologie an der Universität Kiew bestellt, begann aber ein Jahr darauf im Alter von 25 Jahren seine umfassenden Reisen, für welche er durch glückliche Eigenschaften des Körpers und Geistes in hohem Grade geeignet war.

Die erste Reise führte ihn mit der von Carl Ernst v. Baer geleiteten Expedition an das weisse Meer und nach Lappland, wo ihm die Aufgabe zufiel, die Vogelwelt des hohen Nordens zu studieren. Dadurch wurde man in den Kreisen der kais. russischen Akademie der Wissenschaften auf ihn aufmerksam und erwählte ihn, nachdem er vorher zum ausserordentlichen Professor der Zoologie in Kiew ernannt worden war, zum Leiter der auf Veranlassung der Akademie ausgesandten grossen Expedition in den äussersten Norden und Osten Sibiriens, wobei er durch das Pamirland bis an den Amur vordrang. In Folge der glücklichen Ergebnisse dieser kühnen und für die Naturgeschichte überaus fruchtbaren Reise wurde er Adjunkt für Zoologie an der Petersburger Akademie, dann ausserordentliches und ordentliches Mitglied und später Sekretär und Ehrenmitglied dieser Akademie, zu deren bekanntesten Mitgliedern er zählte. Er hat darnach noch mehrere Reisen gemacht; mit dem Grossfürsten Alexis Alexandrowitsch nach der Krim und durch das Mittelmeer nach Teneriffa, Orotava und den Cap Verdischen Inseln; dann mit dem Grossfürsten Wladimir Alexandrowitsch in das mittlere und südliche

Sibirien an den Altai bis zur chinesischen Grenze; mit dem Grossfürsten Alexei nach dem Norden Russlands, nach dem Weissen Meer, Nowaja Semlja und Island; hierauf noch seine berühmte Reise in das Ferghana-Gebiet und endlich eine letzte abermals in den Norden Russlands.

Die Resultate dieser Fahrten, welche er in grösseren Werken beschrieb, waren für die Kenntniss Russlands, seine geologischen, geographischen, ethnographischen und meteorologischen Verhältnisse und für die Wissenschaft sehr nützlich. Vor Allem wichtig sind die ornithologischen Ergebnisse der Lappländer Reise; die Funde der Reise in den äussersten Norden und Osten Sibiriens, bei deren Bearbeitung er die zoologische Abtheilung übernommen hatte, welche eine würdige Ergänzung zu den früheren Arbeiten von Pallas bildet; die Beschreibung der Barobinzensteppe im asiatischen Russland, die Untersuchung des Golfstroms ostwärts vom Nordkap und seine Einblicke in das Ferghanathal im Süden von Turkestan. Von besonderer Einsicht und kritischer Schärfe zeugen ferner die Untersuchungen an Schädeln des gemeinen Landbären als Beleuchtung der Streitfrage über die Arten fossiler Landbären; die Beiträge zur Malacozoologia rossica waren für die Kenntniss der Thierwelt des russischen Reiches von Bedeutung; auch sind seine Angaben über die Wahrscheinlichkeit eines im Vergleich mit dem Meerwasser der Jetztzeit höheren Gehaltes an Bittererde in dem Wasser vieler Meere der Juraperiode, sowie seine Untersuchung über die Temperaturen im Scherginschacht zu Jakutzk hervorzuheben.

Middendorff hat sich durch diese Arbeiten einen wohlverdienten Ruf als Naturforscher, Geograph und Ethnograph gemacht.

Peter Josef van Beneden,

Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie an der Universität Löwen, eines der thätigsten Mitglieder der belgischen Akademie und einer der bedeutendsten Naturforscher seines Vaterlandes, ist am 8. Januar 1894 im hohen Alter von 84 Jahren gestorben. Er hatte wie so viele andere Naturforscher anfänglich Medizin studirt, interessirte sich aber von früh an lebhaft für die Organisation der Thiere. Sein Name wurde zuerst bekannt durch die wichtigen Studien über die Fauna der belgischen Nordsee, wozu er sich aus eigenen Mitteln in Ostende ein Laboratorium und ein Aquarium eingerichtet hatte, als erste am Meere gelegene zoologische Station in Europa. Seine grösste Leistung waren seine Untersuchungen über die Parasiten des Thierkörpers; in seinem grossen Werke über die Geschichte der Entwicklung der innerlichen Würmer hat er die vielfachen Umgestaltungen und die sonderbare Vermehrung der Eingeweidewürmer als einer der ersten nachgewiesen und den feineren Bau, sowie die Entwicklung, die Metamorphosen, die Fortpflanzung und die ganze Lebensgeschichte dieser Thiere auf das Genaueste beschrieben. Gleichzeitig mit unserem verstorbenen Collegen von Siebold, oder eigentlich schon vorher, hatte van Beneden die entozootische Fauna der ozeanischen Fische, besonders der Rochen und Haie, untersucht und gezeigt, dass die als blosse Köpfe oder finnenartige Parasiten in verschiedenen Organen vorkommenden Bandwurmköpfe (Tetrarhynchusköpfe) aus wandernden Embryonen hervorgehen und sich dann in dem Darmkanal von Fischen, welche dieselben mit den Wirthen verschlungen haben, durch Gliederbildung in die geschlechtsreifen Formen verwandeln. Dadurch lieferten van Beneden und Siebold den Beweis für Steenstrup's Anschauung über den Generationswechsel, nach welcher der Kopf des Bandwurmes eine larvenartige Amme ohne Geschlechtstheile dar-

stellt, die Glieder aber die Geschlechtsthiere repräsentiren. Es existirt somit in einem gewissen Stadium der Entwicklung von den späteren Bandwürmern nur der selbständig lebende sogenannte Kopf (Scolex), der allmählich unter günstigen Verhältnissen an seinem hinteren Ende ein Glied nach dem anderen hervortreibt. Die in den Organen abgelagerten Blasenwürmer hatte Siebold für pathologische Gebilde gehalten, während van Beneden darthat, dass sie sich an die Tetrarhynchusköpfe anschliessen und unreife Zustände der Bandwürmer darstellen, die sich ebenfalls dann im Darm geeigneter Thiere in Bandwürmer verwandeln.

Diese seine Untersuchungen haben die Annahme einer Urzeugung, welche man bei den Eingeweidewürmern noch am längsten festgehalten hatte, da man deren Entstehung aus vorhandenen Eiern nicht nachzuweisen im Stande war, erschüttert und gestürzt. Die französische Akademie krönte sein Werk mit dem grossen Staatspreise für Naturwissenschaft.

van Beneden stellte in einer bedeutsamen Arbeit den Unterschied zwischen Parasitismus und Commensalismus in der Thierwelt auf; die bei dem Menschen und den Hausthieren nicht vorkommenden Commensalen sind darnach nur scheinbare Parasiten, Geschöpfe, die zwar ganz nach Parasitenart auf grösseren Thieren leben und durch ihre Organisation den Parasiten ähneln, aber doch keine Schmarotzer sind, indem sie nicht von den Säften und Geweben ihres Trägers sich nähren, sondern als Mitesser von den Nahrungsstoffen desselben zehren.

In einer späteren Abhandlung beschrieb er die lebenden und fossilen Walfische, zu welchem Zwecke er sich an mehreren Expeditionen zum Fange dieser grossen Säuger betheiligte. Auch als Paläontologe hat er sich verdient gemacht, indem unter seiner Leitung die bei den Befestigungsarbeiten von Antwerpen ausgegrabenen fossilen Ueberreste von Seethieren präparirt und aufgestellt wurden.

van Beneden gehört zu den Begründern der heutigen vergleichenden Anatomie; er war einer der Ersten, der die Zoologie aus den Fesseln einer bloss äusserlichen Beschreibung der Arten befreien half.

Alphonse de Candolle.

Am 4. April 1893 ist zu Genf der berühmte Botaniker Alphonse de Candolle[1]) aus dem Leben geschieden. Er hat vor Allem das Verdienst die von seinem Vater Pyramus de Candolle begonnenen grossen systematischen und pflanzengeographischen Unternehmungen in der erfolgreichsten Weise fortgesetzt zu haben. Durch den Einfluss des Vaters, in dessen Besitz sich umfassende Pflanzensammlungen und eine werthvolle Bibliothek befanden, wurde die Neigung zur Botanik in ihm erweckt; aber nachdem er anfangs an der Universität zu Genf Vorlesungen über Philosophie, beschreibende Naturwissenschaften und Physik gehört hatte, veranlasste ihn in den damaligen kritischen Zeiten der Vater vorerst die Jurisprudenz zu absolviren und den juristischen Doktorgrad zu erwerben, um sich eine sichere Lebensstellung zu verschaffen. Erst darnach gab er sich ausschliesslich den botanischen Studien unter der Leitung seines Vaters hin. Bald vermochte er den Letzteren in dem akademischen Unterrichte zu unterstützen, so dass er schon im Alter von 29 Jahren als sein Nachfolger erwählt wurde, nachdem jener sich von dem Lehramte zurückgezogen hatte, um ganz seinen wissenschaftlichen Unternehmungen sich widmen zu können. Nach dem Tode des Vaters war er der Erbe des Herbariums, der Bücher und der Aufzeichnungen desselben; er hatte aber damit auch die Verpflichtung ererbt, dieselben im Sinne des Verblichenen fortzuführen und für die Wissenschaft nutzbar zu machen. Dies hat er nun auch in einer so freigebigen

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Ludwig Radlkofer.

und uneigennützigen Weise gethan, wie es noch nie von einem Botaniker geschehen war. Im Alter von 44 Jahren wurde er zu seinem Schmerz durch politische Einflüsse genöthigt, seiner Professur und der Vorstandschaft des botanischen Gartens zu Genf zu entsagen, was aber seinen wissenschaftlichen Arbeiten zu Gute kam, ja sie in ihrer Ausdehnung erst ermöglichte.

Es sind vorzüglich zwei Werke, durch welche Alphonse de Candolle sich schwerwiegende Verdienste um die Wissenschaft erworben hat, jedes für sich ausreichend, um dem Manne die dauernde Dankbarkeit der Fachgenossen zu sichern und ihm eine Stelle unter den ersten Förderern der Wissenschaft zu gewinnen: der von seinem Vater im Jahre 1826 begonnene, von A. de Candolle (von dem im Jahre 1844 erschienenen VIII. Bande ab) fortgesetzte und im Jahre 1873 (mit dem XVII. resp. XX. Bande für die Dicotyledonen) abgeschlossene Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis (gefolgt von den Suites au Prodromus für die Monocotyledonen etc.); ferner dessen Géographie botanique raisonnée (1855).

Durch das erstere, grosse allgemeine Pflanzenwerk, von welchem er selbst wesentliche Theile verfasste, und zu dessen Durchführung es trotz des Zaubers, den der Name de Candolle auf die Systematiker ausübte, einer zielbewussten Ausdauer und Energie bedurfte, wie sie eben A. de Candolle auszeichnete, hat derselbe der Gewächskunde ein tieferes Fundament geschaffen, welchem er die grösstmögliche Festigkeit und Nutzbarkeit dadurch zu geben verstand, dass er ihm ein jederzeit erneuter Berathung zugängliches Archiv, eine Sammlung naturhistorischer Dokumente zur Seite stellte, indem er in dem Herbarium Prodromi soviel nur immer möglich und in einem Maasse, wie es bis dahin noch nirgends geschehen war, ein reiches Material für die Bearbeitung der einzelnen Familien zu vereinigen und nach der Bearbeitung für die Dauer niederzulegen bestrebt war. Es bedurfte in einer Zeit, in welcher

die systematische Arbeit durch die in den Vordergrund getretene anatomische und entwicklungsgeschichtliche Richtung eine wesentliche Einbusse erlitten hatte und noch fern von dem jetzt durch die Anwendung eben dieser Richtungen auf sie gewonnenen Aufschwunge war, der ganzen Hingebung eines für die ererbte Aufgabe begeisterten Mannes, wie A. de Candolle, um dieselbe zu entsprechendem Ende zu führen. Nach dem richtigen, in seiner „Phytographie" 1883 gemachten Ausspruche A. de Candolle's selbst, dass die systematisch-descriptiven Werke am längsten ihren Werth behalten, mag man getrost den Prodromus als das wichtigste Werk de Candolle's betrachten, wenn er auch nicht lediglich, wie seine Pflanzengeographie, ihm selbst seinen Inhalt verdankt. Mit demselben hängt auch A. de Candolle's verdienstvolle Arbeit bezüglich der gesetzmässigen Regelung der botanischen Nomenclatur (unter Sanctionirung durch den internationalen botanischen Congress zu Paris im Jahre 1867) zusammen.

Durch das zweite, durch Alexander von Humboldt's Schriften über die Verbreitung der Pflanzen sowie durch die Arbeiten seines Vaters angeregte Werk, die Geographie botanique, erscheint A. de Candolle gleichsam als der Schöpfer der pflanzengeographischen Disziplin, insoferne sich dieselbe die Erforschung der ursächlichen Momente für die gegenwärtige Vertheilung der Pflanzenwelt auf der Erdoberfläche zum Ziele setzt. Um das „Rerum cognoscere causas", wie er direkt hervorhob, handelte es sich ihm dabei, und nicht bloss, was bis dahin im Wesentlichen die Pflanzengeographie ausmachte, um die Registrirung und Schilderung der thatsächlichen Verhältnisse in der Vertheilung der Pflanzen. Er wendete namentlich der Abhängigkeit der Pflanzenvertheilung von dem Einflusse der Wärme und des Lichtes sein Augenmerk zu und nahm zugleich entsprechende Rücksicht auf die damals bereits bekannt gewordenen geologischen Befunde, jedoch nicht ohne entsprechende Vorsicht bei ihrer

Verwerthung zu üben und zu verlangen. Mit besonderer Vorliebe ging er der Vertheilung und dem Ursprunge der Kulturpflanzen nach, über welche er noch in seinem 77. Jahre (1883) eine besondere, in den weitesten Kreisen geschätzte Arbeit (Origine des plantes cultivées) lieferte, welche ebenso seinen unermüdlichen Fleiss wie seinen kritischen Sinn hervortreten lässt.

Eine besonders originelle Schrift ist seine: Histoire des sciences et des savants depuis deux siècles, suivies d'autres études sur des sujets scientifiques, en particulier sur la sélection dans l'espèce humaine (1873), in der er in geistreicher Weise die Leistungen der Gelehrten aus ihren Eigenschaften abzuleiten suchte.

Die Werke de Candolle's sind auf eine durch einen erstaunlichen Fleiss und eine musterhafte Genauigkeit und Treue der Untersuchung gewonnene umfassende Erfahrung gegründet: sie werden daher einen für alle Zeiten bleibenden Werth in der botanischen Wissenschaft besitzen.

Arcangelo Scacchi[1])

geboren den 9. Februar 1810 in Gravina (Bari) auf Sizilien, Senator des Königreichs Italien, Professor der Mineralogie an der Universität und Direktor des mineralogischen Museums zu Neapel, seit 1867 auswärtiges Mitglied unserer Akademie, starb am 11. Oktober 1893 in Neapel, wo er mehr als 50 Jahre hindurch gewirkt hatte.

Am meisten bekannt ist Scacchi wohl durch seine Arbeiten über den Vesuv. Seit 1842 widmete er seine Zeit dem Studium der Eruptionen dieses Vulkans und der Produkte desselben, und ihm verdanken wir wesentlich die Kenntniss der grossen Mannigfaltigkeit von Mineralien, welche sich theils als sublimative Bildungen auf den Laven des Kraters,

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Paul Groth.

theils in den zahlreichen Auswürflingen der Somma, hier meist metamorphischer Entstehung, finden. Nicht nur von den früher bereits bekannten Mineralien lieferte er eingehendere Untersuchungen, welche, wie die berühmte Arbeit über die Humitgruppe, die Grundlage jedes weiteren Studiums derselben geworden sind, sondern auch die Entdeckung zahlreicher neuer Mineralien, zum Theil noch gar nicht bekannter chemischer Verbindungen, war das Ergebniss seiner Vesuvstudien, welche besonders bei den sehr vergänglichen Sublimationsprodukten mit grossen Schwierigkeiten verbunden waren. Trotzdem war er stets darauf bedacht, jene in solchen Mengen zu sammeln, dass sie nicht nur zu seinen Untersuchungen und zur Bereicherung des von ihm geleiteten Museums dienen konnten, sondern ihn auch in den Stand setzten, seinen Fachgenossen in reichlichem Maasse davon mitzutheilen. Dies that Scacchi nun in einer selten liberalen Weise und ermöglichte dadurch auch eine Reihe wissenschaftlicher Arbeiten Anderer über Vesuvmineralien, ebenso wie er gern fremde Sammlungen durch Abgabe von Mineralien unterstützte. So verdankt auch die hiesige Sammlung, an älteren Vorkommnissen des Vesuv wohl eine der reichsten ausserhalb Italiens, ihm wesentliche Vervollständigung durch seltene neuere Vorkommen. In chemisch-geologischer Beziehung nicht minder wichtig, als seine Studien am Vesuv, war seine Untersuchung der fluorhaltigen Auswürflinge der bis dahin unbeachteten kleinen Vulkane, welche die Tuffe von Sarno und Nocera in der Campagna hervorgebracht haben, weil diese über Fumarolenwirkungen belehrten, welche eine merkwürdige Aehnlichkeit ihrer chemischen Produkte mit gewissen, in den ältesten massigen Gesteinen, besonders den Graniten, vorkommenden Mineralbildungen zeigen.

Neben diesen mineralogischen und geologischen Studien beschäftigten Scacchi zahlreiche und umfangreiche Arbeiten auf dem Gebiete der chemischen Krystallographie. Seine

mit höchster Sorgfalt angestellten Beobachtungen über die Schwankungen der Flächenwinkel der Krystalle und die Verschiedenheiten der physikalischen und krystallographischen Eigenschaften chemisch übereinstimmender Körper führten ihn auf theoretische Vorstellungen, welche er in seinen Publikationen über „Polyedrie" und „Polysymmetrie" niederlegte. Wenn diese Vorstellungen auch heute nicht mehr als anerkannte gelten können, so behalten doch seine Beobachtungen selbst stets hohen Werth in Folge der geradezu mustergiltigen Sorgfalt, mit welcher dieselben angestellt und in Wort und Bild wiedergegeben sind, so dass es möglich ist, sie in ganzem Umfange als thatsächliche Grundlagen der inzwischen aus den Fortschritten der Wissenschaft sich ergebenden Anschauungen zu benutzen. Namentlich enthalten seine Arbeiten über die rechts- und linksweinsauren Salze ein hochinteressantes und bisher noch viel zu wenig berücksichtigtes Material von Beobachtungen über gewisse merkwürdige Hemiedrieverhältnisse, welche erst in neuester Zeit als theoretisch möglich anerkannt, von ihm aber schon vor Jahrzehnten richtig beobachtet und beschrieben worden waren, so dass diese Arbeiten in nicht geringerem Grade, als die zuerst erwähnten, für alle Zeiten eine grosse Bedeutung für die Entwicklung der Krystallographie behalten werden.

Scacchi war einer der angesehensten Gelehrten Italiens; sein Name wird für immer mit dem des Vesuv's verknüpft bleiben.

Sitzung vom 5. Mai 1894.

1. Herr N. RÜDINGER hält unter Vorzeigung von anatomischen Präparaten einen Vortrag: „über die Gehirne verschiedener Hunderacen".

2. Herr HUGO SEELIGER macht eine Mittheilung: „Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes".

3. Herr E. v. LOMMEL legt eine Arbeit der Herren L. GRAETZ und L. FOMM: „über normale und anomale Dispersion elektrischer Wellen" vor.

4. Herr LUDWIG BOLTZMANN bespricht drei Abhandlungen

a) von dem Vortragenden: „über den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen";

b) von dem Vortragenden: „zur Integration der Diffusionsgleichung bei variabeln Diffusionscoefficienten";

c) von Prof. A. WASSMUTH in Graz: „über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwangs auf die Elektrodynamik".

5. Herr W. v. GÜMBEL überreicht eine Abhandlung des auswärtigen Mitgliedes F. v. SANDBERGER in Würzburg: „über die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge".

Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Bei verschiedenen Gelegenheiten habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass ein Theil der Untersuchungen Maxwell's[1]) über den Saturnring keineswegs einwandfrei ist und dass sich gegen die Richtigkeit der von ihm angewandten Integrationsmethode begründete Zweifel vorbringen lassen. Ich möchte mir erlauben im Folgenden auf diesen Gegenstand zurückzukommen, hierbei aber auch auf die von Hirn[2]) veröffentlichten Untersuchungen, die wenig bekannt zu sein scheinen, in Kürze eingehen. Wie schon die ganz verschiedenen Wege, welche beide Forscher gehen, klar zeigen, ist die Hirn'sche Abhandlung ohne Kenntniss der mehr als 16 Jahre früher ausgearbeiteten Untersuchung von Maxwell entstanden. Es wird dies im Uebrigen noch besonders in einem von Hirn an Moigno gerichteten Briefe hervorgehoben, welcher der Abhandlung als Anhang beigegeben ist.

---

1) On the Stability of the motion of Saturn's Ring. An Essay, which obtained the Adams Prize for the year 1856 in the University of Cambridge.

2) Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne, présenté le 16 Septembre 1872 à l'Académie des Sciences.

Was die Maxwell'sche Untersuchung betrifft, so werde ich mich hier im Wesentlichen nur mit seiner Theorie der Bewegung eines festen Ringes beschäftigen. Die Maxwell'sche Arbeit enthält bekanntlich noch sehr viel mehr und darunter sehr interessante Dinge, freilich nicht alles in wünschenswerther oder auch nur erforderlicher Strenge. Hierauf zurückzukommen, muss ich mir für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

Zunächst möchte ich aber an die von Laplace in der Mécanique céleste gegebenen Entwicklungen anknüpfen und einige Bemerkungen anschliessen, da hierdurch die Sachlage, wie sie die Annahme einer festen Constitution der Saturnringe schafft, nicht schwieriger zu klären sein dürfte, als durch die viel complicirteren aber nicht strengen Untersuchungen von Maxwell oder die Bemerkungen von Hirn.

Es seien R und S die Gesammtmasse des Ringes und des Saturn und mit denselben Buchstaben mögen die beiden Schwerpunkte bezeichnet werden.

Es sei ferner r die Entfernung RS, ϑ der Winkel, den RS mit einer festen durch R gehenden Richtung bildet, φ der Winkel, den RS mit einer durch R gehenden mit dem Ringe fest verbundenen Richtung bildet, dm ein Massenelement des Ringes und ϱ, r' seine Entfernungen von R bezw. von S.

Setzt man dann $\varphi + \vartheta = \psi$ und ausserdem das Potential

$$V = k^2 \sum \frac{dm}{r'}$$

wo k die Anziehungsconstante ist, so werden die zuerst von Maxwell aufgestellten Differentialgleichungen für die Bewegung von R gegen S, sofern die Bewegung als in der Ringebene vor sich gehend betrachtet wird:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\psi}{dt^2}\cdot\sum\varrho^2\,dm = S\frac{\partial V}{\partial\varphi} \\ &\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r} \\ &\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = -\frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Es werde nun der von Laplace betrachtete Fall eines homogenen unendlich dünnen Kreisringes betrachtet. Hier ist V unabhängig von φ und demzufolge, wenn γ eine Constante bedeutet:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}$$

Führt man rechtwinkelige Coordinaten $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ ein, so kann man schreiben:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{R+S}{R}\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\frac{y}{r}$$

S beschreibt also um das Centrum des Kreisringes eine Centralbewegung.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass $\frac{\partial V}{\partial r}$ stets positiv ist, woraus folgt, dass S vom Centrum des Kreises abgestossen wird. Die Bewegung ist also instabil und ein Zusammenstoss des Ringes mit dem Saturnkörper unausbleiblich. Es soll hier gezeigt werden, in wie hohem Grade der Zustand, wenn S genau im Centrum des Kreises sich befindet, instabil ist und wie eine minimale Verschiebung ausreicht, um das Auffallen des Ringes auf den Saturn in kurzer Zeit herbeizuführen. Erhält S eine sehr kleine Geschwindigkeit c vom

Kreismittelpunkt fort, so wird es sich offenbar in gerader Linie dem Ringe nähern. Man hat dann

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r}$$

und hieraus

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = c^2 + 2\,\frac{R+S}{R}\,(V - V_0) \qquad (2)$$

wo V_0 der Werth von V für $r = 0$ ist. Für V ergiebt sich sofort, wenn a der Ringradius ist:

$$V = \frac{k^2 \cdot R}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2\,a\,r \cos\psi}}$$

Mit Hülfe der Transformation

$$\frac{\sin\psi}{\sqrt{1 - 2\,\frac{r}{a}\cos\psi + \frac{r^2}{a^2}}} = \sin u$$

kann man für alle Rechnungen viel bequemer schreiben:

$$V = \frac{2\,k^2 R}{\pi\,a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d u}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 u}}$$

$$V_0 = \frac{k^2 R}{a}$$

Man hat also jetzt

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = c^2 + \frac{4\,k^2 (R+S)}{\pi\,a} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d u}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 u}} - \frac{\pi}{2} \right\}$$

Entwickelt man noch Potenzen von $\frac{r}{a}$ und setzt zur Abkürzung:

$$x = \frac{r}{a}$$

$$\varrho = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right)^2 x^4 + \ldots$$

$$\lambda^2 = \frac{k^2 (R + S)}{2\,a}$$

so wird einfach

$$d\,t = \frac{a\,d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho\, x^2}}$$

Um die Zeit t zu berechnen, welche verfliesst vom Anfange der Bewegung bis zum Zusammenstosse der Saturnoberfläche mit dem Ringe, hat man:

$$t = a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho\, x^2}}$$

wobei x_1 den Endwerth von x bedeutet.

Das Integral kann unschwer mit beliebiger Annäherung berechnet werden. Ich begnüge mich, seinen Werth zwischen zwei genügend nahe Grenzen einzuschliessen. Man sieht sofort, dass

$$a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2}} > t > a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda_1^2 x^2}}$$

wobei

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x_1^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right)^2 x_1^4 + \ldots\right]$$

Man hat demzufolge:

$$\frac{a}{\lambda} \cdot \log \left[\frac{\lambda x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda^2 x_1^2}}{c} \right] > t$$

$$t > \frac{a}{\lambda_1} \log \left[\frac{\lambda_1 x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda_1^2 x_1^2}}{c} \right]$$

Der Saturnring könnte nach Ansicht von Laplace aus einer sehr grossen Anzahl unendlich dünner Ringe, welche aber inhomogen sind, bestehen. Der Augenschein lehrt aber, dass der Saturnring, als Ganzes aufgefasst, den Eindruck einer im hohen Grade homogenen Massen-Anordnung in peripherischer Richtung macht und man wird die Bewegung von S gegen das gemeinsame Centrum dieser Ringe jedenfalls nahezu erhalten, wenn man den ganzen Saturnring als eine breite aber unendlich dünne Scheibe ansieht. Bezeichnet dann a_0 und a_1 den Radius der inneren bezw. der äusseren Begrenzung, σ die Entfernung eines Ringelementes vom Ringcentrum, δ die homogene Dichtigkeit, so ist jetzt zu setzen:

$$V = k^2 \delta \int_{a_0}^{a_1} \sigma \, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{\sigma^2 + r^2 - 2\sigma r \cos\psi}}$$

Benutzt man wieder die oben angewandte Transformation, und führt die Integration in Bezug auf σ aus, so ergiebt sich:

$$V = 4 k^2 \delta \times$$

$$\left\{ a_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a_1^2} \sin^2 u} \, du - a_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a_0^2} \sin^2 u} \, du \right\}$$

Analog dem früheren wird man zur Abkürzung setzen

$$\frac{r}{\sqrt{a_0 a_1}} = x$$

$$\varrho = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 \cdot \frac{a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2}{3 a_0 a_1} + \ldots.$$

$$\lambda^2 = \frac{k^2 (R + S)}{a_0 + a_1}$$

Hierdurch erhält man

$$\sqrt{a_0 a_1} \frac{d x}{d t} = \sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho x^2}$$

und die Zeit t vom Anfange der Bewegung bis zum Zusammenstosse der inneren Ringbegrenzung mit dem Saturnkörper wird:

$$t = \sqrt{a_0 a_1} \int_0^{x_1} \frac{d x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2 \varrho}}$$

Es könnte t nun wieder innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen werden. Für die folgende Abschätzung genügt es aber vollkommen zu setzen:

$$t = \frac{\sqrt{a_0 a_1}}{\lambda} \cdot \log \text{nat} \left\{ \frac{\lambda x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda^2 x_1^2}}{c} \right\}$$

In der m. Entfernung 9.539 erscheinen die Grössen a_0, a_1 und der Radius des Saturn unter den scheinbaren Winkeln 19″.75, 13″.75, 8″.65. Es ist hierbei nur der helle Ring in Betracht gezogen, also der Florring ganz unberücksichtigt gelassen worden, wodurch natürlich t zu gross wird. In den gewöhnlichen astronomischen Einheiten ausgedrückt, ergiebt sich so:

$$\log \lambda = 7.8684 - 10$$
$$\log x_1 = 9.4906 - 10$$

und hiermit:

$$t = [9.0137] \log \text{nat} \left\{ \frac{[7.3590]}{c} + \sqrt{1 + \frac{[4.7180]}{c^2}} \right\}$$

t erhält man also in Tagen. Die in eckige Klammern gesetzten Zahlen bedeuten Brigg. Logarithmen, deren zugehörige Zahlen zu nehmen sind. Da es sich in den folgenden Zahlen nur um äusserst kleine c handelt, so wird genügend genau:

$$t = [9.3759] \log \left\{ \frac{[7.6600 - 10]}{c} \right\}$$

So findet man beispielsweise für

$\frac{1}{c} =$	4 Millionen	$t =$ 1.01 Tag
	40000 Millionen	1.96
	4 Billionen	2.44

Diesen 3 Anfangsgeschwindigkeiten entsprechen in der Zeitsecunde die Geschwindigkeiten von 420, 0.042, 0.00042 mm. Es ergiebt sich, dass also selbst bei einer so überaus kleinen Anfangsgeschwindigkeit wie 0.00042 mm pro Secunde schon nach $2^1/_2$ Tagen der innere helle Ringrand mit der Oberfläche des Saturnkörpers zusammenstossen wird. In so hohem Grade instabil ist also der Anfangszustand.

Ich gehe nunmehr zur Integration der Gleichungen (1) über nach der von Maxwell angewandten Methode. Man kann aber gleich von Anfang an die Rechnungen sehr wesentlich vereinfachen und die obigen 3 Gleichungen auf zwei zurückführen, wodurch eine wesentlich kürzere Darstellung sich gewinnen lässt. Setzt man zur Abkürzung

$$A = \frac{R + S}{R S} \Sigma \varrho^2 \, d m$$

so folgt aus (1) sofort

$$A \frac{d \psi}{d t} + r^2 \frac{d \vartheta}{d t} = c$$

wo c eine Integrationsconstante ist. Und da weiter $\psi = \varphi + \vartheta$ war, so hat man

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c - A\frac{d\varphi}{dt}}{A + r^2}$$

Hierdurch werden die zwei letzten Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned} (A+r^2)^2 \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= -2Acr\frac{dr}{dt} \\ &+ 2A^2 r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r^2(A+r^2)A \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ (A+r^2)^2 \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} &= -rc^2 + (A+r^2)^2 \frac{d^2 r}{dt^2} \\ &- A^2 r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2Acr\frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Integration dieser Differentialgleichungen ist selbst für sehr einfache Formen von V nicht durchführbar. Es soll nun die von Maxwell eingeführte Voraussetzung gemacht werden, dass die Geschwindigkeiten $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ stets sehr kleine Grössen sind, deren Producte und zweite Potenzen fortgelassen werden können. Geschieht dies, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2Acr}{(A+r^2)^2}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{rc^2}{(A+r^2)^2} + \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2c}{r(A+r^2)}\frac{dr}{dt} &= \frac{(A+r^2)}{Ar^2} \cdot \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\}$$

Es werde weiter, ebenfalls mit Maxwell, die Annahme gemacht, dass r nur sehr wenig von einer constanten Grösse u abweicht, dass also in

$$r = u + \varrho$$

ϱ stets eine kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen fortgelassen werden können, und dass dasselbe von φ gilt, durch passende Wahl der Anfangsrichtung aber nur dann erreicht werden kann, wenn sich die Bewegung innerhalb eines sehr kleinen Bezirkes abspielt. $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ ist in den folgenden Anwendungen schon von der Ordnung der ϱ und φ klein und demzufolge vereinfachen sich die obigen Differentialgleichungen und nehmen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\varrho}{dt^2}+\frac{2Acu}{(A+u^2)^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{uc^2}{(A+u^2)^2}\\ &+\frac{\varrho c^2}{(A+u^2)^3}(A-3u^2)+\frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\\ &\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\frac{2c}{u(A+u^2)}\frac{d\varrho}{dt}=\frac{R+S}{R}\cdot\frac{A+u^2}{Au^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Man sieht indessen, dass diese Gleichungen, selbst wenn alle anderen Voraussetzungen zugelassen werden, gewiss nicht mehr der Wahrheit nahekommen, wenn Au^2 sehr klein ist. Diese Fälle müssen also von vornherein ausgeschlossen werden. Sobald also A oder u klein werden, gelten die Maxwellschen Gleichungen — denn im Wesen der Sache stimmen diese mit den obigen überein — gewiss nicht mehr. Die obigen Gleichungen sind nun stets, da man sich V in eine Potenzreihe nach den Grössen ϱ und φ entwickelt denken kann und nur die linearen Glieder mitzunehmen braucht, ohne im Allgemeinen neue Ungenauigkeiten einzuführen, lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und ihre Integration gelingt in bekannter Weise durch Exponentialfunctionen. Allgemeinere Fälle durchzuführen macht demnach keine Schwierigkeiten. Es soll hier nur der von Maxwell ganz durchgerechnete Fall vorgenommen werden, dass ein unendlich dünner Kreisring mit dem Radius a vorliegt, welcher in einem Punkte mit der Masse m beschwert ist.

Als die mit dem Ringe fest verbundene Richtung wählen wir dann die Gerade, welche durch m und den Ringmittelpunkt geht. Steht S genau im letzteren, so ist $r = u$, $\varphi = 0$. Der Einfachheit wegen werde noch die Masse des Ringes R gegen S vernachlässigt. Dann findet sich leicht, wenn zur Abkürzung $\mu = \frac{m}{R}$ gesetzt wird

$$A = a^2 (1 - \mu^2); \quad u^2 = a^2 \mu^2; \quad A + u^2 = a^2$$

Das Potential V ergiebt sich mit Rücksicht auf die oben ausgeführte Transformation, wenn noch σ die Entfernung zwischen S und dem Ringcentrum, also

$$\sigma^2 = r^2 + u^2 - 2\, u\, r \cos \varphi$$

ist

$$V = \frac{2\,(R - m)\,k^2}{\pi\, a} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,u}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \sin^2 u}}$$
$$+ \frac{m\, k^2}{\sqrt{r^2 + (a - u)^2 + 2\,(a - u)\, r \cos \varphi}}$$

Entwickelt man nach Potenzen von $\varrho = r - u$ und φ und nimmt nur die ersten Potenzen mit, so ergiebt sich leicht:

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{m}{a^2} + \frac{\varrho}{2\, a^3} (R + 3\, m)$$
$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{3}{2} \frac{m}{a} \mu\, (1 - \mu) \cdot \varphi$$

und hiermit werden die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \varrho}{d\, t^2} + \frac{2\, c\, \mu\, (1 - \mu^2)}{a} \cdot \frac{d\, \varphi}{d\, t} \\ &= \frac{c^2 \mu}{a^3} + \frac{\varrho\, c^2}{a^4} (1 - 4\, \mu^2) + \frac{k^2 S}{R} \left[-\frac{m}{a^2} + \frac{\varrho}{a^3} \frac{R}{2} (1 + 3\, \mu) \right] \\ &\frac{d^2 \varphi}{d\, t^2} - \frac{2\, c}{a^3 \mu} \cdot \frac{d\, \varrho}{d\, t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2 S}{R} \cdot \frac{m}{a^3} \cdot \frac{1}{\mu\, (1 + \mu)} \cdot \varphi \end{aligned}\right\}$$

Die Integrations-Constante c ist vollkommen willkürlich und die weitere Rechnung führt nur dann auf das Maxwellsche Resultat, wenn noch eine weitere Annahme gemacht wird, nämlich die, dass für $\varrho = 0$, $\varphi = 0$ eine Gleichgewichtslage überhaupt stattfindet. Diese Annahme ist aber keineswegs selbstverständlich. Diese an sich willkürliche Annahme spricht sich in der Gleichung

$$c^2 = k^2 S a \tag{5}$$

aus. In diesem Falle nun werden die obigen Differentialgleichungen überaus einfach. Setzt man zur Abkürzung

$$p = \frac{2 c \mu (1 - \mu^2)}{a} \qquad \beta = \frac{c^2}{a^4}\left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mu - 4\mu^2\right\}$$

$$p' = \frac{2 c}{a^3 \mu} \qquad \gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{a^4} \cdot \frac{1}{1 + \mu}$$

so wird:

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} + p \frac{d \varphi}{d t} = \beta \varrho$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} - p' \frac{d \varrho}{d t} = \gamma \varphi$$

Zur Integration macht man bekanntlich den Ansatz:

$$\varrho = \lambda e^{\nu t} \qquad \varphi = \mu e^{\nu t}$$

dann muss sein:

$$\lambda \nu^2 + p \mu \nu = \beta \lambda$$
$$\mu \nu^2 - p' \lambda \nu = \gamma \mu$$

Die Elimination von λ und μ ergiebt sofort:

$$\nu^4 - \nu^2 (\beta + \gamma - p p') = - \beta \gamma \tag{6}$$

Durch Auflösung dieser in ν^2 quadratischen Gleichung und durch Ausrechnung der zu den Wurzelwerthen von ν gehörenden $\frac{\lambda}{\mu}$ kann man leicht, wie bekannt, die allgemeinen

Lösungen der vorliegenden Differentialgleichungen erhalten. Die Frage, welche hier vorliegt, ist aber, wann diese Lösungen sich durch Sinus- und Cosinusfunctionen von t ausdrücken. Dies tritt offenbar ein, wenn (6) für ν^2 reelle und negative Werthe ergiebt. Die Auflösung von (6) giebt hierfür als nothwendige und hinreichende Bedingungen:

$$\beta\gamma > 0, \beta + \gamma - p\,p' < 0 \text{ und } (\beta + \gamma - p\,p')^2 > 4\beta\gamma$$

Die erste Bedingung heisst:

$$1 + \mu > \frac{8}{3}\mu^2$$

woraus folgt:

$$16\,\mu < 3 + \sqrt{105}, \text{ d. h. } \mu < 0.8279$$

Die weitere Bedingung

$$\mu^2 - \frac{2}{3}\mu < \frac{2}{3}$$

ist für $\mu < 1$ von selbst erfüllt. Die dritte Bedingung schliesslich giebt:

$$\mu^4 + \frac{28}{3}\mu^3 + \frac{52}{9}\mu^2 - \frac{64}{9}\mu > \frac{32}{9}$$

was aussagt $\mu > 0.8159$.

Die angestellte Rechnung, welche mit dem Maxwell'schen Resultate vollkommen übereinstimmt, zeigt also, dass $\mu = \frac{m}{R}$ zwischen den Grenzen 0.8159 und 0.8279 liegen muss, damit die Bewegung rein periodisch sei, in welchem Falle also S immer in der Nähe vom Ringmittelpunkt bleibt, wenn dies zu einer bestimmten Zeit der Fall war und die Geschwindigkeiten zu derselben Zeit sehr klein waren. Dies gilt aber nur, wenn die Gleichung (5) streng erfüllt ist. Ist dies nicht der Fall, so finden sich andere Grenzwerthe für μ, und

man kann solche Werthe von c wählen, dass überhaupt keine periodischen Lösungen mehr möglich sind. Ich gehe auf diese Entwicklungen nicht näher ein, weil ich der Meinung bin, dass die Maxwell'sche Integrationsmethode, wenigstens in dieser Form, überhaupt nicht geeignet ist, über die Stabilität der untersuchten Bewegung etwas auszusagen. Mir scheint es unzulässig zu sein, in Differentialgleichungen von der vorliegenden Form die Glieder höherer Ordnung fortzulassen und aus der Thatsache, dass sich dann eine rein periodische Lösung ergiebt, schliessen zu wollen, dass dies auch bei strenger Integration der Fall sei. Die Untersuchung der Stabilität eines Zustandes hat von der Bedingung auszugehen, dass die Coordinaten und Geschwindigkeiten für eine bestimmte Zeit unendlich wenig geändert werden. Man hat also die Integrationsconstanten zu variiren. Bei Maxwell kommen diese Constanten gar nicht vor, vielmehr werden die Veränderungen der Coordinaten als unendlich klein für alle Zeiten betrachtet und mit Hülfe der Vernachlässigung der höheren Potenzen dieser Grössen nachgewiesen, wann eine periodische Bewegung mit sehr kleinen Amplituden sich einstellt. Im Allgemeinen enthält dieses Verfahren unzweifelhaft einen Zirkelschluss und ist unzulässig und daran wird nichts geändert, wenn dasselbe auch in speciellen Fällen zu richtigen Resultaten zu führen geeignet ist. Ein auf diesem Wege gefundenes Resultat kann, wenn nicht die Zulässigkeit des Verfahrens zuerst in besonderen Fällen nachgewiesen wird, eben nur zufällig richtig zu sein.

Die vorliegenden Differentialgleichungen 2. Ordnung enthalten die unabhängige Variable t nicht explicite. Dass aber auch in diesem Falle im Allgemeinen die Maxwell'sche Schlussfolgerung nicht zulässig ist, kann mit Leichtigkeit an beliebig vielen Beispielen gezeigt werden. Nehmen wir z. B.:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -q^2 x + y^2$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{q^2}{4} y$$

und es werde vorausgesetzt, wie in den obigen Gleichungen, dass sowohl x und y als auch die ersten Differentialquotienten nach t für $t = 0$ sehr klein seien. Dann ergiebt die strenge Integration:

$$y = a \sin\left(\frac{q}{2} t + \frac{b}{2}\right)$$

$$x = \frac{a^2}{2q^2} + \alpha \sin(q t + \beta) + \frac{a^2}{8q^2} \cos(q t + b)$$
$$- \frac{a^2}{4q} \cdot t \cdot \sin(q t + b)$$

worin a, α, b, β die 4 willkürlichen Integrationsconstanten sind und die ersten beiden sehr klein sein müssen. Vernachlässigt man aber in den Gleichungen y^2, so wird:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -q^2 x \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{q^2}{4} y$$

also

$$x = \alpha \sin(q t + \beta) \qquad y = a \sin\left(\frac{q}{2} t + b\right)$$

Die näherungsweise ausgeführte Integration giebt also eine rein periodische Bewegung mit sehr kleinen Amplituden, die strenge Darstellung dagegen enthält ein mit t multiplicirtes Glied. Wie sich die Sachlage bei dem Maxwell'schen Problem über den Saturnring gestaltet, darüber ist vorläufig gar nichts bekannt. Keineswegs aber kann man ohne näheren Nachweis behaupten, dass dort die Fortlassung der höheren Potenzen der Variablen die Form der Integralgleichungen ungeändert lässt.

Danach wird man wohl zugeben müssen, dass das Maxwell'sche Resultat, in der vorliegenden Form wenigstens,

gänzlich unbegründet ist. Die vorliegende astronomische Frage scheint mir aber hiervon ganz unabhängig zu sein. Denn es ist sicher, dass die thatsächlichen Verhältnisse beim Saturnring völlig verschieden sind von den Annahmen, auf denen das Maxwell'sche Problem beruht. Der Saturnring ist ein sehr dünnes aber breites Gebilde und der Augenschein lehrt, dass dasselbe im Grossen und Ganzen in peripherischer Richtung von homogener Dichtigkeit ist. Wenn man sich den Ring auch vorstellen will als bestehend aus sehr vielen, sehr dünnen und sehr inhomogenen Ringen, so werden sich doch diese Ungleichförmigkeiten in der Massenvertheilung der einzelnen Ringe nahezu compensiren müssen, so dass man sich offenbar weit mehr der Wahrheit nähert, wenn man den ganzen Ring als homogen betrachtet, als wenn man etwas anderes annimmt. Hierdurch entsteht aber, wie oben auseinandergesetzt wurde, eine im hohen Grade instabile Bewegung und man wird diese mit viel mehr Recht als der Natur entsprechend ansehen können, als etwa die Consequenzen des Maxwell'schen Problemes.

Hirn's Untersuchung der Frage, ob die Saturnringe als fest anzunehmen seien, geht nach einer ganz anderen Richtung als die Maxwell'sche Arbeit. Während letzterer versuchte die Dauerhaftigkeit der Bewegung des Saturn um das Ringcentrum zu untersuchen, beschäftigt sich Hirn mit den Ansprüchen, welche man an die Festigkeit der Ringe zu machen gezwungen ist, falls diese als fest angenommen werden. Hierbei scheint Hirn von der Meinung auszugehen, dass ein nicht homogener Ring überhaupt einen stabilen Zustand zulasse d. h. dass sich Saturn stets in der Nähe des Ringcentrums aufhalten könne. Er stützt sich dabei auf Laplace, der allerdings in der Mécanique céleste seine Untersuchungen über den Saturnring mit der Bemerkung schliesst: „les divers anneaux qui entourent le globe de Saturne sont par conséquent

des solides irregulaires d'une lageur inégales etc.". Diese Schlussfolgerung ist aber durch die vorangehende Analyse keineswegs gerechtfertigt, denn Laplace hat nur die Bewegung homogener Ringe untersucht. Deshalb entbehren die auf Laplace's Meinung sich stützenden Bemerkungen Hirn's der sicheren Grundlage und müssen als wenig beweiskräftig angesehen werden. Jedoch enthält die Schrift Hirn's viele interessante Bemerkungen, weshalb ich auf eine kurze Analyse derselben eingehe.

Ein unendlich dünner Kreisring mit dem Radius r, der sich mit der Rotationsgeschwindigkeit ω um den in seinem Mittelpunkt stehenden Saturn dreht, kann, wenn keine Cohäsion zwischen den einzelnen Theilen stattfindet, nur bestehen, wenn in jedem Punkte die Centrifugalkraft gleich der Anziehungskraft ist. Ist also wieder k die Anziehungsconstante, S die Saturnmasse, so muss sein:

$$\omega^2 = \frac{k^2 S}{r^3}$$

Es werde nun ein inhomogener und zwar einseitig belasteter unendlich dünner Kreisring betrachtet. Ein Massenelement desselben sei dm. Der Schwerpunkt R des Ringes fällt dann nicht mit seinem Centrum C zusammen. Hirn nimmt nun an, was eine durchaus willkürliche und unbewiesene Voraussetzung ist, dass durch die Stellung des Saturn S auf der Verbindungslinie CR ein stabiler Zustand gegeben sei. Es müsste also, da die Masse R gegen S zu vernachlässigen ist, R um S rotiren und ebenso schnell um C. Nennt man noch ϑ den Winkel, den der durch dm gehende Kreisradius r mit der Geraden RS bildet, so wird also bei Voraussetzung eines stabilen Zustandes die Entfernung $RS = \varrho$ constant bleiben, also:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0$$

sein. Dies führt sofort auf die Bedingung

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} \Sigma dm = \Sigma dm \cos \vartheta \left\{ \omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2} \right\} = 0. \qquad (7)$$

Hierin erstreckt sich Σ auf die ganze Ringmasse. Nennt man den positiven Theil der linken Seite der letzten Gleichung f, so halten sich also zwei Kräfte $+f$ und $-f$ das Gleichgewicht. Es ist f nichts anderes als die Zug- bezw. Druckkraft, welche bei dem bestehenden Zustand auftritt. In der Hauptsache (mit allerdings nicht bedeutenden Abänderungen in den Zahlen) kann man die auftretenden Fälle als durch folgende typische Annahmen hergestellt ansehen.

Die ganze Ringmasse denke man sich in zwei Massenpunkten m_0 und m_1 vereinigt. In m_0 alle dm, welche in der obigen Summe positive, in m_1 alle dm, welche negative Coefficienten haben. Man denke sich ferner m_0 und m_1 an die Enden eines Durchmessers des Ringes gebracht, in welchem Durchmesser sich auch S befindet. Die Enfernung S vom Centrum des Ringes, also der Mitte der Geraden $m_0\, m_1$, sei in der Richtung nach m_0 positiv gerechnet e. Die Gleichung (7) wird jetzt

$$m_0 \left[\omega^2 (r - e) - \frac{k^2 S}{(r - e)^2} \right] = m_1 \left[\omega^2 (r + e) - \frac{k^2 S}{(r + e)^2} \right]$$

Setzt man $\lambda = \frac{m_0}{m_1}$, so findet man hieraus:

$$\omega = \frac{1}{r - e} \sqrt{\frac{k^2 S}{r - e} \cdot \frac{\lambda - \left(\frac{r - e}{r + e}\right)^2}{\lambda - \frac{r + e}{r - e}}}$$

Es ergiebt sich aus diesem Ausdrucke, dass der angenommene Zustand unmöglich ist, wenn:

$$\left(\frac{r - e}{r + e}\right)^2 < \lambda < \frac{r + e}{r - e}$$

denn dann wird ω imaginär. Sonst aber wird die Kraft f, welche die feste als schwerelos betrachtete starre Verbindung von m_0 und m_1 zu zerreissen oder zusammenzudrücken strebt, sein:

$$f = m_0 \left[\omega^2 (r - e) - \frac{k^2 S}{(r - e)^2} \right]$$

Diese Kraft kann sehr bedeutend werden. Wenn man den oben gefundenen Werth von ω einsetzt und die zweiten Potenzen der als klein vorausgesetzten Grösse $\frac{e}{r}$ vernachlässigt, findet man leicht:

$$f = \frac{6 k^2 S}{r^3} \cdot \frac{m_0 e}{\lambda - 1}$$

Für die numerische Rechnung wird man die Intensität der Schwere auf der Erdoberfläche g, den Erdradius ϱ und die Erdmasse m einführen. Dann ist $m k^2 = g \varrho^2$ und:

$$f = \frac{6}{\lambda - 1} m_0 g \frac{S}{m} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \frac{e}{r}$$

Will man nun diese Formel auf den Saturnring anwenden, so wird, ausser den bereits erwähnten und als ziemlich willkürlich bezeichneten Voraussetzungen, noch eine bestimmte Annahme über e gemacht werden müssen, da f bei sehr kleinem e ebenfalls sehr klein wird. Hirn stützt sich hierbei auf Beobachtungen von W. Struve, Harding u. s. f., wonach Saturn excentrisch im Ringe stehen soll. Aehnliche Wahrnehmungen sind auch in neuerer Zeit gemacht worden, entschieden ist indessen diese Frage noch keineswegs. Dass eine excentrische Stellung des Saturn thatsächlich vorgekommen ist, wird man zwar zugeben müssen, über den Betrag der Excentricität aber bestimmte Angaben zu machen, ist bei den einander widerstreitenden Einzelresultaten vorder-

hand noch nicht möglich. Wesentlich ist ferner für die Anwendung der obigen Formel, dass Saturn die Rotation des Ringes um sein Centrum mitmacht und immer auf einem Radius des letzteren und zwar an derselben Stelle zu liegen kommt. Dies durch die Beobachtungen gegenwärtig nachzuweisen dürfte nicht leicht sein, jedenfalls liegen dergleichen Resultate nicht vor.

Hirn legt seiner Rechnung folgende Zahlen zu Grunde. Drückt man die Strecken in lieues zu 4000 Metern aus, so setzt er:

$$e = 200 \qquad r = 33454$$

wo die letztere Zahl dem äussersten hellen Ringrand entspricht. Weiter wird angenommen $\frac{S}{m} = 92.394$. Dann wird für $\lambda = 10$

$$f = m_0 g \times 0.00084$$

Schon für kleine Massen kommen bedeutende Drucke heraus. Nimmt man z. B. an, dass m_0, welches ungefähr der Masse des halben Ringes entspricht, die Masse einer Kubiklieue Wasserstoff ist, so ergiebt sich $f = 5$ Millionen Kilogramm. Unter solchen Drucken würde aber jedenfalls ein aus so dünnem Stoffe bestehender Ring auseinanderbrechen müssen. Wollte man aber die Festigkeit so gross annehmen, dass diesen Drucken Widerstand geleistet werden könnte, so müsste man noch die Bedingung der beinahe vollständigen Starrheit hinzufügen. Denn sonst würden sehr bedeutende Verbiegungen auftreten müssen, von deren Qualität man sich leicht Rechenschaft abgeben kann. Da aber die Beobachtungen dergleichen nicht verrathen, so muss man wohl, will man nicht mit ganz abnormen und unbekannten Verhältnissen rechnen, die Hypothese sehr dünner starrer Ringe aufgeben.

Es bliebe indessen noch übrig, den Saturnring als ein oder mehrere sehr dünne Bänder von endlicher Breite auf-

zufassen. Ein solches kreisförmiges Band habe am inneren bezw. am äusseren Rande die Radien r_i und r_a. Jeder als fest angenommene Theil des Bandes, welcher zwischen zwei den unendlich kleinen Winkel $\delta\theta$ mit einander bildenden Radien liegt, wird mit den übrigen zusammen auch ohne Cohäsion die vorgeschriebene Rotation ausführen, wenn

$$\int_{r_i}^{r_a} dm \left[\omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2}\right] = 0.$$

Bezeichnet e die sehr kleine Dicke des Ringes und δ die gleichförmige Dichtigkeit, so ist

$$dm = e \cdot \delta \cdot r \cdot dr \cdot \delta\theta$$

und es müsste also sein:

$$\int_{r_i}^{r_a} \left[\omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2}\right] e r \cdot dr = 0.$$

e ist im Allgemeinen eine Function von r, die aber völlig unbekannt ist. Hirn verfolgt ausführlicher zwei Annahmen: 1) Setzt man $e = e_0 =$ constant, so ergiebt sich:

$$\omega^2 = \frac{3 k^2 S}{r_a^3 - r_i^3} \cdot \log \frac{r_a}{r_i}$$

Es giebt einen mittleren Radius r_m, wo der Centrifugalkraft genau durch die Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird. Hierfür ist

$$\omega^2 r_m^3 = k^2 S$$

woraus sich ergiebt:

$$r_m = r_i \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1}{3 \log \frac{r_a}{r_i}}}$$

[illegible]

Führt man hierin wieder die beiden oben verfolgten Annahmen durch und setzt zuerst $e = e_m$, so wird

$$f = \frac{k^2 S \cdot \delta}{r_m} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{r_a}{r_m} \right)^2 - 1 \right] - \log \frac{r_a}{r_m} \right\}$$

Durch Einführung der Schwere g und mit den obigen Zahlen ergiebt sich:

$$f = 845911 \cdot \delta \cdot g$$

Die analoge Rechnung für die zweite Annahme $er = \text{Const.}$ ergiebt:

$$f = \frac{k^2 S \delta}{r_m} (r_a - r_m) \left\{ \frac{1}{2} \frac{r_a + r_m}{r_m^2} - \frac{1}{r_a} \right\}$$

und in Zahlen $f = 859258 \cdot \delta \cdot g$.

Die angestellten Rechnungen zeigen jedenfalls, dass sehr bedeutende Zugkräfte die Zertheilung des ringförmigen Bandes herbeizuführen suchen, denen nur die Cohäsion der Masse sich entgegensetzt. Indessen wirkt auch die Anziehung der einzelnen Ringtheile auf einander in gleichem Sinne. Man wird aber wohl von vorn herein annehmen müssen, dass die letztere bei der nicht bedeutenden Dichtigkeit der Ringmaterie nicht viel an dem erlangten Resultate ändern wird. Ich übergehe deshalb die von Hirn in dieser Richtung ausgeführten Betrachtungen, zumal dieselben gegenwärtig vollkommener angestellt werden können, als dort geschehen. Hirn findet, dass bei Berücksichtigung der Ringanziehung der zuletzt angeführte Zahlenausdruck für f sich umwandelt in:

$$f = 859258 \cdot \delta \cdot g - 0.57 (\delta \cdot g)^2$$

Um eine genauere Vorstellung von der Grösse dieser Kräfte zu erlangen, sei erwähnt, dass Buchenholz ein Körper ist, der bei grösster Leichtigkeit die stärksten Drucke aushalten kann. Hierfür ist $\delta = 0.7$ und damit wird $f = 598687600$ kg pro qm. Diese Belastung ist etwa 40 Mal so gross, als Buchenholz erfahrungsgemäss ertragen kann. Indessen ist offenbar

die Kraft f bedeutend kleiner, wenn die Breite des Ringes abnimmt, und man kann sich die Frage vorlegen, wie breit die einzelnen Ringe sein müssen, um bei gegebener Festigkeit bestehen zu können. Die Rechnung ist leicht auszuführen, wenn die Ringanziehung vernachlässigt wird. Für eine Materie von der Beschaffenheit des Buchenholzes folgt dann, dass der innere helle Ring mindestens aus 5 einzelnen Ringen bestehen müsste. Ganz ähnliches gilt natürlich auch für den äusseren Ring, so dass also mit der festen Constitution der Ringe die Folgerung verknüpft ist, dass dieselben aus einer grösseren Zahl schmaler Ringe bestehen müssen. Der Augenschein und manche Beobachtungen, namentlich aus früherer Zeit, widersprechen dem durchaus nicht, und es ist bekannt, dass Laplace etwas ganz ähnliches als durch die Beobachtungen bestätigt angenommen und hierauf seine Rechnungen gegründet hat.

So interessant dieses Resultat von Hirn auch ist, so ändert es doch nichts an der Unzulänglichkeit der Annahmen. Der der Rechnung zu Grunde gelegte Zustand ist ein im höchsten Grade instabiler, wie oben auseinandergesetzt, und demzufolge ist die Untersuchung über die Unmöglichkeit fester Ringe unnöthig, weil das System nur ganz kurze Zeit bestehen kann. Es ist schon oben erwähnt worden, dass auch einseitige Belastungen nichts an der Sachlage ändern können, wenn man nicht das Aussehen der Saturnringe ganz ignoriren will und so wird wohl immer das Hauptargument gegen die Möglichkeit fester Ringe in den einfachen Rechnungen bestehen, welche am Anfange dieses Aufsatzes ausgeführt worden sind.

Frägt man nun weiter nach der eigentlichen Constitution der Ringe, nachdem der feste Aggregatzustand ausgeschlossen ist, so drängt sich zunächst die Vermuthung auf, diese Gebilde könnten flüssiger oder gasförmiger Natur sein. Um die Mitte dieses Jahrhunderts hatte diese Hypothese an den beiden amerikanischen Gelehrten W. C. Bond und Peirce

energische Verfechter gefunden, man wird sie aber trotzdem nicht ernstlich in Betracht zu ziehen haben. Lange Zeit und vereinzelt auch jetzt noch hat man die berühmten Experimente von Plateau über ringförmige Gebilde, die in rotirenden Flüssigkeiten auftreten, als einen Beweis für die Möglichkeit solcher kosmischen Gebilde angesehen. Diese Versuche veranschaulichen aber nur die Wirkung der Capillarität und haben mit Gravitationswirkungen gar nichts zu schaffen. Sie hängen also gar nicht mit den Gleichgewichtsfiguren kosmischer Massen zusammen, ganz abgesehen davon, dass sie auch äusserlich den Verhältnissen beim Saturnring nicht entsprechen. Denn hier liegt in der Mitte der Ringe von sehr geringer Masse, die bedeutende Saturnmasse, welcher Fall sich bei den genannten Figuren wohl kaum erzielen lässt.

Nachdem Laplace die Theorie der ringförmigen Gleichgewichtsfiguren zu untersuchen begonnen hatte, ist dieses Problem ausführlich und streng von verschiedenen Seiten behandelt worden. Die Hauptfrage, die aber bei einer Verwerthung der erlangten Resultate in der Astronomie von der grössten Wichtigkeit ist, ob nämlich solche Figuren stabil sind und nicht durch Hinzutritt kleiner Störungen von aussen auseinanderfliessen, hat eine genügende Beantwortung bis jetzt nicht gefunden, indessen ist kaum wahrscheinlich, dass die erforderliche Stabilität vorhanden ist. Zu diesem Resultate kommt auch Hirn auf einem interessanten Wege, auf welchem ihm hier gefolgt werden soll.

Es werde angenommen, dass zu einer gewissen Zeit der flüssige Ring wirklich bestehe, wenn Saturn genau in dessen Centrum sich befindet. Dann wird der Ring mit gleichförmiger Geschwindigkeit wie ein fester Körper um sein Centrum rotiren und die einzelnen Theilchen werden keine Verschiebung gegen einander erleiden. Wenn nun Saturn sich aus irgend einer Ursache von dem Ringmittelpunkt ein wenig entfernt, so werden die einzelnen Theilchen nicht

mehr gleichförmig rotiren können. Dort wo sie dem Saturn näher stehen, werden sie sich schneller, dort wo sie von ihm entfernter sind, werden sie sich langsamer bewegen müssen. Man wird sich, weil die Anziehung des Ringes auf seine einzelnen Theile gering ist gegenüber der Anziehung des Saturn, ein näherungsweise richtiges Bild von der Bewegung bilden, wenn man annimmt, dass die einzelnen Theile Ellipsen beschreiben, deren Brennpunkt im Saturn liegt. Ist die Ringmaterie ein zusammendrückbares Gas, so werden die einzelnen Theilchen in der Saturnnähe, da sie sich hier schneller bewegen, auseinanderrücken und in der Saturnferne wird das Entgegengesetzte eintreten. Ist der Ring aus einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit gebildet, so werden sich die einzelnen Theilchen im letzteren Punkte anhäufen un der Ring wird hier breiter oder dicker werden müssen. Dieses Spiel wiederholt sich bei jedem Umlaufe, also alle 10 bis 14 Stunden. Infolge der Reibung zwischen den einzelnen Theilchen wird beim Anhäufen oder Zusammendrängen der Theilchen Wärme erzeugt werden, was aber in der Saturnferne stattfinden muss, während, wenigstens ist dies bei gasförmiger Constitution sicher, in der Saturnnähe eine Abkühlung erfolgen wird. Infolge der Wärmeleitung, des Stosses der einzelnen Theilchen gegeneinander etc., werden nun, wie die Thermodynamik zeigt, sich die Wärmewirkungen in der Saturnferne und -Nähe und auch in den dazwischen liegenden Punkten nicht ausgleichen, vielmehr bleibt ein Rest übrig, welcher eine Temperaturerhöhung der Ringmasse hervorbringt. Dies kann aber nur auf Kosten der Bewegungsenergie geschehen und es werden sich also die Dimensionen des Ringes nach dem Saturn hin verkleinern. Die Innenseite des Ringes wird sich demzufolge ziemlich gleichmässig von allen Seiten, langsam dem Saturn nähern, um sich schliesslich mit ihm zu vereinigen.

Auf Grund seiner Untersuchungen kommt Hirn zu dem

Resultate, dass sich alle Schwierigkeiten und Unmöglichkeiten heben, wenn man annimmt, der Saturnring bestehe aus einzelnen discreten Massentheilchen oder er sei, kurz gesagt, von staubförmiger Structur. Wie sich die mechanischen Verhältnisse in einem solchen Systeme abwickeln, hat Hirn nicht weiter untersucht und die kurzen Bemerkungen, die er in dieser Richtung macht, werden voraussichtlich theilweise der Correctur bedürfen. Dagegen hat Maxwell diese Probleme in Angriff zu nehmen versucht, ohne dass es ihm aber, wie ich glaube, gelungen ist, zu einer einwurfsfreien Lösung zu gelangen.

Die Erscheinungen, welche ein staubförmiger Saturnring darbietet, habe ich in zwei grösseren Arbeiten besprochen und ich glaube dort den stricten Nachweis geliefert zu haben, dass alle Erscheinungen, die zum Theil sehr complexer Natur sind, nur durch die zu Grunde gelegte Annahme erklärt werden können. Bei dem noch nicht gehörig entwickelten Zustande der Dynamik des Saturnringes dürfte auf diesem Wege die festeste Stütze gewonnen sein, die man bis jetzt der Maxwell-Hirn'schen Annahme geben konnte.

Es ist interessant, dass die Forschung, nachdem der Reihe nach alle nur denkbaren Annahmen über die Constitution des Saturnringes discutirt und als wahrscheinlich hingestellt worden sind, wieder jener Ansicht zuneigt, welche als eine der ersten aufgestellt worden ist, um dann aber, wie es scheint, völlig der Vergessenheit zu verfallen. Es ist von verschiedenen Seiten bemerkt worden, dass Jacques Cassini (1677—1756) bereits die Maxwell-Hirn'sche Ansicht ausgesprochen hat. Die Wichtigkeit der Angelegenheit wird es wohl rechtfertigen, wenn ihr etwas nachgegangen wird. Bei Gelegenheit der Veröffentlichung seiner Beobachtungen des Saturn, namentlich des Verschwindens des Ringes im Jahre 1715 [1]) spricht sich Cassini ganz deutlich aus. Pag. 47 sagt er:

1) Observations nouvelles sur Saturne. Mémoires de mathematique et de physique, tirés des registres de l'académie royale des sciences de l'année 1715 pg. 41 ff.

„Cette apparence qui n'a point sa pareille dans les corps célestes, a donné lieu de conjecturer que ce pouvait être un amas de satellites qui étaient dans le plan des autres et faisaient leur révolution autour de cette planète, que leur grandeur est si petite qu'on ne peut pas les apercevoir chacun séparément, mais qu'ils sont en même temps si près l'un de l'autre qu'on ne peut point distinguer les intervalles qui sont entr'eux, ensorte qu'ils paraissent former un corps continu".

Hieran werden Bemerkungen geknüpft über Schwierigkeiten, die bei der Darstellung der Beobachtungen auftreten sollen, in dieser Form aber wohl nicht existiren. Den Schluss bildet (pg. 48) die Bemerkung:

„On peut donc supposer avec beaucoup de vraisemblance que l'anneau de Saturne est formé d'une infinité de petites Planètes fort près l'une de l'autre, qui étant comprises dans son Atmosphère, sont entraînés par le mouvement qui fait tourner Saturne autour de son centre et que dans cette Atmosphère etc."

Hiernach nimmt also Cassini an, dass die discreten Theilchen, welche den Ring bilden, in der Atmosphäre des Saturn sich befinden und mit dieser durch die Rotation des Saturn herumgeführt werden. Das ist freilich ein Zusatz, welcher die ganze Auffassung völlig verschiebt, und da Cassini diesen Zusatz für ganz wesentlich hält, steht er doch auf wesentlich anderem Boden als auf dem der Hypothese von Maxwell und Hirn. Es erscheint demnach doch nicht so räthselhaft, dass die Cassini'sche Ansicht nicht allgemeine Verbreitung gefunden hat.

Danach wird man, wie ich glaube, nicht gegen die historische Gerechtigkeit verstossen, wenn man die Erkenntniss, dass die Saturnringe eine staubförmige Constitution haben, an die Namen Maxwell und Hirn knüpft.

Ueber normale und anomale Dispersion elektrischer Wellen.

Von L. Graetz und L. Fomm.

(*Eingelaufen 5. Mai.*)

Vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie ist nicht zu erwarten, dass die Dielektrizitätsconstante eines Körpers eine durchaus constante Grösse sei. Denn da ihre Wurzel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Verschiebung umgekehrt proportional sein soll (bei gleicher magnetischer Inductionsconstante) und da wir aus den optischen Messungen wissen, dass der Brechungsexponent mit der Wellenlänge variirt, so ist von vorn herein zu schliessen, dass sich die Dielektrizitätsconstante eines Körpers abhängig zeigt von der Wellenlänge der elektrischen Bewegungen, durch deren Hülfe sie gefunden wird. Ebensowenig ist aus der Maxwell'schen Theorie mit Nothwendigkeit der (gewöhnlich angeführte) Schluss zu ziehen, dass die Constante der Cauchyschen oder einer anderen Dispersionsformel (für normale Dispersion) der Wurzel aus der Dielektrizitätsconstante gleich sein muss, ein Schluss, der ja auch durch die Erfahrung nur in wenigen Fällen bestätigt wird. Vielmehr ist aus der Thatsache, dass die Dielektrizitätsconstante, in gewöhnlicher Weise bestimmt, sich meistens viel grösser ergiebt, als das Quadrat des auf unendlich lange Wellen reducirten Brechungsexponenten, consequent nur zu schliess[illegible]s im Gebiet der langen Wellen häufig Abs[illegible]folgende anomale

Dispersionen vorkommen, welche den Gang der Dispersionscurve wesentlich beeinflussen.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, haben wir uns die Frage gestellt, ob eine Abhängigkeit der Dielektrizitätsconstante von der Wellenlänge der elektrischen Wellen experimentell zu constatiren ist. Man weiss von einer Reihe von Körpern, dass ihre Dielektrizitätsconstante, statisch gemessen, sich viel grösser ergiebt, als gemessen durch Schwingungen, auch wenn diese nur die langsamen Schwingungen eines Induktionsapparates sind. Man nahm an, dass man sich dabei durch Abkürzung der Ladungszeit dem wahren d. h. kleinsten Werth der Dielektrizitätsconstante nähert. Nach der obigen Darlegung giebt es aber gar keinen „wahren" Werth der Dielektrizitätsconstante, vielmehr ist jeder durch einwurfsfreie Methoden sicher bestimmte Werth der Dielektrizitätsconstante als der wahre Werth für die zugehörige Wellenlänge anzusehen. Dass durch die Abkürzung der Ladungszeit man sich dem sogenannten wahren d. h. kleinsten Werth der Dielektrizitätsconstante nicht immer nähert, wird bewiesen durch die Versuche von Lecher[1]), welcher sogar bei raschen Hertz'schen Schwingungen ein Anwachsen der Dielektrizitätsconstante bei einigen Körpern constatirte, gegenüber den durch langsame Schwingungen bestimmten. Man wird vielmehr nach der Ausdrucksweise der Optik sagen müssen, dass, wenn sich die Dielektrizitätsconstante um so kleiner ergiebt, je grösser die angewendete Wellenlänge ist, dass man es dann mit einem Körper mit normaler Dispersion zu thun hat, dass dagegen, wenn umgekehrt die Dielektrizitätsconstante mit wachsender Wellenlänge selbst wächst, in dem hinter diesem Gebiet liegenden Theil der Wellenlängen (nach kürzeren Wellenlängen zu) anomale Dispersionen stattgefunden haben, und

1) Lecher Wied. Ann. 42 p. 142. 1891.

dass endlich, wenn man mit den Wellenlängen in ein Gebiet der anomalen Dispersion selbst kommt, die Dielektrizitätsconstanten mit abnehmender Wellenlänge zunehmen, dann bis zu einem Minimum abnehmen und dann wieder zunehmen müssen.

Bei Körpern, wie Schwefel, Paraffin, Schellack, für welche die gewöhnliche Maxwell'sche Beziehung gilt, ist natürlich eine Abhängigkeit der Dielektrizitätsconstante von der Wellenlänge, wie sie herstellbar ist, nicht zu erwarten. Wohl aber konnte ein solcher Einfluss bei Körpern mit grosser Dielektrizitätsconstante erwartet werden, da die meisten bisher untersuchten Substanzen zu der zweiten der oben erwähnten Klassen zu gehören scheinen. Wir sind aber beim Beryll mit dem von uns benützten Intervall der Wellenlängen gerade in ein Gebiet hineingekommen, welches für die Dielektrizitätsconstante genau denselben Gang zeigt, wie er bei anomaler Dispersion für den Brechungsexponenten in solchen Fällen bekannt ist.

Zu den Messungen benutzten wir die Erscheinung, welche wir früher [1]) ausführlich dargelegt haben, dass dielektrische Ellipsoide in einem von elektrischen Schwingungen durchzogenen homogenen Feld Drehungsbewegungen ausführen, welche dem Quadrat der angewendeten elektrischen Kraft proportional sind. Bei dieser Methode liess sich die Wellenlänge der angewendeten Schwingungen leicht dadurch variiren, dass wir eine Reihe von Leydener Flaschen von verschiedener Capacität anwendeten. Die Entladungsfunken derselben zwischen den Kugeln eines Mikrometers gaben uns Schwingungen, deren Wellenlängen sich nach der Theorie wie die Wurzeln der Capacitäten verhalten, wenn, wie es der Fall war, der ganze übrige Stromkreis möglichst unverändert blieb. Ausserdem konnten wir sehr langsame Schwingungen mit derselben Anordnung dadurch hervorbringen, dass wir die Kugeln des Mikrometers so weit auseinanderzogen, dass keine Funken

1) Graetz und Fomm Sitzungsber. d. bayr. Akad. 23 p. 275. 1893.

übergingen. Dann folgten sich die Schwingungen nur in der Periode, welche der Unterbrecher des Induktionsapparates hatte, einige hundert in der Sekunde.

Die Anordnung war derartig, dass eine der Leydener Flaschen mit den beiden sekundären Polen eines Induktionsapparates verbunden und durch dessen Ströme geladen wurde. Die Entladung geschah durch das Funkenmikrometer, von dessen Kugeln aus zwei Drähte zu zwei parallel geschalteten Kohlrausch'schen Condensatoren führten. Zwischen den Platten derselben hingen an gefirnissten Glasstäbchen die zu untersuchenden Scheiben oder Stäbchen, die durch einen Tropfen Schellack an den Stäbchen befestigt waren. Die Stäbchen selbst hingen an einem Spiegel, dieser an einem feinen Metallfaden, der an einer Ebonitfassung innerhalb einer Glasröhre aufgehängt war. Wenn der Spiegel sorgfältig den Platten des Condensators parallel gestellt wird — was auf optischem Wege jedesmal controllirt wurde —, wird die ganze Aufhängung selbst von den Ladungen nicht beeinflusst. Die Stäbchen und Scheiben wurden sorgfältig so befestigt, dass sie genau unter 45° gegen den Spiegel und damit gegen die Condensatorplatten standen. In dem einen der Condensatoren, den wir als Standard bezeichnen, hing zunächst eine dünne Kreisscheibe aus Schwefel, deren Ausschläge uns das Mass für die vorhandene elektrische Kraft gaben. Später wurde für manche Körper ein Kupferstäbchen zum Vergleich genommen. Der Abstand der Condensatorplatten wurde bei beiden Instrumenten gewöhnlich gleich gross gemacht (25 mm, bei grossen Dielektrizitätsconstanten 35 mm).

Theorie der Versuche.

Ein dielektrisches Ellipsoid wird in einem homogenen elektrischen Felde gleichmässig polarisirt. Hat das Ellipsoid die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und wirken in der Richtung der $x\,y\,z$-Axe die inducirenden Kräfte $X\,Y\,Z$, so sind die dielektrischen Momente des Ellipsoids pro Volumeneinheit[1])

$$\alpha = \frac{\varkappa X}{1 + \varkappa A_0} \qquad \beta = \frac{\varkappa Y}{1 + \varkappa B_0} \qquad \gamma = \frac{\varkappa Z}{1 + \varkappa C_0}$$

wo $A_0\,B_0\,C_0$ von dem Verhältniss der Axen abhängige Constanten sind und $\varkappa$ die „Dielektrisirungsconstante" ist, entsprechend der Poisson'schen Magnetisirungsconstanten. Die Dielektrizitätsconstante D ist

$$D = 1 + 4\,\pi\,\varkappa.$$

In unserem Fall haben wir ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe die x-Axe sei. Die x- und y-Axe mögen in einer horizontalen Ebene liegen und es möge die elektrische Kraft unseres Feldes den Winkel φ mit der x-Axe bilden (φ ist bei uns nahezu $= 45^0$). Ist P die ganze elektrische Kraft, d. h. die Potentialdifferenz W der Platten dividirt durch ihren Abstand und verläuft P, wie in unserem Falle horizontal, so hat das dielektrische Moment unseres Ellipsoids die Grösse (wenn V das Volumen des Ellipsoids ist)

$$m = \varkappa\,P\,V \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(1 + \varkappa A_0)^2} + \frac{\sin^2\varphi}{(1 + \varkappa B_0)^2}}.$$

und die dielektrische Axe bildet mit der x-Axe, der Rotationsaxe, einen Winkel ψ, so dass

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1 + \varkappa A_0}{1 + \varkappa B_0} \operatorname{tang}\varphi \quad \text{ist.} \quad \ldots$$

Das Drehungsmoment, welches den W
grössern strebt, ist

1) Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizit

$$D = -\frac{\varkappa^2 P^2 \sin 2\varphi (B_0 - A_0) V}{(1 + \varkappa A_0)(1 + \varkappa B_0)}$$

Bei unserer Aufhängung wird bei den Stäbchen der Winkel φ verkleinert, bei den Scheiben vergrössert.

Diesem Drehungsmoment wird, wenn der Winkel φ sich um α verkleinert hat, durch die Torsion des Drahtes das Gleichgewicht gehalten. Ist also M der Torsionscoefficient des Aufhängedrahtes und wird die Grösse $\frac{\alpha}{\cos 2\alpha}$ gleich p gesetzt und zugleich, wie bei unseren Versuchen $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ angenommen, so wird

$$2) \ldots\ldots \qquad M p = \frac{\varkappa^2 P^2 (B_0 - A_0) V}{(1 + \varkappa A_0)(1 + \varkappa B_0)}$$

Werden die entsprechenden Grössen für die Standardscheibe mit γ, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{V}$ bezeichnet und wird

$$\frac{\gamma^2 (\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_0) \mathfrak{V}}{(1 + \gamma \mathfrak{A}_0)(1 + \gamma \mathfrak{B}_0)} = s$$

gesetzt, vorausgesetzt, dass γ bekannt ist, so wird

$$3) \ldots \quad \frac{\varkappa^2}{(1 + \varkappa A_0)(1 + \varkappa B_0)} = \frac{p}{\mathfrak{p}} \frac{M}{\mathfrak{M}} \frac{s}{V (B_0 - A_0)}$$

woraus $\varkappa$ zu bestimmen ist, wenn $\frac{p}{\mathfrak{p}}, \frac{M}{\mathfrak{M}}, V$ gemessen, s, A_0, B_0 berechnet sind.

Die Grösse A_0 und B_0 ergeben sich [1])

1. für eine Scheibe, wenn a die halbe Rotationsaxe, b die andere Halbaxe ist und $\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} = \varepsilon$ gesetzt wird:

1) Kirchhoff Mechanik S. 131.

$$A_0 = 4\pi \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\left\{\varepsilon - arc\,\mathrm{tang}\,\varepsilon\right\}$$

$$B_0 = \frac{2\pi}{\varepsilon^3}\left\{(1+\varepsilon^2)\,arc\,\mathrm{tang}\,\varepsilon - \varepsilon\right\}$$

2. für ein Stäbchen bei derselben Bezeichnung der Halbaxen, wenn $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \eta$ gesetzt wird

$$A_0 = -4\pi \frac{1-\eta^2}{\eta^3}\left\{\left(\log\mathrm{nat}\sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\right) + \eta\right\}$$

$$B_0 = \frac{2\pi}{\eta^3}\left\{(1-\eta^2)\left(\log\mathrm{nat}\sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\right) + \eta\right\}$$

Die Messungen.

Zu den Messungen wurden 4 Leydener Flaschen benutzt, die wir, von der kleinsten angefangen, als IV, III, II und I bezeichnen. Die Capacitäten dieser Flaschen wurden direkt verglichen und ergaben, bezogen auf $C_{IV} = 100$, die Werthe $C_{IV} = 100$, $C_{III} = 151$, $C_{II} = 185$, $C_I = 396$. Da aber in unseren Beobachtungen zu den Flaschen noch die beiden Condensatoren parallel geschaltet waren, so sind die Verhältnisse kleiner. Die in Betracht kommenden Capacitäten lassen sich angenähert aus den Ausschlägen unseres Standardinstruments bei so grosser Entfernung der beiden Mikrometerkugeln, dass keine Funken mehr überspringen ($\tau = \infty$), vergleichen. Es waren z. B. diese Ausschläge α und die daraus berechneten Capacitäten C

Flasche	IV	III	II	I
α	644	431	380	199
C	100	149,6	170	324

Letztere Werthe von C sind für unsere Versuche massgebend.

Die entsprechenden Wellenlängen λ, die den Wurzeln aus den Capacitäten proportional sind, sind

$$\lambda_{IV} = 100 \quad \lambda_{III} = 122{,}3 \quad \lambda_{II} = 130{,}4 \quad \lambda_{I} = 180{,}0.$$

Die Wellenlängen umfassen also keine ganze Oktave. Ausserdem aber konnten wir, wie erwähnt, sehr grosse Wellenlängen anwenden, indem wir ohne Funken, bloss mit den Ruhmkorffschwingungen arbeiteten. Diese Wellenlänge wollen wir als λ_R bezeichnen.

Bei jeder Flasche wurden gewöhnlich 4 Messungen in der Art gemacht, dass die Funkenstrecke auf 3 verschiedene, jeweils passende Abstände gebracht wurde, bei denen continuirlich Funken übergingen und die wir von der grössten zur kleinsten mit τ_a, τ_b, τ_c bezeichnen, und eine vierte Messung ohne Funken, mit τ_∞ bezeichnet. Wir nehmen an, dass bei derselben Flasche die Schwingungsdauer sich nicht wesentlich ändert, wenn man der Funkenstrecke die Längen τ_a, τ_b, τ_c giebt, die höchstens um einige Millimeter differirten. Feddersen zeigte bereits, dass diese Veränderung ohne wesentlichen Einfluss ist.

Beobachtungen an Schwefel.

Um die Dielektrizitätsconstante des Schwefels für verschiedene λ zu messen und zugleich für unser Standardinstrument das γ zu bestimmen, welches in die weiteren Messungen eingeht, wendeten wir eine Scheibe und ein Stäbchen aus Schwefel an. Aus dem Verhältniss ihrer Drehungen lässt sich γ berechnen. Bezeichnen wir nämlich für die Scheibe alle Grössen mit deutschen, für das Stäbchen mit lateinischen Buchstaben, so ergiebt sich aus der obigen Formel 2)

$$\frac{(1+\gamma\mathfrak{A}_0)(1+\gamma\mathfrak{B}_0)}{(1+\gamma A_0)(1+\gamma B_0)} = \frac{p}{\mathfrak{p}}\,\frac{M}{\mathfrak{M}}\,\frac{\mathfrak{B}}{V}\,\frac{\mathfrak{B}_0-\mathfrak{A}_0}{B_0-A_0} = f.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, dass die beiden Schwefelstücke dasselbe γ haben, eine Voraussetzung, die wohl unbedenklich ist, da Scheibe und Stäbchen gleichzeitig hergestellt waren.

Die Resultate der Messungen sind folgende, wobei jeder Werth von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ aus mindestens 3 durch Schwingungsbeobachtungen erhaltenen Einzelwerthen das Mittel ist.

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Schwefelstäbchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$\tau = a$	0,5695	0,5568	0,5866	0,5509	0,5634 aus I
$\tau = b$	0,5683	0,5643	0,5602	0,5573	0,5687 „ II
$\tau = c$	0,5705	0,5691	0,5491	0,5686	0,5583 „ III
					0,5692 „ IV
Mittel	0,5694	0,5634	0,5653	0,5589	0,5649

Diese Zahlen weichen vom Mittel um nicht mehr als 1 % ab, so dass eine Abhängigkeit von der Wellenlänge nicht zu erkennen ist, sie zeigen zugleich, dass die Methode bis auf 1 bis 2 % übereinstimmende Zahlen ergiebt. Diese Fehlergrenze beruht hauptsächlich darauf, dass der Unterbrecher des Ruhmkorff nicht regelmässig funktionirt, ein Uebelstand, der durch die gleichzeitige Beobachtung an zwei Instrumenten wohl in seiner Wirkung reducirt, aber nicht ganz unschädlich gemacht werden kann.

Die zur Berechnung von γ nothwendigen Constanten sind

$$\mathfrak{A}_0 = 11{,}8432 \quad \mathfrak{B}_0 = 0{,}3616 \quad \mathfrak{M} = 4{,}4174 \quad \frac{\mathfrak{B}}{V} = \frac{621}{491}$$

$$A_0 = 0{,}6105 \quad B_0 = 5{,}9780 \quad M = 4{,}3400.$$

Aus dem Mittelwerth aller $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ ergiebt sich

$$\gamma = 0{,}24915$$
$$D = 1 + 4\,\pi\,\gamma = 4{,}131.$$

Dieser Werth für D liegt nahe an dem von Boltzmann gefundenen, welcher für die drei Hauptaxen die Werthe fand $D = 4{,}773$, $3{,}970$, $3{,}811$, im Mittel also $4{,}184$. Diese beiden Schwefelstücke wurden gleich nach der Herstellung (Guss) untersucht. Für andere, lange benützte Schwefelstücke fanden wir $\gamma = 0{,}24915$, woraus $D = 3{,}798$ sich ergiebt. Es ist bekannt, dass gegossener Schwefel beim Stehen spontan in eine andere Modifikation übergeht.

Beobachtungen an Paraffin.

Eine Paraffinscheibe von 20,9 mm Durchmesser und 1,2 mm Dicke wurde mit einer Schwefelscheibe verglichen, für welche $s = 54{,}855$ (s. p. 194) war. Es ergaben sich folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Paraffinscheibe}}{\text{Schwefelscheibe}}$.

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$\tau = a$	0,3239	0,3406	0,3115	0,3463	0,3492 aus I
$\tau = b$	0,3388	0,3507	0,3572	0,3375	0,3441 „ II
$\tau = c$	0,3532	0,3341	0,3531	0,3420	0,3327 „ III
					0,3434 „ IV
Mittel	0,3386	0,3418	0,3406	0,3419	0,3423

Auch hier lässt sich, wie zu erwarten, ein Gang der Dielektrizitätsconstante nicht erkennen. Aus dem Mittelwerth der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und den Constanten der Paraffinscheibe $A_0 = 11{,}5105$, $B_0 = 0{,}52788$, $V = 411{,}7$ ergiebt sich

$$\varkappa = 0{,}1162$$
$$D = 1 + 4\,\pi\,\varkappa = 2{,}20.$$

Boltzmann fand für Paraffin 2,32.

Beobachtungen an Wasser.

Um Körper mit grösserer Dielektrizitätsconstante auf ihre etwaige Dispersion zu untersuchen, gingen wir bald zum Wasser über, dessen Dielektrizitätsconstante die grösste bisher gemessene ist. Wir brachten das Wasser in eine kleine dünnwandige Ebonitröhre (20,1 mm Länge, 3,0 mm Durchmesser), welche an den beiden Enden durch Ebonitpfröpfchen verschlossen war. Die Messungen wurden erst an der leeren, dann an der mit Wasser gefüllten Röhre vorgenommen und die ersteren Ausschläge, auf gleiche Standardausschläge reducirt, von den letztern abgezogen. Diese Correktion betrug 2—3 %. Mit den Ruhmkorffschwingungen allein haben wir keine Messungen angestellt, weil bei unsern Potentialen dann die Ausschläge zu gross wurden, so dass merkbare Einwirkungen der Ladungen auf den Spiegel der Aufhängung stattfanden, die nur unsicher hätten eliminirt werden können. Wir beschränken uns also auf die Angabe der Resultate mit raschen Condensatorschwingungen. Die benützte Schwefelscheibe hatte ein $s = 43{,}610$.

Die Beobachtungen ergaben folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Wasserröhrchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{IV}
$r = a$	4,1812	4,1823	4,1324
$r = b$	4,1577	4,1326	3,9869
$r = c$	4,1117	4,0481	4,0802
Mittel	4,1502	4,1210	4,0665

Es scheint hier ein Gang der Dielektrizitätsconstante in der Weise vorzuliegen, dass mit wachsender Wellenlänge auch die Dielektrizitätsconstante grösser wird. Da jedoch die Differenzen der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ 2 % nur wenig übersteigen, so ist das

Resultat nicht sicher. Aus dem Mittelwerth der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und $A_0 = 0{,}45998$, $B_0 = 6{,}05330$, $V = 140{,}00$ ergiebt sich

$$\varkappa = 5{,}8324$$
$$D = 73{,}54$$

ein Werth, der mit den bisher bekannten gut übereinstimmt. Es ist jedoch dieses Resultat bei so grossen Werthen von D nur durch aussergewöhnliche Sorgfalt zu erreichen und zwar desshalb, weil eben der Werth von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ so gross ist, dass kleine Aenderungen in ihm und kleine Ungenauigkeiten in der Bestimmung der Dimensionen des Röhrchens schon grosse Aenderungen von D hervorbringen.

Um diesen Uebelstand, der auch bei anderen Substanzen sich zeigte, zu vermeiden, haben wir versucht, ob wir nicht derartige Körper mit grossem D mit Metallen vergleichen können.

Beobachtungen an Kupfer.

Wendet man die Mosotti-Poisson'sche Theorie auf Metalle an, so ist, weil für diese bei statischen Zuständen das Potential constant sein muss, die Dielektrisirungsconstante $\varkappa = \infty$ zu setzen. Es war die Frage, ob bei unsren, immerhin raschen Schwingungen die Ladungen den Metallen gegen über noch als statische oder besser quasistatische anzusehen wären. War das der Fall, dann musste ein Kupferstäbchen den Werth $D = \infty$ ergeben. Dabei ist zu bedenken, dass die oben entwickelte Formel 3, durch welche man D aus $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ bestimmt, eine Curve von folgendem Verlauf giebt. Trägt man die $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ als Abscissen auf, so steigt die Curve von D erst langsam, dann rascher an und geht endlich steil bis $+\infty$, um dann nach $-\infty$ zu springen und mit weiter wachsendem $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ allmählich kleinere negative Werthe von D zu liefern.

Wenn also die Beobachtungen einen sehr grossen positiven oder negativen Werth von D ergeben, so ist dies ein Beweis für $\varkappa = \infty$. Die Beobachtungen ergaben für ein Kupferstäbchen von 23 mm Länge und 2,94 mm Durchmesser (an den Enden abgerundet) folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Kupferstäbchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{IV}
$\mathfrak{r} = a$	7,971	8,008	8,004
$\mathfrak{r} = b$	8,153	7,823	8,053
$\mathfrak{r} = c$	7,983	8,085	8,017
Mittel	8,0357	7,9720	8,0280

Mit dem kleinsten Werth 7,9720 ergiebt sich $D = +7445$, mit dem grössten 8,0357, der nur um 0,75 % grösser ist, $D = -9120$, so dass damit der Werth von $\varkappa = \infty$ für unsre Schwingungen als gültig bewiesen ist.

Wenn das Kupferstäbchen als Standard genommen wird, so ist der Werth der Grösse s (p. 194).

$$s = \frac{(\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{B}_0} = 397{,}7.$$

Beobachtungen an Bromblei.

Ein Stäbchen aus Bromblei von 21,6 mm Länge und 3,9 mm Dicke ergab mit Kupfer verglichen folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Brombleistäbchen}}{\text{Kupferstäbchen.}}$

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{III}	λ_{IV}
$\mathfrak{r} = a$	0,8767	0,7828	0,8355	0,8223
$\mathfrak{r} = b$	0,8573	0,8486	0,7929	0,7884
$\mathfrak{r} = c$	0,8437	0,8141	0,7956	0,7760
Mittel	0,8592	0,8152	0,8080	0,7956

Hier zeigen die Zahlen $\frac{p}{\mathfrak{p}}$, von denen die Dielektrizitätsconstante abhängt, einen ausgesprochenen Gang mit der Wellenlänge und zwar so, dass die Dielektrizitätsconstante mit wachsender Wellenlänge selbst wächst. Die Berechnung ergiebt für die Dielektrizitätsconstante

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}
$D =$	41,792	42,938	43,692	48,643

Dieser Gang zeigt an, dass bei kürzeren Wellen als λ_{IV} Absorptionen und anomale Dispersionen stattgefunden haben und dass die Dispersionscurve in unserem Intervall noch in aufsteigendem Gang ist.

Beobachtungen an Jodblei.

Denselben Gang ergaben die Beobachtungen an einem Jodbleistäbchen von 21,7 mm Länge und 3,60 mm Dicke. Es ergaben sich folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Jodbleistäbchen}}{\text{Kupferstäbchen}}$.

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{IV}
$\tau = a$	0,8178	0,8030	0,8243
$\tau = b$	0,9303	0,9191	0,8544
$\tau = c$	0,9355	0,8977	0,8158
Mittel	0,8946	0,8733	0,8315

Die Differenz der äussersten Werthe ist 7 %. Die daraus berechneten Werthe der Dielektrizitätsconstanten, die grössten bisher bekannten, sind

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_{I}
D	113,2	147,7	172,8

Wenn nun auch der Gang der Dielektrizitätsconstante bei diesen beiden Körpern die frühere Ansicht zu bestätigen scheint, dass mit Abkürzung der Ladungszeit die Dielektrizitätsconstanten kleiner werden, weil die Leitung sich dann nicht voll entwickeln kann, so scheinen uns gegen diese Erklärung die Gründe zu sprechen, dass erstens bei unserem Wasser (Wasserleitungswasser, nicht destillirtes Wasser), welches ein besserer Leiter als Jodblei und Bromblei bei diesen Temperaturen ist, ein so erhebliches Anwachsen von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ mit waschsender Wellenlänge sich nicht zeigt, sondern nur ein noch in die Beobachtungsfehler fallendes und zweitens, dass unsere nun anzuführenden Beobachtungen an Beryll ein ganz anderes, anomales Verhalten zeigten.

Beobachtungen an Beryll.

Wir hatten eine senkrecht zur Axe geschnittene Beryllscheibe, welche wir der Freundlichkeit des Herrn Prof. Groth verdanken. Ihr Durchmesser ist 15,5 mm, ihre Dicke 0,44 mm. Daraus ergeben sich ihre Constanten

$$A_0 = 12{,}0254 \qquad B_0 = 0{,}27038 \qquad V = 83{,}025$$

Folgendes ist das Resultat einer ersten Messungsreihe:

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Beryllscheibe}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$\tau = a$	1,0246	0,7836	1,1270	0,6935 aus I
$\tau = b$	1,1027	0,7149	0,9531	0,7185 „ II
$\tau = c$	0,9410	0,7767	1,0698	0,6735 „ IV
Mittel	1,0228	0,7584	1,0499	0,6952

Die Zahlen zeigen deutlich ein Minimum von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und daher auch ein Minimum der Dielektrizitätsconstante für die

Wellenlänge λ_{II}. Die Dielektrizitätsconstanten ergeben sich aus diesen Zahlen:

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$D=$	8,503	6,580	9,207	5,943

Der Verlauf dieser Zahlen, die hier von der kürzesten zur längsten Wellenlänge fortschreitend geordnet sind, ist genau derselbe, wie der für den optischen Brechungsindex bei anomaler Dispersion. Es sind z. B. für Fuchsin die Zahlen von Wernicke für die

Linie	*H*	*G*	*C*	*A*
$n=$	1,54	1,31	1,90	1,73.

Um die Werthe von D sicherer zu bestimmen, haben wir eine zweite Versuchsreihe mit einer andern Schwefelscheibe als Standard angestellt, indem wir noch die Flasche III, die eine Wellenlänge zwischen II und IV ergiebt, hinzunahmen.

Folgendes sind die

$$\text{Werthe von } \frac{p}{\mathfrak{p}} \text{ für } \frac{\text{Beryllscheibe.}}{\text{Schwefelscheibe II.}}$$

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$\tau = a$	0,6274	0,5042	0,5407	0,6233	0,5217 aus I
$\tau = b$	0,6146	0,5189	0,5426	0,6008	0,4885 „ II
$\tau = c$	0,5738	0,4775	0,5360	0,6572	0,5140 „ III
					0,4876 „ IV
Mittel	0,6053	0,5002	0,5398	0,6271	0,5029

Es ist also hier der Gang der Zahlen genau derselbe, nur zeigt sich das Minimum noch bei kürzeren Wellen als früher, nämlich schon bei der Wellenlänge λ_{III}.

Die hieraus berechneten Werthe von D sind, zusammengestellt mit den aus den vorigen Beobachtungen, folgende:

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
Beob. I	8,50		6,58	9,21	5,94
Beob. II	7,80	6,60	7,08	8,04	6,68
Mittel	8,15	6,60	6,83	8,62	6,31

Die aus der Formel $n^2 = D$ berechneten Brechungsexponenten sind folgende:

$$n = 2{,}846 \quad 2{,}588 \quad 2{,}613 \quad 2{,}936 \quad 2{,}512.$$

Curie[1]) fand für Beryll in der Richtung der optischen Axe $D_c = 6{,}24$, senkrecht zur optischen Axe $D_a = 7{,}58$.

Die Dispersionscurve verläuft übrigens bei Beryll lange nicht so scharf, wie sie es bei Fuchsin thut.

Wir beabsichtigen diese Erscheinungen bei Beryllstäbchen anderer Provenienz und verschiedener Orientirung der Axe weiter zu untersuchen und die Wellenlängen, bei denen die anomale Dispersion stattfindet, absolut zu bestimmen. Aus der Thatsache der anomalen Dispersion lässt sich auch erkennen, warum die Einzelbeobachtungen beim Beryll nicht denselben Grad der Uebereinstimmung zeigen, wie bei anderen Substanzen. Wir haben es ja sicher nicht mit ganz reinen Wellen zu thun, sondern jedenfalls mit etwas gemischten, zum mindesten schon dadurch, dass die Ruhmkorffschwingungen sich den Funkenschwingungen überlagern.

Wenn man die oben unter 1 angegebene Formel betrachtet, so erkennt man, wie sich in unserem Falle das Analogon zu der prismatischen Trennung der Farben ergiebt. Denn der Winkel, den die dielektrische Axe des polarisirten Körpers mit der Rotationsaxe bildet, ist, wenn $\varphi = 45^0$ ist,

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{1 + \varkappa A_0}{1 + \varkappa B_0}$$

1) Curie Ann. chim. et phys. (6) 17. p. 385. 1889.

Hat also $\varkappa$ für verschiedene Längen der Wellen verschiedene Werthe, so ist die Richtung der dielektrischen Axe im Körper jedesmal verschieden und ein System von verschiedenen gleichzeitig ankommenden Wellen giebt eine Reihe von fächerartig auseinandergehenden dielektrischen Axen.

Da die Absorption der elektrischen Strahlen, die die Dispersion bedingt, von der Leitung abhängt, so folgt aus unseren Versuchen auch, dass die Leitungsfähigkeit solcher Körper bei verschiedenen Wellenlängen verschieden sein muss und allgemein, dass Dielektrizitätsconstante und Leitungsfähigkeit nicht vollständig von einander unabhängige Grössen sind, sondern dass sie in ähnlicher Weise durch die Constitution des Körpers zusammenhängen, wie in der Optik absorbirender Körper die Brechung und die Absorption.

München, Physik. Institut d. Univers., Mai 1894.

Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Der Abschnitt der Kirchhoff'schen Vorlesungen über Gastheorie überragt so wie die übrigen Theile dieses Werkes sowohl in der Vorzüglichkeit der Auswahl des Stoffes als auch in der Darstellung weit die gewöhnlichen Lehrbücher. So wird dort zum ersten Male auf die Richtigkeit der Thatsache hingewiesen, dass die 3 experimentell so oft gefundenen Werthe 1·67, 1·4 und 1·33 für das Verhältniss der Wärmecapacitäten eines Gases bei constantem Drucke und Volumen, aus der Annahme der Analogie der Gasmoleküle mit festen Körperchen folgen und ich will bei dieser Gelegenheit nur beiläufig bemerken, dass der Haupteinwand gegen diese Analogie, der auf der complicirten Natur des Spectrums selbst des *Hg*-Dampfes begründet ist, durch die Versuche von Pringsheim[1]) sehr an Bedeutung verliert, welche beweisen, dass diese Spectra nicht durch die regelmässige innere Wärmebewegung der Gasmoleküle zwischen je 2 Zusammenstössen, sondern durch fremdartige chemische Erregungen (elektrische Schwingungen im umgebenden Aether?) hervorgebracht werden.

1) Wied. Ann. 49, p. 347, 1893.

Umsomehr müssen, wie mir scheint, die Ungenauigkeiten der Darstellung in dem eingangs erwähnten Buche rückhaltslos aufgedeckt werden, damit sich nicht, von Kirchhoffs Autorität gedeckt, Irrthümer in die Gastheorie einschleichen. Denn selbst diejenigen, die wie der Herausgeber des in Rede stehenden Theiles der Kirchhoff'schen Vorlesungen die Gastheorie des auf sie aufgewandten Scharfsinnes unwerth achten, können und sollen nicht wünschen, dass, wer überhaupt über Gastheorie schreibt, es mit geringerem Scharfsinn thue.

Auf Seite 147 des 4. Bandes der Vorlesungen über mathematische Physik findet Kirchhoff für die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten eines von einem Zusammenstosse kommenden Molekülpaares in den durch das Integrale angegebenen Gebieten liegen, den Werth:

$$\begin{gathered} N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q) f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - Q) \cdot \\ \cdot \int d x_1 \, d y_1 \, d z_1 \, d \xi_1 \, d \eta_1 \, d \zeta_1 \, d x_2 \, d y_2 \, d z_2 \, d \xi_2 \, d \eta_2 \, d \zeta_2 \end{gathered} \qquad 1)$$

Da hier Q einen bestimmten Werth hat, nach welchem später differentiirt wird, so sind die Grenzen der Gebiete so eng zu ziehen, dass sie nur Molekülpaare umfassen, die vorher in ganz bestimmter Weise zusammengestossen sind. Das gleichzeitige Zusammentreffen zweier Moleküle in diesen beiden Gebieten kann daher nie durch die zufällige progressive Bewegung, bei welcher beide Moleküle von einander unabhängig sind, veranlasst werden, sondern nur durch einen vorhergehenden Zusammenstoss. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Moleküle gleichzeitig in diesen Gebieten liegen, darf daher nicht, wie die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier von einander unabhängiger Ereignisse berechnet und gleich

$$\begin{gathered} N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) \cdot \\ \cdot \int d x_1 \, d y_1 \, d z_1 \, d \xi_1 \, d \eta_1 \, d \zeta_1 \, d x_2 \, d y_2 \, d z_2 \, d \xi_2 \, d \eta_2 \, d \zeta_2 \end{gathered}$$

gesetzt werden, wodurch die Beweiskraft der folgenden

Deductionen hinfällig wird. Diese Wahrscheinlichkeit kann nur aus der Wahrscheinlichkeit der Zustände der beiden Moleküle vor dem Zusammenstosse und dem Verlaufe des letzteren berechnet werden, wodurch sich der Ausdruck 1) ergiebt. Erst wenn man die Gültigkeit der Gleichung

$$f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - Q) = \\ = f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)$$

bereits voraussetzt, folgt, dass diese Wahrscheinlichkeit ebensogross ist, als ob die beiden Moleküle unabhängig von einander in die betreffenden Bezirke gelangt wären, woraus dann Maxwell in bekannter Weise schliesst, dass sein Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz durch die Zusammenstösse nicht verändert wird. Dass nicht auch andere Geschwindigkeitsvertheilungsgesetze möglich sind, die durch die Zusammenstösse ebenfalls nicht gestört werden, kann auf diesem Wege überhaupt nicht bewiesen werden.

Bezüglich der Anwendung der auch von Kirchhoff benützten Functionaldeterminante in der Gastheorie sowie deren Beziehung zu Liouville und Jacobis Rechnungen vergl. Wien. Sitzungsber. Bd. 58, Oct. 1868, Bd. 63, März 1871, April 1871 etc. bezüglich der Abgrenzung der Integrationsgebiete vor und nach dem Zusammenstosse, Wien. Sitzungsber. Bd. 66, Oct. 1872, Abschn. 4. Die letzte dieser Abhandlungen citirt auch Hr. Planck bei anderer Gelegenheit.

Um nicht missverstanden zu werden, will ich mich noch enger dem Texte des Kirchhoff'schen Buches anschliessen. Daselbst werden auf Seite 145 zwei Gebiete der Variabeln $\int d\,x_1\, d\,y_1\, d\,z_1\, d\,\xi_1\, d\,\eta_1\, d\,\zeta_1$ und $\int d\,x_2\, d\,y_2\, d\,z_2\, d\,\xi_2\, d\,\eta_2\, d\,\zeta_2$ betrachtet. Nehmen wir nun an, es soll sich gleichzeitig ein Molekül in dem einen und ein 2. in dem 2. Gebiete befinden (d. h. die Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des betreffenden Moleküls sollen innerhalb der durch das Integrale angegebenen Grenzen liegen). Dann

sind, je nach der Lage der betreffenden Gebiete 3 Fälle möglich. 1. Die beiden Moleküle eilen eben einem Zusammenstosse zu (d. h. sie stossen, nachdem sie gleichzeitig die Gebiete passirt haben, miteinander zusammen und keines stösst in der Zwischenzeit mit einem 3. zusammen). 2. Sie kommen eben von einem Zusammenstosse (d. h. sie stiessen, vor sie in die Gebiete eintraten, miteinander zusammen, wieder ohne dass eines derselben in der Zwischenzeit mit einem 3. zusammenstiess). Der 3. Fall umfasst alle anderen Möglichkeiten.

Im Kirchhoff'schen Buche wird nun auch im 2. Falle die Wahrscheinlichkeit, dass beide Moleküle gleichzeitig in beiden Gebieten liegen, gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten gesetzt, dass je eines der Moleküle im betreffenden Gebiete liegt, was nur erlaubt ist, wenn man die Richtigkeit der zu erweisenden Gleichung $f(u_1 + Q) f(u_2 - Q) = f(u_1) f(u_2)$ schon voraussetzt. Denn da im 2. Falle die Gebiete so liegen, dass soeben eine Wechselwirkung der Moleküle stattgefunden haben muss, so kann die Anwesenheit des einen Moleküles in seinem Gebiete nicht als ein von der Anwesenheit des andern Moleküls in seinem Gebiete unabhängiges Ereigniss aufgefasst werden.

Zur Integration der Diffusionsgleichung bei variabeln Diffusionscoefficienten.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Herr O. Wiener gab[1]) eine interessante Methode an, den Vorgang der Diffusion zweier Flüssigkeiten in allen Schichten gleichzeitig zu beobachten. Dabei zeigte sich bedeutende Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten. Herr Wiener zeigt, wie man diesem Umstande bei Berechnung der Versuche durch ein Näherungsverfahren Rechnung tragen kann. Ich habe nun schon vor langer Zeit ein Integrale der Diffusionsgleichung für variabeln Diffusionscoefficienten gefunden, welches Hausmaninger[2]) allerdings mit geringem Erfolge zur Berechnung der Versuche Waitz's verwendete. Da dasselbe vielleicht zur Berechnung der Wiener'schen Versuche nützlich sein könnte, so erlaube ich mir hier nochmals darauf zurückzukommen.

Zählen wir, wie Hr. Wiener die $+x$ von der ursprünglichen Grenze der übereinandergeschichteten Flüssigkeiten aus vertikal nach abwärts, bezeichnen mit n_1, n_2, n die Brechungsindices in der obern resp. untern reinen und an irgend einer Stelle der gemischten Flüssigkeit, mit t die

1) Wied. Ann. 49 p. 105, 1893.

2) Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 86, p. 1073, 1882.

seit Beginn der Diffusion verflossene Zeit und nehmen an, dass n die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial n}{\partial x}\right) \qquad 1)$$

erfüllt, wo k eine gegebene Funktion von n ist, sowie, dass die Diffusion weder Boden noch Niveau der obern Flüssigkeit in merklicher Weise erreicht hat, so folgt allgemein

$$n = n_2 - \frac{(n_2 - n_1)\int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^{\lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{2k}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^{\lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{2k}}} \qquad 2)$$

Man sieht, dass n und daher auch k nur Funktion von $x : \sqrt{t}$ ist. Unter den Integralzeichen ist immer der Werth des k für $x : \sqrt{t} = \lambda$ zu verstehen. Ich will mich hier nicht weiter darauf einlassen, wie diese Formel abgeleitet werden kann; dass sie alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, sieht man ohne weiteres. Die Gleichung 2) würde auch richtig sein, wenn k direkt als Funktion von $x : \sqrt{t}$ gegeben wäre; man könnte dann n unmittelbar daraus berechnen. Da aber hier k nicht direkt als Funktion von $x : \sqrt{t}$ gegeben ist, sondern eine zu findende Funktion von n ist, so kann diese Formel zur Berechnung der Versuche nicht verwendet werden. Man muss vielmehr k aus derselben berechnen. Man findet zunächst, wenn man wieder $\lambda = x : \sqrt{t}$ setzt

$$-\frac{1}{2}\lambda \frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(k \frac{dn}{d\lambda}\right) \qquad 3)$$

und hieraus bei constantem t

$$k = \frac{1}{2t\frac{dn}{dx}} \int_x^{\infty} \frac{dn}{dx} \cdot x \cdot dx \cdot \qquad 4)$$

Hr. Wiener findet nun durch das Experiment direkt Curven, deren (von einer schrägen Geraden an gezählte) Ordinaten z den Werthen von $\frac{d\,n}{d\,x}$ multiplicirt mit der Constanten $a\,\delta$ gleich sind, während die Abscissen $y = y_0 + x/\eta$ sind. (Siehe dessen Fig. 13 pag. 123.) Dabei ist η eine experimentell gegebene Constante, y_0 aber der Werth des y für die Stelle, wo die schräge Gerade die ursprüngliche Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten schneidet. Daraus folgt:

$$k = \frac{\eta^2}{2\,t\,z} \int_y^\infty z\,(y - y_0)\,d\,y \qquad 5)$$

Wir berechnen nun zu irgend einem x das dazu gehörige y, ziehen die diesem y entsprechende Ordinate z der Diffusionscurve, bezeichnen mit f den Flächenraum, der links von der Ordinate z, oben von der schrägen Geraden, unten von der Diffusionscurve begrenzt ist, und mit y_s die Abscisse des Schwerpunkts dieses Flächenraumes. Dann ist $f = \int_y^\infty z\,d\,y$, $y_s \cdot f = \int_y^\infty z\,y\,d\,y$, daher ist

$$k = \frac{y^2 f\,(y_s - y_0)}{2\,t\,z} \qquad 6)$$

der Werth des Diffusionscoefficienten für das betreffende x und t. Kann der Anfang der Diffusion nicht genau festgestellt werden, so ist er natürlich als 2. Unbekannte einzuführen, die Gleichung 6) für 2 verschiedene Zeiten aufzustellen, und daraus k und der Zeitanfang zu bestimmen. Die Vermuthung Herrn Wieners, dass der Diffusionscoefficient besser aus Versuchen mit geringen Concentrationsunterschieden berechnet werden kann, dürfte vollkommen richtig sein. Dagegen kann die obige Formel dienen, um zu controliren, ob für beträchtliche Concentrationsdifferenzen die Gleichung 1) gilt, in welchem

Falle für beliebige Zeiten für gleiche Werthe von n also von $n_2 - f\eta$ auch für k derselbe Werth folgen müsste.

Sollte die Gleichung 1) nicht gültig sein, so könnte eine analoge von der Concentration u gelten, so dass

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

wäre. Wäre dann $u = f(n)$ und setzt man $f'(n) = h$, $h\varkappa = k$, so hätte man

$$h\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial n}{\partial x}\right) \qquad 1\text{ a)}$$

oder

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k}{h}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial k}{\partial n}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 \qquad 1\text{ b)}$$

An Stelle der Gleichungen 2), 3), 4) und 5) würde folgen

$$n = n_2 - \frac{(n_2 - n_1)\displaystyle\int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^\lambda \frac{\lambda h\, d\lambda}{2k}}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^\lambda \frac{h\lambda\, d\lambda}{2k}}} \qquad 2\text{ a)}$$

$$-\frac{h\lambda}{2}\frac{dn}{d\lambda} = k\frac{d^2 n}{d\lambda^2} + \frac{dk}{dn}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)^2 \qquad 3\text{ a)}$$

$$k = -\frac{1}{2t\frac{dn}{dx}}\int_x^\infty \frac{dn}{dx} h\, x\, dx = \frac{\eta^2}{2tz}\int_y^\infty h\, z\,(y - y_0)\, dy \qquad 4\text{ a)}$$

Wäre h als Function von $n = n_2 - \eta f$ bekannt, so müssten also die Ordinaten der Diffusionscurve eine Correction erfahren und es müsste erst von dieser corrigirten Curve der Schwerpunkt gesucht werden.

Man könnte auch bloss voraussetzen, dass n die Gleichung 1 a) erfüllt und ohne Rücksicht auf ihre Bedeutung h und k als 2 unbekannte Functionen von n betrachten.

Dann müsste man so verfahren. Für eine bestimmte Diffusionscurve ist t constant. Daher folgt aus Gleichung 3a)

$$\frac{h\,x}{2\,t}\frac{d\,n}{d\,x}+k\frac{d^2\,n}{d\,x^2}+\frac{d\,k}{d\,n}\left(\frac{d\,n}{d\,x}\right)^2=0 \qquad 7)$$

also

$$\frac{z^2}{a\,\delta}\cdot\frac{1}{h}\frac{d\,k}{d\,n}+\frac{1}{\eta}\frac{d\,z}{d\,y}\frac{k}{h}+\frac{\eta}{2\,t}(y-y_0)\,z=0 \qquad 8)$$

In dieser Gleichung sind die beiden Grössen $\frac{1}{h}\frac{d\,k}{\partial\,n}$ und $\frac{k}{h}$ also die beiden Coefficienten der Gleichung 1b) als die beiden Unbekannten (unbekannte Functionen von n) zu betrachten. Die übrigen Grössen können wie Hr. Wiener zeigt, leicht für jede Diffusionscurve berechnet werden. Man muss also in 2 zu verschiedenen Werthen von t gehörigen Diffusionscurven solche Ordinaten (y) suchen, für welche n (also die Flächen f bis zu diesen Ordinaten) gleiche Werthe haben. Diese beiden Stellen der beiden Diffusionscurven liefern 2 Gleichungen für die zu jenem n gehörigen Werthe von $\frac{1}{h}\frac{d\,k}{d\,n}$ und $\frac{k}{h}$. Wäre auch der Zeitanfang unbekannt, so müsste noch eine 3. Gleichung aus einer 3. Diffusionscurve beigezogen werden. Man kann also so für beliebig viele n die Werthe der beiden Coefficienten der Gleichung 1b) bestimmen. Natürlich ist dieses Verfahren auch auf den eingangs betrachteten Fall, dass die Gleichung 1) gilt, anwendbar und dürfte auch da dem früher beschriebenen vorzuziehen sein.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse natürlich wieder für den Punkt, wo z sein Maximum hat, also $d\,z/d\,y=0$ ist. Für diesen Punkt ist

$$\frac{1}{h}\frac{d\,k}{d\,n}=\frac{\eta\,(y_0-y)\,a\,\delta}{2\,z\,t} \qquad 9)$$

Bezeichnen wir den Maximalwerth des z zu 2 verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 mit z_1 und z_2 die dazu gehörigen y mit y_1 und y_2, so ist also, wenn man annimmt, dass sich $\frac{1}{h}\frac{dk}{dn}$ in der Zeit $t_2 - t_1$ nicht erheblich verändert hat

$$\frac{1}{h}\frac{dk}{dn} = \frac{\eta a \delta}{2(t_2 - t_1)}\left[\frac{y_0 - y_2}{z_2} - \frac{y_0 - y_1}{z_1}\right] \qquad 10)$$

Man könnte nun aus Versuchen mit geringer Concentrationsdifferenz k als Function von n und daraus $dk:dn$ berechnen. Würden diese Werthe mit den für grosse Concentrationsunterschiede nach der letzten Formel (darin $h = 1$ gesetzt) berechneten stimmen, so wäre dies ein Beweis der Gültigkeit der Gleichung 1).

Obwohl die vorliegenden Versuche Hrn. Wieners zu einer ausführlichen theoretischen Discussion, wie er selbst bemerkt, noch zu ungenau sind, so will ich doch die Formel 9) auf das Diagramm Wieners Fig. 15 p. 135 anwenden, um überhaupt zu zeigen, wie die numerische Berechnung geschehen kann. Daselbst ist

$$\eta = \frac{e_1 - a}{e_1} = \frac{575 \cdot 9}{676 \cdot 5} = 0 \cdot 851, \quad a = 100 \cdot 6 \text{ cm}, \quad \delta = 1 \cdot 027 \text{ cm}$$

$$t = \frac{4 \cdot 18}{24} \text{ Tage}, \quad y_0 - y = \text{etwa } 4 \text{ mm}, \quad z = 20 \text{ mm}. \text{ daher}$$

$$\frac{1}{h}\frac{dk}{dn} = \frac{53 \text{ cm}^2}{\text{Tag}}$$

Würde die Gleichung 1) gelten, so wäre $h = 1$; obiger Ausdruck wäre also gleich dk/dn. Anderseits findet Herr Wiener für k zwischen Wasser und 3%iger Salzsäure den Werth $k_1 = 2 \cdot 8$, zwischen Wasser und 26%iger Salzsäure aber $k_2 = 4 \cdot 2$, daher $k_2 - k_1 = 1 \cdot 4$ cm²:Tag. Der Unterschied der Brechungsindices zwischen Wasser und der

letzten Salzsäure ist $\eta f : a \delta$, wobei f die Fläche zwischen der schiefen Geraden und einer der Curven der Fig. 15 ist. Schätzt man f zu 6 cm² (die Figur ist ½ linear verkleinert), so wird $\eta f : a \delta = 0 \cdot 05$. k_1 und k_2 sind die Diffusionscoefficienten beim mittlern Salzsäuregehalt. Es entspricht also k_1 fast reinem Wasser, k_2 aber 13% Salzsäure. Daher entspricht der Aenderung $k_2 - k_1$ des Diffusionscoefficienten etwa die Aenderung $\Delta n = 0 \cdot 025$ des Brechungsindex; es ist also

$$\frac{k_2 - k_1}{\Delta n} = 56$$

Dies stimmt gut mit dem oben für $d k : d n$ gefundenen Werth überein, was aber auch ein Zufall sein kann. Die Ableitung weiterer für die Berechnung nützlicher Formeln wird besser geschehen, wenn neue Beobachtungen vorliegen.

Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik.

Von A. Wassmuth in Graz.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Ein Punkt m eines Systems von Partikeln möge sich in der Zeit τ, wenn er frei wäre, von a nach b bewegen, während seine wirkliche Bewegung durch die Strecke $a\,c$ dargestellt sei; dann sagt bekanntlich das von Gauss aufgestellte Princip des kleinsten Zwanges aus, dass $\Sigma m \cdot b\,c^2$ ein Minimum ist oder dass, wenn $a\,d$ irgend eine virtuelle d. h. mit den Bedingungen des Systems verträgliche Bewegung vorstellt, stets: $\Sigma m \cdot b\,c^2 < \Sigma m \cdot b\,d^2$ sein muss. Sind $x\,y\,z$ die Coordinaten des Punktes m, auf den die Kräfte $m\,X$, $m\,Y$, $m\,Z$ wirken sollen, so geht irgend eine Coordinate x in der sehr kleinen Zeit τ für die wirkliche Bewegung über in:

$$x + \frac{d\,x}{d\,t}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\tau^2$$

und für die freie Bewegung über in:

$$x + \frac{d\,x}{d\,t}\tau + \frac{1}{2}X\tau^2$$

so dass das Quadrat der Ablenkung $b\,c^2$ oder das Quadrat der Coordinatendifferenzen gleich $\frac{\tau^4}{4}\left[\left(\frac{d^2\,x}{d\,t^2} - X\right)^2 + \ldots\right]$ wird.

Man hat daher einen Ausdruck Z — er soll der Zwang des Systems heissen — von der Form

$$Z = \Sigma m \left[\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z \right)^2 \right]$$

wobei sich die Summe auf alle Partikeln erstreckt, zu einem Minimum in Bezug auf die diversen Beschleunigungen: $\frac{d^2 x}{d t^2}, \frac{d^2 y}{d t^2}, \ldots$ die kurz $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} \ldots$ geschrieben werden sollen, zu machen. Differenzirt man dabei die Bedingungsgleichungen des Systems: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \ldots$ zweimal nach der Zeit, so muss man sich, wie aus der obigen Ableitung hervorgeht[1]), gegenwärtig halten, dass die Coordinaten x und ihre ersten Differentialquotienten als „gegeben" anzusehen sind; die Gleichung: $\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = 0$ drückt nur aus, dass die $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ddot{x} + \ldots$ unveränderlichen Werthen gleich sein müssen. Für gegebene Werthe der x und $\frac{d x}{d t}$ sollen also die $\ddot{x}$ so bestimmt werden, dass Z zu einem Minimum werde. Man erhält so die bekannten Gleichungen:

$$m(\ddot{x} - X) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \ldots = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Statt der Coordinaten $x\, y\, z \ldots$ sollen nun n von einander unabhängige Variabeln $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$ eingeführt werden, so dass die virtuelle Arbeit $= P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \ldots + P_n \delta p_n$ und die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda} \dot{p}_\varkappa \dot{p}_\lambda$ wird, wobei die P_μ und $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$ nur von den Coordinaten abhängen und die griechischen Buchstaben, wie im folgenden immer, von 1 bis n gehen.

1) Lipschitz, Borch. Jour. 82. Band 316 (Rausenberger Mechanik I 166); Gibbs, Beiblätter IV 319.

Dann wird der Zwang Z, wie Lipschitz (a. a. O. p. 330) zeigte, ausgedrückt durch:

$$Z=\sum_{\mu\nu}\frac{A_{\mu\nu}}{\Delta}\left[a_{1\mu}\ddot{p}_1+a_{2\mu}\ddot{p}_2+\ldots+\begin{bmatrix}1\,1\\ \mu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_1+\begin{bmatrix}1\,2\\ \mu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_2+\ldots-P_\mu\right]$$

$$\left[a_{1\nu}\ddot{p}_1+a_{2\nu}\ddot{p}_2+\ldots+\begin{bmatrix}1\,1\\ \nu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_1+\begin{bmatrix}1\,2\\ \nu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_2+\ldots-P_\nu\right]$$

wobei Δ die Determinante aus den $a_{\varkappa\lambda}$ und $A_{\mu\nu}$ die adjungirte

$$\left(A_{\mu\nu}=\frac{\partial\Delta}{\partial a_{\mu\nu}}\right)$$

vorstellt und

$$\begin{bmatrix}\varkappa\,\lambda\\ \mu\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial p_\lambda}+\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa}-\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu}\right]$$

gesetzt ist.

Der Ausdruck für Z wird übersichtlicher und für (gewisse) physikalische Probleme geeigneter, wenn die lebendige Kraft T eingeführt wird. Setzt man nämlich:

$$T_\mu=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{p}_\mu}-\frac{\partial T}{\partial p_\mu}$$

so ist[1]) auch

$$T_\mu=a_{1\mu}\ddot{p}_1+a_{2\mu}\ddot{p}_2+\ldots+\begin{bmatrix}1\,1\\ \mu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_1+\begin{bmatrix}1\,2\\ \mu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_2+\ldots$$

und es wird:

$$Z=\sum_{\mu\nu}\frac{A_{\mu\nu}}{\Delta}\left[T_\mu-P_\mu\right]\left[T_\nu-P_\nu\right]\quad\text{d. i.}\qquad\text{(I)}$$

$$Z=\frac{1}{\Delta}\left\{\begin{array}{l}A_{11}(T_1-P_1)^2+A_{22}(T_2-P_2)^2+\ldots\\ \quad+2A_{12}(T_1-P_1)(T_2-P_2)+\ldots\\ \qquad+2A_{23}(T_2-P_2)(T_3-P_3)+\ldots\end{array}\right\}$$

1) C. f. e. g. Rayleigh, der Schall, p. 111; Stäckel, Borch. Jour. 107, p. 322.

Da dieser Ausdruck für den Zwang Z, wie es scheint, neu ist, so ist es nicht überflüssig, nachzuweisen, dass man in Ausführung der Minimumsbedingung für Z zu den Lagrange-schen Gleichungen kommt. Dabei hat man zu Folge der obigen Bemerkung bei der Differentiation des Z nach $\ddot{p}_1$ die Grössen p_1 und $\dot{p}_1$ als gegeben oder fix anzusehen und von der Beziehung:

$$\frac{\partial T_\mu}{\partial \ddot{p}_\varkappa} = a_{\mu\varkappa} = a_{\varkappa\mu}$$

Gebrauch zu machen. Man erhält so:

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\mu} A_{\mu\nu}}{\Delta} (T_\nu - P_\nu) + \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\nu} A_{\mu\nu}}{\Delta} (T_\mu - P_\mu)$$

oder, da diese Summen einander gleich sind,

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = \frac{2}{\Delta} \sum_{\mu\nu} a_{1\mu} A_{\mu\nu} (T_\nu - P_\nu)$$

oder:

$$\frac{1}{\Delta} \sum_\nu (T_\nu - P_\nu) \sum_\mu a_{1\mu} A_{\mu\nu} = \frac{1}{\Delta} \sum_\nu (T_\nu - P_\nu) [a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} \ldots]$$

Da nun nach einer Eigenschaft der Determinanten: $a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} + \ldots = \Delta$ oder Null wird, je nachdem $\nu = 1$ oder $\nu > 1$ ist, so folgt also aus: $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = 0$ auch $T_1 - P_1 = 0$ d. i. die Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial T}{\partial p_1} = P_1$$

Für den Zwang Z lassen sich ganz ähnlich, wie man für die Lagrange'sche Grundgleichung Nebenformen[1]) aufstellte, noch andere Ausdrücke finden.

Wichtig für die Anwendung ist die Bemerkung, dass sich der Zwang Z so darstellen lässt, dass darin eine Be-

1) Weinstein, Wied. Ann. 15. Budde, Mechanik I 397.

schleunigung z. B. $\ddot{p}_1$ von den übrigen losgelöst erscheint; es ist: $Z \cdot \Delta = \frac{1}{2}(L_1 \ddot{p}_1^2 + 2 M_1 \ddot{p}_1 + N_1)$ wo die $L_1 M_1 N_1$ die $\ddot{p}_1$ nicht enthalten und L_1 und M_1 aus $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = 0$ leicht gefunden werden können.

„Sind bei einem physikalischen Probleme die virtuelle Arbeit $\sum_\mu P_\mu \delta p_\mu$ und die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda} \dot{p}_\varkappa \dot{p}_\lambda$ gegeben, so lässt sich mittelst der Gleichung I der Zwang des Systems bestimmen; die Minimumseigenschaft von Z drückt ein — in vielen Fällen sicher neues — Gesetz für das System aus, ganz abgesehen davon, dass andere, vielleicht schon bekannte Gesetze durch wirkliches Differenziren des Z daraus folgen."

So hat z. B. Herr Boltzmann in wundervoll einfacher Weise an der Hand der Lagrange'schen Gleichungen, somit sich stützend auf mechanische Vorgänge, in seinen Vorlesungen I die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrizität abgeleitet. Es erhellt, dass man auch vom Principe des kleinsten Zwanges in der Form der obigen Gleichung I als Obersatz ausgehen kann und, da die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft angegeben werden, durch Aufsuchen der Minimumsbedingung zu den Lagrange'schen Gleichungen und — nun ganz an der Hand Boltzmann's fortschreitend — zu den Maxwell'schen Gleichungen kommen muss. Wenn es auch auf diese Art schwer möglich sein wird, die klassischen Methoden Boltzmann's, besonders die im 2. Theile seiner Vorlesungen, noch mehr zu vereinfachen, so drückt die Bedingung: $Z =$ Minimum immerhin eine neuerkannte Wahrheit aus.

Als ein Beispiel möge der Fall von 2 cyklischen Coordinaten $\dot{p}_1 = l_1'$ und $\dot{p}_2 = l_2'$ — von den langsam veränderlichen Parametern k werde einstweilen abgesehen — be-

trachtet werden. Hier ist: $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2$
$= \frac{A}{2} \dot{l}_1^2 + \frac{B}{2} \dot{l}_2^2 + C \dot{l}_1 \dot{l}_2$, wenn Boltzmann's Bezeichnung eingeführt wird. Es folgt: $a_{11} = A$, $a_{22} = B$, $a_{12} = C$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = A B - C^2$, $A_{11} = B$, $A_{12} = -C$, $A_{22} = A$, $T_1 = \frac{d}{dt}(A \dot{l}_1 + C \dot{l}_2)$, $T_2 = \frac{d}{dt}(B \dot{l}_2 + C \dot{l}_1)$. Ausserdem möge wegen der Reibung oder Zähigkeit die von Rayleigh aufgestellte Zerstreuungsfunktion (a. a. O. 108 und 109 pg.) durch $F = \frac{1}{2} \sum (\varkappa_1 \dot{x}_1^2 + \ldots) = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2$ bezeichnet werden; dann tritt bekanntlich zu den Kräften $P_\mu = L_\mu$ noch hinzu: $-\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu}$. Auch erhellt aus inneren Gründen, dass $b_{12} = 0$ ist.

Hiemit wird denn schliesslich der Zwang Z ausgedrückt durch:

$$Z \times (A B - C^2) = B \left[\frac{d}{dt}(A \dot{l}_1 + C \dot{l}_2) - L_1 - b_{11} \dot{l}_1\right]^2$$
$$- 2 C \left[\frac{d}{dt}(A \dot{l}_1 + C \dot{l}_2) - L_1 - b_{11} \dot{l}_1\right]\left[\frac{d}{dt}(B \dot{l}_2 + C \dot{l}_1) - L_2 - b_{22} \dot{l}_2\right]$$
$$+ A \left[\frac{d}{dt}(B \dot{l}_2 + C \dot{l}_1) - L_2 - b_{22} \dot{l}_2\right]$$

und es soll Z ein Minimum sein, derart, dass $\frac{\partial Z}{\partial \dot{l}_1} = 0$ und $\frac{\partial Z}{\partial \dot{l}_2} = 0$ ist. Hierin stellen (Boltzmann I pg. 34 und 35) $\dot{l}_1$ und $\dot{l}_2$ die Stromstärken in 2 Leitern, b_{11} und b_{22} deren Widerstände, L_1 und L_2 die elektromotorischen Kräfte in ihnen, A und B die Coefficienten der Selbstinduction und C den der gegenseitigen Induction vor. Sind noch Conden-

satoren (l. c. I 35) eingeschaltet, so treten noch Glieder von der Form: $d_1 l_1$ und $d_2 l_2$ in die Klammern.

Die Bedingung: $Z =$ Minimum spricht also ein elektrodynamisches Grundgesetz aus und liefert die Theorie der Selbstinduction und wechselseitigen Induction für nicht zu schnelle Stromschwankungen. Will man auch die ponderomotorischen Kräfte erhalten, so muss ein langsam veränderlicher Parameter k neben l_1 und l_2 als 3. Variabele eingeführt, der allgemeine Ausdruck für Z aufgestellt und die Gleichung $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{k}} = 0$, wobei k und $\dot{k}$ als constant anzusehen sind, gebildet werden; erst nachher hat man $\dot{k} = 0$ und $\ddot{k} = 0$ zu nehmen und erhält, wie Boltzmann, die Beziehung;

$$K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l_2'^2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial k}$$

Auch die Akustik bietet ein weites Feld zur Anwendung des obigen Principes. Es treten da häufig in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft nur rein quadratische Glieder mit gleichen Coefficienten auf, wesshalb sich dann die Gleichung für den Zwang einfacher gestaltet.

Führt man die Abkürzung: $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ ein, so ist der Zwang Z gegeben durch:

$$\begin{aligned} Z \cdot D = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} (T_\mu - P_\mu)(T_\nu - P_\nu) &= \sum_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = \\ = A_{11} Q_1^2 + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \ldots\ldots &\quad + 2 A_{1n} Q_1 Q_n \\ + A_{22} Q_2^2 + &\quad + 2 A_{2n} Q_2 Q_n \\ &\quad + A_{nn} Q_n^2 \end{aligned}$$

Die Bedingung: $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_\varrho} = 0$ lässt sich durch: $\frac{\partial Z}{\partial Q_\varrho} = 0$ ersetzen. Man hat nämlich:

$$\frac{d Z}{d \ddot{p}_\varrho} = \frac{\partial Z}{\partial Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial \ddot{p}_\varrho} + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial Q_n}\frac{\partial Q_n}{\partial \ddot{p}_\varrho}$$

$$\text{oder wegen } \frac{\partial Q_\nu}{\partial \ddot{p}_\varrho} = \frac{\partial T_\nu}{\partial \ddot{p}_\varrho} = a_{\nu\varrho}$$

$$\frac{d Z}{d \ddot{p}_\varrho} = a_{1\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_1} + a_{2\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_2} + \ldots + a_{n\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_n} = 0; \ (\varrho = 1 \ldots n);$$

aus diesen n-Gleichungen folgt, da die Determinante: $D = |a_{\mu\nu}|$ nicht verschwindet, allgemein:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q_\nu} = 0.$$

Differencirt man demnach den obigen Ausdruck wirklich, so ergeben sich die n-Gleichungen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial Q_\nu} = A_{1\nu} Q_1 + A_{2\nu} Q_2 + \ldots + A_{\nu n} Q_n = 0; \ (\nu = 1 \ldots n)$$

die, da die Determinante $|A_{\mu\nu}| = D^{n-1}$ nie Null werden kann, wiederum die Lagrange'schen Gleichungen: $Q_1 = 0 \ldots Q_n = 0$ nach sich ziehen.

Haben die Kräfte P ein Potential U, so dass $P_\mu = -\frac{\partial U}{\partial p_\mu}$ wird, und enthalten die Bedingungen die Zeit t explicit nicht, so hat man für die lebendige Kraft T einerseits:

$$2\,T = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2} \dot{p}_2 + \ldots$$

oder

$$2 \frac{d T}{d t} = \dot{p}_1 \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} \right) + \ddot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \ldots$$

während andererseits, da T auch Funktion von $p_1\ \dot{p}_1 \ldots$ ist,

$$\frac{d T}{d t} = \dot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} + \ddot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \ldots \quad \text{wird;}$$

hieraus folgt durch Subtraction wegen:

$$\frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_\mu} = T_\mu$$

$$\frac{dT}{dt} = \dot{p}_1 T_1 + \dot{p}_2 T_2 + \ldots$$

wozu man

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \ldots \quad = -\dot{p}_1 P_1 - \dot{p}_2 P_2 \ldots$$

addirt und so schliesslich wegen $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ zur Gleichung:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \dot{p}_1 Q_1 + \dot{p}_2 Q_2 + \ldots + \dot{p}_n Q_n = R$$

gelangt. Man sieht sofort, dass für $Q_1 = 0 \ldots Q_n = 0$ auch $R = 0$ d. i. $T + U =$ Constante sein muss oder dass sich aus den oben gefundenen Lagrange'schen Gleichungen auch das Princip der Erhaltung der Energie ergiebt. Beides lässt sich gleichzeitig gewinnen, wenn man in dem Ausdrucke für Z mit Hilfe der Beziehung: $R = \dot{p}_1 Q_1 + \ldots$ eine der Grössen Q z. B. Q_1 eliminirt und die Minimumsbedingungen: $\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = 0 \ldots \frac{\partial Z}{\partial Q_n} = 0$ nachher aufstellt. Zweckmässig ist es dabei, für den Zwang Z die Determinantenform anzuwenden; es ist z. B für $n = 3$:

$$-Z \cdot D = \begin{vmatrix} 0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ Q_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Q_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\dot{p}_1^2} \begin{vmatrix} 0 & R & Q_2 & Q_3 \\ R & b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ Q_2 & b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Q_3 & b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wobei

$$b_{11} = (a_{11} \dot{p}_1 + a_{21} \dot{p}_2 + a_{31} \dot{p}_3) \dot{p}_1 + \ldots$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + \ldots = 2T$$

$$b_{21} = b_{12} = a_{21} \dot{p}_1 + a_{22} \dot{p}_2 + a_{23} \dot{p}_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2}$$

$$b_{31} = b_{13} = a_{31} \dot{p}_1 + a_{32} \dot{p}_2 + a_{33} \dot{p}_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_3} \quad \text{ist.}$$

Die Ausführung der Minimumsbedingungen ergiebt:

$$A_{11} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{12} - \dot{p}_2 A_{11}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{13} - \dot{p}_3 A_{11}] = 0$$
$$A_{12} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{22} - \dot{p}_2 A_{12}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_3 A_{12}] = 0$$
$$A_{13} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_2 A_{13}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{33} - \dot{p}_3 A_{13}] = 0$$

oder, da die Determinante dieses Systems $\dot{p}_1^2 \,|A_{\mu\nu}| = \dot{p}_1^2 \cdot D^2$ nie verschwindet, $R = 0$ und $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ d. i. das Princip von der Energie und die Lagrange'schen Gleichungen.

Eliminirt man in der allgemeinen Gleichung $A_{1\nu} Q_1 + A_{2\nu} Q_2 + \ldots + A_{\nu n} Q_n = 0$, $\nu = 1 \ldots n$ etwa Q_1, mit der Relation: $R = \dot{p}_1 Q_1 + \ldots$ so folgt natürlich ebenso: $R = 0$, $Q_2 = 0 \ldots Q_n = 0$.

Nachtrag,

betreffend lineare Stromverzweigungen.

Sind $p_1 \ldots p_n$ wiederum cyklische Coordinaten, $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$ die lebendige Kraft und ist $F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$ die von Lord Rayleigh eingeführte Zerstreuungsfunktion, so kommt zu jeder Kraft P_μ noch die Kraft: $-\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu} = -(b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots)$ dazu und es ergiebt das Princip des kleinsten Zwanges, dass

$$Z \cdot D = \Sigma A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = A_{11} Q_1^2 + A_{22} Q_2^2 + \ldots + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \ldots \quad (1)$$

ein Minimum für jedes Q sein müsse; dabei ist also:

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\left[a_{1\mu} \dot{p}_1 + a_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots\right] - P_\mu + \left[b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots\right] \quad (2)$$

$$D = |a_{\varkappa\lambda}| \qquad A_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial D}{\partial a_{\varkappa\lambda}}$$

Geht man zur Elektrodynamik über und setzt: $\dot{p}_1 = J_1$, $\dot{p}_2 = J_2 \ldots$ sowie

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\left[a_{1\mu} J_1 + a_{2\mu} J_2 + ..\right] - P_\mu + \left[b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + ..\right] \quad (3)$$

so giebt die Minimumsbedingung (1) eine Eigenschaft einer linearen Stromverzweigung an. Dabei sind a_{11}, a_{22}, $a_{33} \ldots$ die Coefficienten der Selbstinduction des ersten, zweiten Umlaufes, a_{12}, a_{13}, $a_{23} \ldots$ die Coefficienten der gegenseitigen Induction, P_μ die constante elektromotorische Kraft; ferner ist b_{11} der Widerstand des ganzen ersten Umlaufes, b_{22} der des ganzen zweiten Umlaufes u. s. w. und b_{12} der Widerstand jenes Stückes der Leitung, das dem 1. und 2. Umlaufe gemeinsam ist; b_{12} ist positiv, wenn J_1 und J_2 dieselbe, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben. Die Ausführung der Minimumsbedingung $\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = 0$ liefert: $Q_1 = 0$

$$\text{d. i. } P_1 = b_{11} J_1 + b_{12} J_2 + \ldots + b_{1n} J_n + \frac{d}{dt}\left[a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + \ldots\right] \quad (4) \quad \text{u. s. w.}$$

Das sind — etwas verallgemeinert — jene Gleichungen, die Herr H. von Helmholtz 1851 (Abhandl. I 435) für die Induction in linearen Stromverzweigungen, die man sich in die möglichst geringe Zahl einfacher Umgänge zerlegt denken muss, aufgestellt hat.

Für die Arbeit der verzögernden Kräfte erhält man vom Zeichen abgesehen: $\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} d p_1 + .. = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + ..\right] dt = 2 F dt$ $= [b_{11} J_1^2 + b_{22} J_2^2 + .. + 2 b_{12} J_1 J_2 + ..]\, dt$ d. i. die Joulesche Wärme und sind alle Summanden in der Klammer positiv.

Nun werde angenommen, dass $a_{12} = a_{13} = a_{23} = .. = 0$; $a_{11} = a_{22} = a_{33} = .. = a$ sei, welcher Fall experimentell unschwer zu verwirklichen wäre. Dann wird:

$Q_\mu = a \frac{d}{dt}[J_1 + J_2 + ..] - P_\mu + b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + ..$ und es muss: $Z \cdot a = Q_1^2 + Q_2^2 + ..$ ein Minimum sein, wie klein auch a genommen wird. Für $\lim a = 0$ werden die Stromstärken unabhängig von der Zeit, also constant und es folgt aus der Bedingung: $Z^1 = Q_1^2 + Q_2^2 + .. =$ Minimum; $Q_\mu = b_{1\mu} J_1 + .. - P_\mu = 0$.

Die Gleichung: $\frac{\partial Z^1}{\partial Q_\mu} = 0$ kann, weil die Determinante aus den b nicht verschwindet, durch: $\frac{\partial Z^1}{\partial J_\mu} = 0$ ersetzt werden. Es ist demnach für constante Ströme: $Z^1 = \sum_\mu [(b_{1\mu} J_1 + ..) - P_\mu]^2$ für jedes J zu einem Minimum zu machen.

Anmerkung. Eine oft genannte Minimumseigenschaft für constante Ströme ergiebt sich aus der wohlbekannten Gleichung:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = -2F \text{ oder: } -\left[\frac{dU}{dt} + F + \frac{dT}{dt}\right] = F \quad \text{(I)}$$

worin: $U = P_1 p_1 + ..$ das Potential der constanten Kräfte vorstellt und wie oben: $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + .. = \frac{1}{2} a_{11} J_1^2 + ..$ $F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + .. = \frac{1}{2} b_{11} J_1^2 ..$ ist.

Erlangen die Stromstärken: $J_1, J_2 ..$ die anfangs Null waren, für $t = \infty$ ihre vollen Stärken $J_1', J_2' ..$ so ist (wegen $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial J_1} \frac{dJ_1}{dt} + ..$) auch $\frac{dT}{dt} = 0$ und das in I rechts stehende F, das aus lauter positiven Gliedern besteht, erlangt seinen grössten Werth. Demnach wird die negative linke Seite in I d. i. $F + \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} b_{11} J_1^2 + .. - (P_1 J_1 + P_2 J_2 + ..)$ ein Minimum für jedes J darstellen.

Ueber die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge.

Von F. v. Sandberger.

(*Eingelaufen 5. Mai.*)

Die seit Jahrhunderten bekannte Lagerstätte ist grösstentheils schon längere Zeit ausser Betrieb und es war mir daher nicht mehr möglich, als ich sie im Jahre 1884 besuchte, mehr als eine Anzahl Erzstufen auf den Halden zu finden, unter welchen derber Antimonglanz und Bruchstücke des völlig mit Kiesen imprägnirten Nebengesteins vorherrschten. Gegenwärtig wird nur die Grube Schickung Gottes wieder betrieben, auf wie lange, ist nicht vorauszusehen. Seitdem hat C. W. v. Gümbel Goldkronach in der Geognostischen Beschreibung des Fichtelgebirges S. 385 ff. eine gründliche von einer Gangkarte begleitete Darstellung gewidmet, die auf den Gängen auftretenden Mineralien aber nicht specieller geschildert. Da diese indessen in vieler Beziehung bemerkenswerth und in Folge früherer Einsendungen des K. Bergamts Bayreuth in der unter meiner Leitung stehenden Sammlung der Universität Würzburg fast vollständig vertreten sind, war ich in der Lage, sie genauer untersuchen zu können. In der Sammlung des Herrn Apotheker Dr. Schmidt zu Wunsiedel befinden sich auch Mineralien von Goldkronach, namentlich schöne Krystalle von Antimonglanz und ein Stück mit

dem sehr seltenen Kupferkies. Ich statte Herrn Dr. Schmidt für die Mittheilung seiner Suite den besten Dank ab.

Das Grubenfeld[1]) umfasst eine bedeutende Fläche vom Weissmain-Thale längs dem Thale des Zoppatenbaches über das Dorf Brandholz hinaus, an welchem die bedeutendste Grube, die Fürstenzeche, gelegen ist, während andere auf beiden Seiten des Baches in der Nähe der Dörfer Zoppaten und Escherlich liegen. Dasselbe ist mit zahlreichen, z. Th. noch in diesem Jahrhundert von dem preussischen und später bayerischen Staate, dann von Gewerken betriebenen Bauten bedeckt. Es hätte keinen Zweck, die Entwickelung und den Untergang dieser Gruben im Einzelnen zu verfolgen, nur soviel muss hervorgehoben werden, dass die Gänge am Ausgehenden am reichsten an Gold und Silber gewesen sein müssen. Diese Thatsache erklärt sich hier, wie überall, durch lange fortgesetzte Verwitterung, welche die edlen Metalle als solche abschied, während die übrigen gelöst und weggeführt wurden, wie auch v. Gümbel[2]) mit Recht annimmt. Um auf sicherem Boden zu bleiben, beschränke ich mich auf die von ihm hauptsächlich nach Hahn's Berichten gegebene Darstellung der Hauptgänge, muss aber zunächst Bemerkungen über die Gesteine vorausschicken, in welchen dieselben aufsetzen.

Das herrschende Nebengestein ist ein Sericitschiefer von cambrischem Alter, welcher manchen des Taunus sehr ähnlich sieht, so dass man wohl Handstücke verwechseln könnte, auch einige sächsische und böhmische Phyllite sind nahe verwandt.

Die grünlichen Schiefer enthalten neben vorwiegendem Sericit auch noch Quarzkörner und Chloritschüppchen; im Schlämmrückstande befindet sich mikroskopisches Magneteisen

1) Siehe das Kärtchen bei v. Gümbel a. a. O. S. 386a.
2) a. a. O. S. 301.

und Eisenkies. Die blassgelb gefärbten Schiefer enthalten weder Chlorit noch Magneteisen und nur sehr wenig mikroskopischen Eisenkies, aber stets Quarzkörnchen, sie sind fast als reiner Sericit anzusehen. Dem entspricht auch das Resultat der Analysen von Ad. Schwager.[1]) Es enthielten nämlich

	1. Ausgesuchter Sericit von Goldkronach nach Schwager	2. Reiner Sericit von Naurod nach List	3. Nicht ganz reiner Sericit von Naurod nach Schwager
Kieselsäure	45,88	49,00	49,53
Titansäure	—	1,59	—
Thonerde	33,96	23,65	28,97
Eisenoxyd	4,57	8,07	7,26
Kalk	0,22	0,63	0,14
Bittererde	0,83	0,93	2,46
Kali	9,32	9,11	7,43
Natron	0,52	1,75	0,12
Wasser und Glühverlust	4,89	3,44	4,97
	100,26	98,17[2])	100,88[3])

Um etwa in geringer Menge vorhandene Metalle im Goldkronacher Gestein zu entdecken, wurden wiederholt 10—12 g des Gesteinspulvers mit kohlensaurem Natronkali aufgeschlossen. Nach Abscheidung der Kieselsäure ergab Schwefelwasserstoffgas in der salzsauren Lösung einen Niederschlag, welcher vorwiegend Antimon, weniger Arsen und recht wenig Blei und Kupfer enthielt; Kobalt wurde nach Abscheidung des Eisens ebenfalls in sehr geringer Menge

1) v. Gümbel, Sitzungsber. d. k. b. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Cl. 1880, S. 228 ff.

2) Ausserdem Fluorsilicium 1,69, Phosphorsäure 0,31.

3) In 12 g desselben ausserdem Arsen, sehr wenig Blei und Zink. (Sandberger.)

nachgewiesen. Diese Elemente habe ich meistens schon 1882 als in dem Gestein von Goldkronach enthalten angeführt.[1]) Um sich zu überzeugen, ob nicht eins oder das andere derselben aus dem in minimaler Menge eingesprengten Eisenkiese herrühre, wurde dieser für sich untersucht und frei davon gefunden. Antimon u. s. w. gehören also der Sericitsubstanz an, wie an so vielen anderen Orten den Glimmern, z. B. jenen der Gneisse des Spessarts, dem des Granits von Magurka in Ungarn u. s. w. Dass Antimon (und Arsen) in den Silicaten als antimonige (bezw. arsenige) Säure als Vertreter von Thonerde auftreten, ist unzweifelhaft, der Spinell von Tiriolo in Calabrien hat ja längst den Beweis geliefert.

Organische Substanz ist beim Glühen deutlich wahrnehmbar und findet sich in Spuren auch noch in stark zersetzten Schiefern. Wo sie in grösserer Menge und schwarz färbend auftritt, sind die Schiefer der Erzführung ungünstig gewesen.[2])

Schliesslich wurden auch die in Wasser löslichen Bestandtheile untersucht. Zieht man den Goldkronacher Schiefer 2 Tage mit destillirtem Wasser in der Wärme aus, so giebt die Lösung sehr deutliche Reactionen auf Schwefelsäure und schwächere auf Chlor, welche an Kali gebunden sind; Natron tritt nur in geringster Menge daneben auf.

Die in der Nähe der Gänge vorkommenden stark gebleichten Schiefer sind wie so viele andere ausgelaugte Sericitgesteine ganz zu Schüppchen aufgelöst. Ebenso verhalten sich die zahlreichen Bruchstücke derselben, welche in der Gangmasse eingeschlossen sind.

Ein zweites Nebengestein kommt nur an dem Gange der Grube Silberne Rose bei Zoppaten vor und soll dessen

1) Untersuchungen über Erzgänge I S. 31, II S. 236.

2) v. Gümbel, Geogn. Beschreib. d. Fichtelgebirgs S. 385.

Hangendes bilden, während als Liegendes Sericitschiefer angegeben wird. Es ist ein feinkörniger Diabasmandelstein (Blatterstein) von graugrüner Farbe, welche in der Nähe des Ganges lichter wird, und führt ausser zahlreichen von Chlorit umschlossenen Kalkspathmandeln auch Gruppen von Eisenkieskrystallen. Weisser Kalkspath bedeckt in dünnen Ueberzügen auch seine zahlreichen Klüftchen. Ein grösseres verhältnissmässig frisches Stück dieses bereits v. Gümbel[1]) angeführten Gesteins lässt in der matten Grundmasse stellenweise noch Plagioklaskrystalle erkennen, der Augit scheint aber schon ganz in Chloritsubstanz umgewandelt zu sein. Magnetkies und Magneteisen sind in mikroskopischen Körnchen in dem Schlämmreste deutlich nachweisbar, auch Apatit fehlt nicht.

Kalte Salzsäure löst Kalkspath und Magnetkies auf, erhitzte zersetzt auch den Chlorit und die meist schon stark angegriffenen Reste des Feldspaths.

Die Lagerung des Gesteins ist nicht genau bekannt, doch darf mit grosser Wahrscheinlichkeit angenommen werden, dass dasselbe einen kleinen Stock oder Gang in dem Sericitgesteine bildet.

Die bei Zoppaten anstehenden schwarzen silurischen Gesteine mit Graptolithen treten, soviel bekannt, zwar sehr nahe an den Gang heran, kommen aber mit ihm nicht in unmittelbare Berührung.

Wie v. Gümbel folge auch ich in Bezug auf die Auffassung der Gänge den Mittheilungen des langjährigen Leiters des Grubenbetriebs, Bergrath Hahn in Bayreuth. Die Lage derselben ist auf dem von ersterem beigegebenen Revierkärtchen gut zu übersehen.

Hahn nimmt bei Brandholz drei Hauptgänge an, nämlich den Kiesgang mit h. 2,4 Streichen und 60° südöstlichem

1) a. a. O. S. 393.

Einfallen, den Spiessglanzgang h. 12,7 streichend und den Quarzgang, welcher zu Anfang der sechziger Jahre aufgeschlossen, aber wegen der Armuth seiner Erze nicht weiter bebaut wurde. Auch die letzteren Gänge fallen südöstlich. Die Gänge der Grube Silberne Rose bei Zoppaten, deren Streichen 4 h 5 mit 50° Fallen zu sein scheint, und Schickung Gottes bei Escherlich, h. 1,8 streichend, sind offenbar selbstständig, obwohl ihre Ausfüllung dieselbe ist, wie jene des Spiessglanzganges. Was die Mächtigkeit betrifft, so wird für den Kiesgang $1^1/_2$ m als Maximum angegeben, für den Spiessglanzgang 1 m, gewöhnlich scheint sie aber geringer zu sein, ich habe an Handstücken meist nur 10 cm beobachten können. Es giebt zwar noch manche Erzgänge, an welchen das sogenannte höfliche d. h. an eingesprengten Erzen reiche Nebengestein[1]) entwickelt ist, aber mit Ausnahme von solchen der Gegend von Freiberg,[2]) Schapbach und Wittichen, sowie mancher Zinnerzgänge habe ich es doch anderswo nicht leicht so schön gesehen. Neben dem Kiesgange und bis zu beträchtlicher Entfernung von ihm führt der stark gebleichte und hier und da von weissen Quarztrümern durchsetzte Schiefer zahllose bis erbsengrosse Eisenkieskrystalle. Die Formen $\frac{\infty O 2}{2}$, $\infty O \infty$. $\frac{\infty O 2}{2}$ und seltener auch $\infty O \infty$. O sind meist sehr hübsch entwickelt. Der Arsenikkies in den Formen ∞P. $^1/_4 \breve{P} \infty$ ist weniger häufig, fehlt aber doch selten ganz. Der durchschnittliche Goldgehalt der Kiese wird nur auf $^1/_4$ bis $^1/_3$ Loth im Centner angegeben und der Betrieb konnte daher nicht lohnend sein.

Die Gangausfüllung, welche sehr gewöhnlich Brocken von zersetztem Nebengestein umschliesst, zeigt nur selten

1) Untersuchungen über Erzgänge I S. 149.

2) Vortrefflich beschrieben aber nicht erklärt von Vogelgesang (Cotta's Gangstudien II S. 80) und Frenzel (Min. Lexikon für Sachsen S. 28).

eine symmetrische Struktur, doch beobachtete ich an Stücken von der Fürstenzeche (Spiessglanzgang) vom hangenden zum liegenden Salband:

1. Weissen Quarz. 2. Eisenreichen Braunspath, meist schon zu ockerigem Eisenoxydhydrat verwittert, mit Nestern von strahligem Antimonglanz. 3. Quarz wie 1. 4. Braunspath wie 2, aber in etwas breiterer Lage. 5. Quarz. Die Salbänder bestehen also nur aus Quarz, der sich an beiden Seiten zuerst abgelagert hat.

Meist ist die Gangmasse sehr einfach zusammengesetzt und herrscht entweder Quarz mit eingesprengten Kiesen oder Antimonglanz in verschiedenen Varietäten vor. Die folgenden Beispiele werden die Paragenesis hinreichend erläutern.

I. Reihenfolge auf dem Spiessglanzgange bei Brandholz.

a) 1. Sericitschiefer mit zahlreich eingewachsenen Eisenkies- und wenigen Arsenikkieskrystallen. 2. Weisser erzleerer Quarz. 3. Antimonglanz auf Klüftchen von 1.

b) 1. Sericitschiefer mit Eisenkieskrystallen. 2. Weisser Quarz. 3. Wasserheller Quarz $\infty R \pm R$ in Drusen. 4. Meneghinit in grösseren Krystallen. 5. Eisenspath in kleinen linsenförmigen Rhomboëdern.

c) 1. Fettquarz von weisser, ins Bläuliche spielender Farbe mit eingewachsenem Eisenkies und Arsenikkies, sowie einem Körnchen von gediegen Gold. 2. Meneghinit in netzförmigen Aggregaten auf Klüften.

d) Weisser derber Quarz mit eingewachsenem Arsenikkies und wenig derbem Kupferkies.

e) 1. Sericitschiefer. 2. Weisser Quarz mit derbem Plagionit. 3. In Drusen krystallisirter Plagionit und weisses Steinmark.

f) 1. Derber Plagionit. 2. Eisenspath in Rhomboëdern. 3. Meneghinit in netzförmigen Aggregaten.

g) 1. Weisser derber Quarz. 2. In Höhlungen Krystalle desselben. 3. Magnetkies 0 P. ∞ P in kleinen Krystallgruppen. 4. Bleihaltiges Federerz, haarförmig.

h) 1. Weisser Quarz mit eingesprengtem Antimonglanz. 2. Eisenspath in linsenförmigen Rhomboëdern. 3. Strahliger Antimonglanz in Krystalle der Form ∞ P. $^1/_3$ P. ∞ $\bar{P}$ 2 auslaufend. 4. Antimonocker auf Klüften.

i) 1. Blass fleischrother Braunspath in grosskörnigen Massen und Rhomboëdern. 2. Strahliger Antimonglanz wie oben.

k) 1. Quarz. 2. Derber Antimonglanz, an der Oberfläche erdig und voll von Höhlungen, z. Th. mit gediegenem Antimon. 3. Antimonglanz in den oben angegebenen Formen krystallisirt. 4. Kalkspath in kleinen verzerrten Krystallen R^3. ∞ R.

l) 1. Weisser Quarz. 2. Strahliger Antimonglanz gemengt mit wenig gelbbrauner Zinkblende.

m) 1. Antimonglanz in der gewöhnlichen Form krystallisirt. 2. Antimonblüthe in Büscheln farbloser Nadeln. (Schmidt'sche Sammlung).

II. Silberne Rose bei Zoppaten.

1. Diabasmandelstein s. oben. 2. Lichter Braunspath, dünne Lage. 3. Grossstrahliger Antimonglanz. Quarz fehlt auffallender Weise hier völlig.

Es wird nun nöthig sein, die einzelnen Mineralien der Gänge etwas genauer zu betrachten.

1. Gediegen Gold habe ich nur einmal eingewachsen in bläulichem Quarze mit Kiesen gesehen, aber es kam ausserdem auch in grösseren Körnern und Blättchen vor und ist in früherer Zeit jedenfalls auch an dem verwitterten Ausgehenden und im Alluvialschutt reichlich getroffen worden.[1])

1) v. Gümbel, Geognost. Beschreibung des Fichtelgebirges S. 301.

Das Gold ist silberhaltig und darum licht gefärbt, das Verhältniss von Silber zu Gold ist in den wenigst reichen Proben 4:1, aber in anderen wohl höher.

2. Eisenkies ist in grosser Menge in bis erbsengrossen Krystallen $\frac{\infty O 2}{2}$, $\frac{\infty O 2}{2}$. $\infty O \infty$, selten auch mit O combinirt in dem höflichen Nebengestein, aber stellenweise auch im weissen Quarze der Gänge eingewachsen und stets schwach silber- und goldhaltig. Der Gehalt an Gold ist sowohl durch die hüttenmännische Probe als auch auf nassem Wege durch Behandlung des scharf gerösteten Erzes mit alkoholischer Jodlösung nach der Methode von Skey (Dingler's Journal CXC. S. 58) nachgewiesen worden. Ausser den erwähnten Elementen enthält das Mineral zuweilen noch sehr wenig Kobalt und Arsen, aber keine Spur von Antimon.

3. Arsenikkies. Verhält sich wie der Eisenkies, ist aber nicht ganz so häufig. Schöne Krystalle zeigen die Form $\infty P. \frac{1}{4} \breve{P} \infty$, sind aber stets ziemlich klein. Da mich der Arsenikkies wegen seines Antimongehaltes lebhaft interessirte, so wurde er näher untersucht. Das specifische Gewicht ergab sich zu 6,09 bei 4° C. Die quantitative Analyse hatte Herr Hofrath Hilger freundlichst übernommen, der Gehalt an Silber wurde in der K. K. Probiranstalt zu Přibram auf trockenem Wege bestimmt, wobei sich auch ein sehr kleiner Goldgehalt ergab. Das schon einmal gelegentlich[1]) mitgetheilte Resultat der Analyse war folgendes:

Schwefel . .	20,84	
Arsen . .	41,36	43,65 As
Antimon . .	3,73 entspr. 2,29 As	
Eisen . .	34,07	
Kobalt . .	Spur	
Silber . .	0,002	
	100,002.	

1) Jahrb. f. Mineralogie 1890 I S. 99.

Ein Arsenikkies von dieser Zusammensetzung war bisher nicht bekannt, denn Breithaupt's Geyerit, welcher auch 1,37 Antimon enthält, gehört nach Behnkes Analyse nicht hierher, sondern zu den vielen Mittelgliedern zwischen Arsenikkies und Arseneisen.

4. Antimonglanz. Ist nächst den Kiesen das häufigste und in Masse vorkommende Mineral der Gänge, welches früher hauptsächlich wegen seines Silber- und Goldgehaltes geschätzt wurde, der aber nicht hoch ist, da in einer reinen Probe zu Přibram nur 0,0016 Silber nebst Spuren von Gold gefunden wurde. Gegenwärtig würden die hohen Antimonpreise ein erfreulicheres Resultat für die geförderten Erze liefern können, ob aber die noch von früherem Abbau her gebliebenen Reste eine Wiederaufnahme der Gruben räthlich erscheinen lassen, vermag ich nicht zu beurtheilen.

Der Antimonglanz kommt in vielerlei Abänderungen vor. Sehr häufig sind grossstrahlige Massen, deren Strahlen bis zu 92 mm Länge bei 8 mm Breite erreichen. Wechselnde Lagen von grossblätterigen mit feinkörnigen Aggregaten, welche sich der „Bleischweif" genannten Varietät des Bleiglanzes durchaus analog verhalten, sind schon seltener und solche von rein feinkörniger Struktur ebenfalls, aber auch an eingesprengten Körnern mit sehr schwach entwickelter Spaltbarkeit fehlt es nicht. Recht selten sind wohlausgebildete, aber nur 4 mm lange und 2 mm breite Krystalle der Form $\infty P. \frac{1}{3} P. \infty \bar{P} 2$ mit stark gestreiften Säulenflächen. Ich habe dieselben in zahlreichen Gruppen nur auf derbem an der Oberfläche mulmigem und mit zahlreichen Höhlungen versehenem, z. Th. mit gediegenem Antimon ausgefüllten Antimonglanz beobachtet. Es scheint demnach, als ob die Oberfläche von alkalischen Gewässern angenagt, aber das gelöste Schwefelantimon an Ort und Stelle wieder abgesetzt worden sei. Die eben genannte hübsche Combination kommt an vielen Orten vor, besonders schön auch bei Kapnik

in Ungarn und Rattenberg in Tyrol, wo der verhältnissmässig junge Antimonglanz eines der Auslaugungsprodukte von Fahlerzen bildet.

Von Oxydationsprodukten kommen spärlich Antimonocker und Antimonblüthe vor, s. diese.

5. Nach Originalstücken, welche Herr Bergrath Hahn zur Sammlung des k. Oberbergamtes eingesendet hat, kommt in drusigen Höhlungen ausgeschieden auch gediegen Antimon vor.

6. Plagionit. Ist zu Goldkronach nicht häufig und findet sich in meist vereinzelten Krystallen oder derb. Die Flächen 0 P und — P treten nicht selten in oscillatorischer Combination mit Pyramiden auf und sind daher parallel den Combinationskanten stark gefurcht, wie zu Wolfsberg[1]), gut zu erkennen ist + P, ∞ P ∞ und — 4 P. Leider sind die Krystalle aufgewachsen und mit einander verwachsen, so dass genaue Bestimmungen der Flächen z. Z. unausführbar erscheinen. Mit dem Wolfsberger Vorkommen, von welchem die Würzburger Sammlung ein gutes Stück enthält, könnte unseres geradezu verwechselt werden. Ausserdem ist der Plagionit eingesprengt und derb beobachtet worden. Die derbe Varietät ist wiederholt irrig für Fahlerz und Bournonit gehalten worden, welche zu Goldkronach nicht vorkommen. Der derbe Plagionit enthält wie der krystallisirte kein Kupfer. Er findet sich auch zu Wolfsberg und bei Arnsberg in Westphalen,[2]) hier mit kleinen Drusen, in welchen Kryställchen 0 P. — P nicht selten sind.

7. Meneghinit. Langgestreckte, bis 5 mm lange und 1 ½ mm breite, stets schilfähnlich gestreifte Säulen von bleigrauer Farbe, welche sich den „Sagenit" genannten Rutilaggregaten ähnlich häufig unter 40° kreuzen, bedecken derben Plagionit oder finden sich mit Eisenspath verwachsen

1) Lüdecke, Jahrb. f. Min. 1883 II S. 115.

2) Sandberger, Jahrb. f. Min. 1883 II S. 94.

in Drusen des Gangquarzes. Ueber ihr Krystallsystem lässt sich darum keine Gewissheit erlangen, weil die Enden nicht gut ausgebildet sind, sondern wie ausgefranst erscheinen und auch die Lage der etwaigen Spaltungsflächen nicht mit Bestimmtheit constatirt werden kann. Die Härte des spröden Minerals ergab sich zu 3, das spec. Gewicht zu 6,4. Vor dem Löthrohre schmilzt das Mineral leicht unter Bedeckung der Kohle mit Beschlägen von Antimon- und Bleioxyd, von heisser Salzsäure wird es unter Entwickelung von Schwefelwasserstoff leicht gelöst. Als Bestandtheile wurden qualitativ Blei, Antimon und Schwefel nachgewiesen. Eine zuverlässige quantitative Analyse konnte bisher wegen Mangel an Material nicht ausgeführt werden.

Der von Groth[1]) angeführte Antimonglanz von Goldkronach in sagenitähnlichen Aggregaten gehört zweifellos hierher.

8. Federerz. Haarförmige bleigraue Kryställchen, welche Plagionit umhüllen oder auf Meneghinit oder Magnetkies aufgewachsen sind, reagiren auf Antimon, Blei und Schwefel, sind also ächtes Federerz, welches auch äusserlich mit jenem von Wolfsberg auf das Genaueste übereinstimmt und daher wohl auch als haarförmiger Jamesonit zu betrachten ist. Es findet sich immer nur in sehr geringer Menge und eine quantitative Analyse war daher nicht möglich. Ein eigenthümliches Vorkommen ist jenes von der Schmutzler-zeche, wo Federerz in Tausenden von haarfeinen Kryställchen grossblätterigen Braunspath erfüllt und schwarz färbt.

9. Bleiglanz ist mir in mittel- und feinkörnigen Aggregaten, auch mit Antimonglanz gemengt bekannt geworden. An einem Stückchen fand sich auch ein deutlicher Würfel. Häufig war das Mineral nicht.

10. Zinkblende von braungelber Färbung kommt selten im Gemenge mit strahligem Antimonglanz vor. Bleiglanz

1) Mineralien-Sammlung der Universität Strassburg S. 22.

welchen Breithaupt[1]) auch mit beiden zusammen beobachtet hat, ist mir in dieser Form nicht zu Gesicht gekommen.

11. Magnetkies in Gruppen kleiner rauhflächiger Tafeln (0 P. ∞ P) in Drusen des Quarzes aufsitzend ist sehr selten, war aber schon Breithaupt[2]) bekannt, seine Bedeckung durch Federerz habe ich schon erwähnt. In der Würzburger Sammlung ist nur ein Stückchen davon vorhanden.

12. Kupferkies habe ich nur an einem Stücke, welches der Schmidt'schen Sammlung angehört, in kleinen derben Massen mit Arsenikkies in weissem Quarze eingesprengt beobachtet.

13. Zundererz. Findet sich in dunkelrothen weichen Ueberzügen besonders auf Plagionit, ist aber recht selten. Es ist zwar jenem von Clausthal sehr ähnlich und enthält auch Blei wie dieses. Breithaupt (a. a. O.) erwähnt es auch von Goldkronach. Alles bisher Angeführte gilt auch für das von Hausmann[3]) constatirte Vorkommen des Zundererzes bei Wolfsberg. Seine hochrothe Färbung kann aber nicht von eingemengtem Rothgültigerze herrühren, da solches zu Goldkronach nicht vorkommt. Es besteht vielmehr offenbar wesentlich aus Rothspiessglanzerz im Gemenge mit einem Bleisalze und erdigem Plagionit.

14. Gelber erdiger Antimonocker erscheint hier und da auf Klüften von derbem Antimonglanz.

15. Antimonblüthe in strahligen Büscheln farbloser Krystalle auf Antimonglanz sitzend ist sehr schön in der Schmidt'schen Sammlung vertreten.

16. Steinmark. Weisse opake Massen, an welchen man unter dem Mikroskope zuweilen Krystallflächen wie bei dem sog. krystallisirten Kaolin zu bemerken glaubt, ist in geringer Menge über Quarz, häufig aber über Plagionit und Meneghinit zu beobachten. Das Löthrohr ergiebt reine Thonerdereaktion.

1) Paragenesis der Mineralien S. 192.
2) Ebenda S. 192.
3) Handbuch d. Mineralogie I S. 195.

17. Schwerspath wird von v. Gümbel[1]) als Seltenheit von der Grube Schickung Gottes angeführt, ich habe ihn nicht gesehen.

18. Braunspath. Ist auf den Gängen ziemlich verbreitet, aber in Folge seines hohen Eisenoxydulgehaltes meist schon mehr oder weniger stark zersetzt. Das frischeste Stück mit erbsengrossen rauhflächigen, aber nicht gekrümmten Rhomboëdern, deren Winkel über 106° betragen, gehört der Schmidt'schen Sammlung an. Das Mineral ist im Grossen blass fleischroth gefärbt, die kleineren Spaltungsstückchen sind aber weiss wie auch das Pulver. Das spec. Gewicht beträgt 3,05. Die quantitative Analyse des Herrn Hofrath Hilger in München ergab als Zusammensetzung:

Kohlensaures Eisenoxydul . .	18,470
kohlensaures Manganoxydul . .	3,063
kohlensaurer Kalk . . .	56,066
kohlensaure Bittererde . .	21,997
	99,596.

19. Eisenspath. Kleine linsenförmige Rhomboëder kommen nicht häufig in Drusen des Gangquarzes mit Meneghinit oder Antimonglanz verwachsen vor. Der Spath ist chemisch rein, d. h. er enthält keinen Kalk und Bittererde.

20. Kalkspath. Gehört zu den allerjüngsten Bildungen und sitzt in kleinen verzerrten Krystallen der Form $R^3 . \infty R$ über krystallisirtem Antimonglanz. Der Kalkspath gehört zweifellos der Breithaupt'schen Varietät diamesus syngeneticus an und ist recht selten.

Aus dem Vorhergehenden geht mit aller Bestimmtheit hervor, dass die Elemente von sämmtlichen auf den Erzgängen vorkommenden Mineralien in dem Sericitschiefer und nur in diesem auftreten, an welchen ja auch die Erzgänge gebunden sind. Die Proterobasdurchbrüche mögen wohl

1) a. a. O. S. 301.

bei der Aufreissung der Gangspalten mitgewirkt haben, Erze haben sie denselben aber nicht zugebracht, da ihnen die Elemente derselben fehlen. Ebenso verhält es sich auch nach Liebe's[1]) vortrefflicher Schilderung in der Gegend von Schleiz u. a. O. der reussischen Fürstenthümer.

Es fragt sich nun, wie man sich die Ausfüllung der Gänge zu denken hat. Die drei häufigsten Erze sind unzweifelhaft Eisenkies, welcher vorzugsweise in dem höflichen Nebengestein und ebenso wie dort mit Arsenikkies in den lichten derben Quarzen auftritt, dann Antimonerz, vor Allem Antimonglanz. Die Sericitschiefer enthalten, wie oben nachgewiesen, stets schwefelsaures Kali und organische Substanz, welche dasselbe zu Schwefelkalium reduciren konnte und zweifellos reducirt hat. Wo dies der Fall war, musste die organische Substanz grösstentheils verschwinden und wo sie noch in grösserer Menge vorhanden ist, hat daher dieser Reductionsprocess, dessen Produkte die Erze aus dem Schiefer auslaugen und den Gangspalten zuführen konnten, nicht oder nur in geringem Grade stattgefunden. Das Fehlen der Erze an diesen dunklen Gesteinen erklärt sich damit von selbst.

Sobald sich in dem Schiefer, welcher 4 ½ proc. Eisenoxyd enthält, dieses gleichfalls unter Mitwirkung organischer Substanz zu kohlensaurem Oxydul umgewandelt hatte, wurde es von Schwefelkalium ausgefällt und fixirt. Da auch Schwefelgold in Schwefelkalium löslich ist, so ist dieses gleichfalls ausgelaugt und mit dem Schwefeleisen niedergeschlagen worden, ebenso auch das Silber.[2]) Die Auslaugung des Eisens im Nebengesteine dauerte nur so lange fort, bis das Gestein breiartig erweicht war und daher den Flüssig-

1) Uebersicht über den Schichtenaufbau Ost-Thüringens in Abhandlungen zur geolog. Karte von Preussen und den Thüring. Staaten, Bd. V 4. S. 515.

2) Dieses kann sehr wohl ursprünglich als Chlorsilber-Chlorkalium ausgezogen und durch Schwefelkalium zersetzt worden sein.

keiten keine ungehinderte Bewegung nach der Gangspalte mehr gestattete; dann war aber der Quarz, welcher diese allmählich ausfüllte, natürlich sehr arm an Erzen, wie der sogenannte Quarzgang deutlich beweist. Es giebt ja auch sonst im Erzgebirge, Schwarzwald, Alpengebirge und rheinischen Schiefergebirge Gänge genug, an welchen die gleiche Erscheinung zu beobachten ist.

Aehnlich dem Eisenkiese verhält sich der weniger häufige Arsenikkies, welcher im Gegensatze zu dem von Antimon ganz freien Eisenkies ausnahmsweise bereits 3,7 proc. Antimon enthält. Aber sowohl der bleihaltige Meneghinit als der Antimonglanz selbst sind jünger als die eisenhaltigen Kiese und treten erst nach jenen auf. Besonders deutlich sieht man das auf Klüftchen des „höflichen" Nebengesteins und auf solchen derjenigen Gänge, welche in weissem Quarz eingesprengte Kiese enthalten. (Paragenetische Beispiele a und b.) Die weit grössere Affinität von Eisen zu Arsen als zu Antimon tritt hier ebensowohl hervor als an anderen Orten, z. B. zu Thomasschlag in Böhmen; auch auf den Bräunsdorfer Gängen, welche in Folge von grossem Ueberschusse von Antimon im Nebengesteine sogar Verbindungen desselben mit Eisen (Berthierit) enthalten, ist der schwach silberhaltige Arsenikkies (Weisserz) älter als die Antimonerze.[1]) Das erklärt sich durch den Umstand, dass Schwefelkalium-Schwefelarsen leichter löslich als die entsprechende Antimonverbindung ist, aber auch von Eisensalzen leichter zersetzt wird, als diese.

Dem massenhaften Auftreten des Antimonglanzes ging zu Goldkronach das verhältnissmässig seltene von zwei bleihaltigen Antimonerzen, dem Plagionit und Meneghinit, voraus, welche vermuthlich nur lokale Bildungen an solchen Stellen sind, wo Blei in grösserer Menge vorhanden war. Das bleihaltige Federerz ist nur eine ganz lokale Erscheinung, gehört aber auch zu den älteren Gliedern der Gangausfüllung,

1) H. Müller in v. Cotta's Gangstudien I S. 181.

da es als Einschluss im Braunspath vorkommt. Bleiglanz tritt erst später nur ganz untergeordnet im Gemenge mit Antimonglanz auf.

Antimonige Säure, welche, wie oben nachgewiesen, in Vertretung von Thonerde im Sericitschiefer enthalten ist, löst sich in Schwefelkalium schon bei gewöhnlicher Temperatur[1]) und zersetzt sich später zu schwefelsaurem Kali und Antimonglanz. Mit dem Auftreten des letzteren findet die Ausfüllung der Gangspalten ihren Abschluss, die ausserdem noch weiter vorkommenden Substanzen sind mit Ausnahme des sogleich zu besprechenden Braunspaths als Zersetzungsprodukte des Antimonglanzes anzusehen, wie der Antimonocker und die Antimonblüthe; das Zundererz gehört nicht zu ihnen, sondern ist an das Auftreten des Plagionits gebunden und bleihaltig.

Der Braunspath zeigt in seiner Zusammensetzung dasselbe Verhältniss von Eisen zu Bittererde und Kalk, in welchem diese Elemente ursprünglich im Sericit enthalten waren (s. oben). Er verwittert zu Eisenoxydhydrat und hierbei wird natürlich kohlensaurer Kalk in Freiheit gesetzt, man begegnet ihm aber nur so selten auf dem Gange, dass man annehmen muss, er sei grösstentheils von kohlensäurehaltigen Wassern weggeführt worden. Genau dieselbe Verwachsung von Antimonglanz und Braunspath wie zu Goldkronach habe ich früher auf den Gruben Ursula bei Welschsteinach unweit Offenburg und St. Trudpert im Münsterthale bei Freiburg i. B. beobachtet.

Ausser Braunspath kommt, jedoch in ganz geringer Menge, ächter Eisenspath in kleinen linsenförmigen Rhomboëdern mit Plagionit und Meneghinit vor. Noch seltener ist der Magnetkies. Beide Mineralien werden nur der Vollständigkeit wegen hier erwähnt.

---

1) Gmelin, Handb. d. Chemie 2. Aufl. III S. 782.

Die Goldkronacher Erzlagerstätten liefern wieder einen schönen Beleg für die Ausfüllung der Gangspalten durch Auslaugungsprodukte des Nebengesteins und gehören zu jenen, deren Antimonglanz als primitiver Körper auftritt und nicht, wie das sonst so oft vorkommt, als Zersetzungsprodukt älterer Erze, namentlich Fahlerze angesehen werden kann. Ihnen überaus ähnlich verhalten sich zunächst die Gänge der Gegend von Schleiz, jene von Wolfsberg am Harze, sowie zahlreiche andere, welche in Glimmer- und Sericitschiefer der Alpen, in Böhmen, bei Welschsteinach im Kinzigthale, St. Trudpert im Münsterthale[1]) und Sulzburg im Schwarzwald vorkommen. Ausserdem finden sich goldhaltige Antimonglanze auch in Gängen des Dacits, aber auch in älteren Gesteinen Ungarns und Siebenbürgens[2]) und in den Gneissen der Alpen (Gastein, Rauris u. s. w.) und Böhmens (Michelsberg u. a. O.), sowie im Granit z. B. bei Magurka, Bocza und Lubella in Ungarn, Schönberg, Mileschau und Bitis in Böhmen, um nur bekanntere europäische Vorkommen zu citiren.

Die Goldkronacher Gänge vertauben in geringer Tiefe gänzlich, so der Hauptgang bei 71 m unter der tiefsten Stollensohle, der Schickung Gottes-Gang sogar schon bei 45 m unter Tag.

Es ist nicht meine Aufgabe, auch die Grubenbauten und deren Erträge zu schildern, da alles Nöthige in v. Gümbels Darstellung geboten ist. Leider muss man nach aufmerksamer Würdigung derselben auch seinem Endurtheile beistimmen, dass dieses Grubenfeld wohl niemals wieder eine Blüthezeit erleben wird.

---

1) Der Antimonglanz wurde s. Z. von Walchner und später auch von G. Leonhard irrig als Zinkenit angesehen, der im Schwarzwald nur bei Hausach vorkommt.

2) Zu Hideg-Szamos ist Sericitschiefer das unmittelbare Nebengestein, wie zu Goldkronach.

Ueber die Hirne verschiedener Hunderacen.

Von N. Rüdinger.

(*Eingelaufen 2. Juli*)

Die folgenden vorläufigen Mittheilungen betreffen die Ergebnisse einer mehrjährigen Untersuchung an den Hirnen verschiedener Hunderacen, insbesondere die Feststellung des „absoluten und relativen Gehirngewichts" bei denselben.

Bei der Bestimmung des Körpergewichtes der Hunde hat sich ergeben, dass dasselbe bei einer und derselben Race und bei gleichem Alter der Thiere eine grosse Schwankung haben kann, welche wesentlich abhängig ist von der grösseren oder geringeren Fettablagerung und dem Grade der Muskelausbildung bei den verschiedenen Thieren.

Man erhält daher bei den Gewichtsbestimmungen des Körpers und des Hirns an mehreren Hunden zuweilen Zahlen, welche bei der Berechnung des relativen Hirngewichtes keinen korrekten Ausdruck geben. Zwei gleichschwere Hirne zweier Hunde, welche gleichgross und gleichaltrig sind, aber in Folge einer bedeutenden Fettablagerung bei dem einen und hochgradiger Magerkeit bei dem andern Thier ganz ungleiche Körpergewichte zeigen, ergeben bei der Berechung des relativen Gewichtes auffallende Unterschiede. Diese Differenzen mögen ausgleichbar werden, wenn eine grössere Untersuchungsreihe, als dies zur Zeit der Fall ist, vorliegt, und dann nur

Normalthiere mit Fettgehalt und Muskelentwicklung mittleren Grades miteinander verglichen werden.

So habe ich die Gewichtsangaben von zwei Thieren in einer zuerst angelegten Tabelle wieder gestrichen, weil dieselben von allen übrigen Gewichtsbestimmungen verschieden grosser Hunde eine so hochgradige Abweichung zeigten, dass ich einen Irrthum bei der Notirung des Körpergewichtes vermuthete. Allein weitere Beobachtungen liessen erkennen, dass das allzugeringe Körpergewicht in den beiden Fällen die Folge einer Infectionskrankheit, an denen die Hunde zu Grunde gingen, war. Bei allen weiteren derartigen Untersuchungen der Thiere ist stets eine hochgradige krankhafte Veränderung des Körpers mit in Betracht zu ziehen, wenn dieselben verwerthbare Resultate ergeben sollen.

Um eine Uebersicht über diese Gewichtsergebnisse zu gewinnen, soll hier zunächst die Tabelle zur Mittheilung gelangen, in der von 24 Hunden das Alter, das absolute Körper- und Gehirngewicht und das berechnete relative Gehirngewicht enthalten sind. (Siehe nebenstehende Tabelle.)

Was das Alter der Hunde anlangt, so darf nicht übersehen werden, dass Angaben über dasselbe vorkommen, die an Genauigkeit zu wünschen übrig lassen; denn die Thiere werden nicht immer von jenen Besitzern gekauft, die sie aufgezogen haben, wesshalb ihre Wurfzeit unbekannt ist. Verwerthet man für die Bestimmung des Alters bei einem Hunde die Beschaffenheit des Gebisses, so kann man auch nur erfahren, ob ein Thier mit einem Milchgebiss, einem im Wechsel begriffenen oder mit einem bleibenden Gebiss versehen ist. Aus der Beschaffenheit des Gebisses lässt sich daher nur Jugend und höheres Alter eines Thieres, aber nicht das Alter nach Monaten oder Jahren angeben. Die Altersbestimmung der Hunde hat, soweit ich bis jetzt ersehen kann, eine wesentliche Bedeutung desshalb, weil mit Hilfe derselben die

Tabelle.

	Race und Geschlecht	Alter	Absolutes Körpergewicht	Absolutes Gehirngewicht	Relatives Gehirngewicht	Auf 1000 g treffen an Gehirn
1	Leonberger	4 Jahre 6 Mon.	59000 g	135 g	1 : 437,03	2,28 g
2	Bernhardiner ♀	3 Jahre	57000 g	108 g	1 : 527,77	1,89 g
3	Bernhardiner ♂	8—9 Jahre	53000 g	123 g	1 : 430,89	2,32 g
4	Ulmer Dogge	2 Jahre 3 Mon.	48000 g	114 g	1 : 421,05	2,37 g
5	Bernhardiner ♂	4 Jahre 7 Mon.	46000 g	123 g	1 : 373,98	2,67 g
6	Leonberger	1 Jahr 4 Mon.	41000 g	105 g	1 : 390,47	2,56 g
7	Jagdhund ♀	2 Jahre	32000 g	109 g	1 : 293,57	3,41 g
8	Hofhund	2 Jahre	29000 g	62 g	1 : 467,74	2,13 g
9	Bernhardiner ♀	5 Monate	28000 g	116 g	1 : 241,37	4,14 g
10	Jagdhund ♀	3 Jahre	12000 g	82 g	1 : 146,34	6,83 g
11	Affenpinscher	1 Jahr 6 Mon.	8500 g	73 g	1 : 116,43	8,58 g
12	Pinscher ♀	9 Monate	7500 g	64 g	1 : 117,18	8,53 g
13	Spitz ♀	6 Monate	6100 g	75 g	1 : 81,33	12,29 g
14	Windhund ♀	2 Jahre	6000 g	81 g	1 : 74,07	13,50 g
15	Mops (zweifelhafte Race)	4 Monate	4878 g	72 g	1 : 67,75	14,76 g
16	Mops (zweifelhafte Race)	4 Monate	4775 g	74 g	1 : 64,52	15,49 g
17	Pinscher	1 Jahr 6 Mon.	4496 g	71 g	1 : 63,32	15,71 g
18	Hund von engl. Race	—	4378 g	68 g	1 : 64,38	15,53 g
19	Spitz	6 Monate	3750 g	59 g	1 : 63,55	15,73 g
20	Spitz	6 Monate	3400 g	71 g	1 : 47,88	20,88 g
21	Spitz	—	3128 g	70 g	1 : 44,68	22,37 g
22	Hund ♀	4 Monate	1137 g	84 g	1 : 13,53	73,87 g
23	Windhund	Erhalten aus wissenschaftlichen Instituten ohne Angabe des Alters und Körpergewichtes.		95 g	—	—
24	Fox-terrier			32 g	—	—

maximale Wachsthumsgrenze des Hirns, d. h. die Grenze der Gewichtszunahme festgestellt werden soll. Vergleicht man z. B. die Hirngewichte der beiden Bernhardiner (Nr. 2 und 9) miteinander, so ergiebt sich, dass das fünf Monat alte Thier (Nr. 9) ein Hirngewicht von 116 g besitzt, während der dreijährige Hund (Nr. 2) der gleichen Race, welcher 29000 g schwerer ist als der erstere, nur ein Hirngewicht von 108 g hatte.

Aus den bisherigen Gewichtsbestimmungen der Körper und der Hirne bei den Hunden darf gefolgert werden, dass deren Hirne schon früh ihre äusserlich formelle Ausbildung, ihr maximales Wachsthum erlangen, die Körper aber noch weiter an Grösse und Gewicht zunehmen, ohne wesentliche Antheilnahme der Hirne.

Die Zahlenreihe über das absolute Gehirngewicht ergiebt, dass dasselbe nicht durch das Alter des Thieres, sondern durch das Körpergewicht bis zu einem gewissen Grade beeinflusst wird. Sind auch im Allgemeinen zwischen Hirn und Körpergewicht der Hunde mehrfache Schwankungen vorhanden, so lässt sich aus den Zahlen doch ersehen, dass die schwersten Hunde auch die schwersten Hirne und die leichten Hunde die kleinsten Hirne besitzen. Die Thiere wurden nach der Grösse ihres Körpergewichtes in die Tabelle eingetragen, während die Gehirngewichte in der Reihenfolge der Körpergewichte geordnet, einige Schwankungen zeigen. Verweise ich auf Nr. 9—14, so folgen hier Gehirngewichte von 109 g bei 32000 g Körpergewicht, 62 g Gewicht des Hirns bei 29000 g Körpergewicht und hier sind die Zahlen der Ausdruck von ganz ungleichen Verhältnissen zwischen Körper- und Hirngewicht. Bei diesen auffallenden Unterschieden darf man wohl daran denken, dass das Alter, die Race und insbesondere der körperliche Zustand der Thiere einen nicht geringen Einfluss ausüben. Unverständlich bleibt es immerhin, wenn ein zweijähriger Hund bei einem Gewicht

von 32000 g nur 109 g Gehirn, ein gleichalteriges Thier bei einem Körpergewicht von 29000 g nur 62 g und sogar ein fünf Monat alter Bernhardiner, der 28000 g schwer war, 116 g Gehirn hatte.

Der Raceunterschied, an den man auch denken könnte, erscheint nicht ausreichend, diese Verschiedenheit zu erklären, ebensowenig wie der Unterschied verständlich ist bei Nr. 21 und 22, bei denen der 1137 g schwere Hund um 14 g mehr Gehirnsubstanz besass, als das 3128 g schwere Thier.

Hier spielen noch Faktoren herein, welche bei den weiteren Studien eine ganz besondere Beachtung verdienen. Einerseits scheint das Alter der Thiere, andererseits aber die Krankheit, welche den Tod desselben verursachte, mit in Betracht zu kommen. Schon seit Jahren suche ich die Hirne von jenen Hunden zu sammeln, welche für physiologische Zwecke in den Instituten angekauft werden; dieselben verdienen ebenso den Vorzug vor kranken Thieren, wie wir die Bestimmungen des Körper- und Gehirngewichtes an den Verunglückten, den Selbstmördern und Enthaupteten jenen an chronischen Krankheiten verstorbenen Menschen vorziehen.

Schon aus der Zahlenvergleichung des absoluten Körper- und Gehirngewichtes lässt sich entnehmen, dass die relativen Gewichte auffallend differiren werden. Wie schon erwähnt sprechen mehrere Thatsachen dafür, dass das Wachsthum des Hirns bei den Hunden schon vor Ende ihres ersten Lebensjahres seine Grenze erreicht, während der Körper noch bedeutend an Grösse und Gewicht zunimmt. Das relative Gehirngewicht zeigt demnach beim jungen und alten Thier einen in die Augen fallenden Unterschied:

Die Zahlenreihe über das relative Hirngewicht zeigt sich um so günstiger, je jünger das Thier ist. Bei dem drei Jahre alten Bernhardiner (Nr. 2) welcher ein Körpergewicht von 57000 g besitzt, ergiebt sich ein relatives Gehirngewicht wie 1:527,77; dagegen wurde bei dem fünf Monat alten

Bernhardiner (Nr. 9), der 28000 g wog, ein relatives Hirngewicht wie 1:241,37 berechnet, und bei dem vier Monat alten Thier (Nr. 15), das nur 4878 g wog, ein relatives Hirngewicht wie 1:67,75 festgestellt. Bei allen leichten Hunden ergiebt sich ein relativ sehr günstiges Hirngewicht, weil das Körperwachsthum, nachdem das Hirn seine maximale Grösse erlangt hat, gar nicht mehr oder nur in geringem Grade fortschreitet.

In ganz ähnlicher Weise zeigt sich das relative Hirngewicht, wenn dasselbe auf 1000 g Körpergewicht berechnet wird. Bei den schweren Thieren kommen auf 1000 g Körper zwischen 2—6 g Hirn und bei den kleinen leichten Hunden auf 1000 g Körper 8—22 g und mehr Hirn.

Bei den weiteren Studien werden noch in Betracht gezogen, das Volum des ganzen Schädels zu Volum der Schädelhöhle und das Verhältniss des Hirnschädels zum Gesichtsskelett.

Die äusserlich am Hundeschädel gewonnenen Messungsergebnisse können, wenn es sich um relative Beziehungen zwischen den äusseren Dimensionen des Schädels und des Hirns handelt, keine direkte Verwerthung finden, wie etwa bei dem Menschenschädel, weil bei den Hunden die ungleiche Dicke der Schädelknochen, die Muskelleisten und die pneumatischen Räume am Hirnschädel die Messung hochgradig beeinflussen. Aber noch mehr wird der Kopf des Hundes beeinflusst durch den ungemein verschiedenen Grad der Ausbildung des Gesichtsskelettes. Die Fresswerkzeuge sind bei der einen Race sehr stark, bei der andern nur schwach ausgebildet, so dass der Gesichts- und der sog. Sattelwinkel höchst variabel erscheinen, ohne dass der Grad der Hirnentwicklung einen nennenswerthen Einfluss auf dieselben ausübt.

Alle die berührten Fragen bedürfen für ihre Beantwortung noch eingehendere Studien und nach Gewinnung

des Hirn- und Schädelmateriales von den Hunden verschiedener Racen soll mit Berücksichtigung der spärlich vorhandenen Literatur das vorliegende Thema eine eingehendere Besprechung erfahren.

Vorläufig sollen einige Sätze über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen hier zur Mittheilung gelangen.

1. Wenn auch in den Zahlen über das Körper- und Hirngewicht noch viele Schwankungen, welche durch eine grössere Untersuchungsreihe sich ausgleichen mögen, vorhanden sind, so ist doch schon festgestellt, dass das Hirn bei den Hunden schon im ersten Lebensjahre seine Wachsthumsgrenze erreicht.

2. Der schwerste Hund hat auch das schwerste Hirn. Die Hirngewichte nehmen bei den Hunden mit dem Körpergewicht derselben zu, jedoch in einem ungleichen Verhältniss.

3. Das relative Hirngewicht ist bei kleinen leichten Thieren ein viel günstigeres als bei den grossen.

4. Der kleine leichte Hund besitzt auf 1000 g Körpergewicht bedeutend mehr Hirn als der grosse.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 2. Juni 1894.

1. Herr H. SEELIGER legt eine Abhandlung: „über den vierfachen Stern ζ Cancri" vor.

2. Herr L. BOLTZMANN überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. IGNAZ SCHÜTZ, Hilfsarbeiter beim Unterrichte für theoretische Physik im math.-physikal. Institut: „über eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz'schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell'schen Theorie entspricht".

Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri.

Von H. Seeliger.

(*Eingelaufen 2. Juni.*)

Die Resultate numerischer Rechnungen von der Art, wie ich sie in meinen beiden Arbeiten über ζ Cancri[1]) veröffentlicht habe, tragen immer mehr oder weniger den Character von Interpolationsformeln. Ihre Constanten lassen sich nicht mit so grosser Genauigkeit bestimmen, dass auf

1) Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri. Denkschriften der Wiener Akademie 1881. Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Abhandlungen der k. bayer. Akademie 1888. Im Folgenden soll die erste Abhandlung mit I, die zweite mit II bezeichnet werden.

Jahre hinaus ein völlig befriedigender Anschluss an die Beobachtungen verbürgt werden kann. Ich habe diese Sachlage, namentlich in II, ausdrücklich hervorgehoben. Es ist deshalb einerseits nicht zu verwundern, wenn die aus der Theorie folgenden Oerter mit der Zeit von den Beobachtungen um geringe Beträge abweichen, andererseits hat es kein Interesse in kürzeren Zeitintervallen immer von neuem die Beobachtungen an die Theorie genau anzuschliessen, wenn nur die characteristischen Ergebnisse der letzteren sich in den ersteren wiederfinden.

Bei der Ausarbeitung von I standen mir Beobachtungen bis zum Jahre 1880 zur Verfügung, während in II Messungen bis zum Jahre 1888, allerdings zum Theil in nicht hinlänglicher Zahl, benutzt werden konnten. Die Berechtigung der zweiten Untersuchung lag deshalb nicht sowohl in dem vermehrten Beobachtungsmaterial, als vielmehr in dem Umstande, dass ich dort die Theorie nach verschiedenen Richtungen eingehender und vollständiger entwickeln konnte und in dieser Beziehung einen gewissen Abschluss erreichen zu können glaubte. Eine Aufforderung meine Rechnungen über ζ Cancri gegenwärtig wieder aufzunehmen, kann ich deshalb in dem Hinzukommen neuer Beobachtungen nicht erblicken. Dagegen sind in den letzten Jahren von Herrn Burnham, einem verdienten Doppelsternbeobachter, Angriffe gegen meine Theorie der Bewegung des entfernteren Sternes C erfolgt, welche in den Augen derjenigen, die meine Arbeiten nicht genauer kennen, die Sachlage zu verdunkeln geeignet sind. Die von Herrn Burnham mit grosser Zuversicht vorgebrachten Argumente sind freilich nur geeignet zu beweisen, dass ihr Urheber weder genügende Sachkenntniss besitzt, noch sich die Mühe gegeben hat meine Arbeiten genauer anzusehen. Ich könnte deshalb die verdiente Würdigung der Burnham'schen Behauptungen ruhig der Zukunft und Anderen überlassen. Auf der andern Seite kann ich nicht

zugeben, dass durch ganz unbegründete Behauptungen die Resultate meiner Arbeiten über ζ Cancri in Frage gestellt werden und deshalb habe ich im Folgenden einige Rechnungen ausgeführt, die auch für den Fernerstehenden die Sachlage in, wie ich hoffe, völlige Klarheit zu stellen geeignet sein dürften.

Ich werde mich im Folgenden einzig und allein mit der Bewegung des entfernteren Begleiters C um den Schwerpunkt der beiden inneren Sterne A und B beschäftigen. Ausführliche Untersuchungen in I und II haben zu dem Resultate geführt, dass die Beobachtungen keine merkliche Verschiedenheit zwischen dem Schwerpunkte von A und B und der Mitte beider Sterne, $\frac{A+B}{2}$, ergeben. Weiter zeigten sich in den Beobachtungen von C und zwar in ganz übereinstimmender Weise sowohl im Positionswinkel als auch in Distanz Undulationen, welche die Positionswinkel um ungefähr $\pm 2^0$ und die Distanzen um $\pm 0\overset{''}{.}2$ um einen mittleren Werth herumschwanken liessen. Die constante Periode dieser Schwankung betrug nahezu 18 Jahre und es war möglich, dieselbe in mehr als 3 vollständigen Wiederholungen zu bestätigen. Die ganze Erscheinung ist nach jeder Richtung vollständig durch die Annahme zu erklären, der Stern C besitze einen vorerst als dunkel zu betrachtenden nahen Begleiter. Die in II verarbeiteten Jahresmittel von 1880 ab konnten indessen nicht hinlänglich begründet werden, was nunmehr durch die inzwischen erfolgte Publication mehrerer werthvollen Beobachtungsreihen möglich ist. Vom Jahre 1888 ab wäre aber auch gegenwärtig die Aufstellung von einigermaassen zuverlässigen Jahresmitteln nicht möglich, hätten nicht die Herren Schiaparelli, H. Struve und Lovett die grosse Freundlichkeit gehabt, mir aus ihren Tagebüchern die gewünschten Auszüge mitzutheilen. Namentlich die sehr zahlreichen und ausgezeichneten Messungen

Herrn Schiaparelli's bilden eine wesentliche Stütze der folgenden Bemerkungen. Auf diese Weise war es möglich 15 neue und sichere Jahresmittel von 1880—1894 aufzustellen. Nach den obigen Bemerkungen kann es sich nicht darum handeln, diese neuen Messungsresultate in die früheren Rechnungen einzufügen. Dagegen glaube ich ähnlichen unbegründeten Angriffen, wie die von Seite des Herrn Burnham, am besten zu begegnen, wenn ich die neueren Messungen, die doch fast gar keinen personalen Zusammenhang haben mit den in den vierziger oder fünfziger Jahren ausgeführten, für sich allein behandle. Nachdem sich herausgestellt haben wird, dass sich meine früheren Formeln den neuen Beobachtungen noch soweit anschliessen, als man überhaupt erwarten konnte, werde ich zeigen, dass auch die neuen Messungen, für sich allein betrachtet, wiederum der Annahme eines dunklen Begleiters von C völlig und zwar auch quantitativ den früheren Formeln entsprechend, genügen und dass ohne eine solche Annahme Fehler übrig bleiben, die durch Anhäufung von persönlichen Fehlern zu erklären wohl Niemand in ernsthafter Weise versuchen wird.

Ich gehe nun zur Mittheilung der gesammelten Jahresmittel der Beobachtungen von C, bezogen auf die Mitte von A und B, über. Zur Abkürzung werden die Beobachter Hall (sen.), Jedrzejewicz, Schiaparelli und Hermann Struve mit den Buchstaben H, J, Sp, H. Σ, bezeichnet.

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel
80.16	Franz	2	130°.60	5".545	
80.21	H.	4	132.45	5.465	1880.21 (11.10) 132°.25 5".372
80.22	J.	4	132.50	5.193	
80.31	Seabroke	1	133.72	—	

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel			
81.24	J.	4	131°29	5″467	1881.28	(17.16)	131°42	5″431
81.25	Doberck	2	131.75	5.400				
81.26	Seabr.	1	131.37	—				
81.28	O. Σ.	2	130.80	5.210				
81.30	Sp.	4	131.57	5.445				
81.30	H.	4	131.54	5.508				
82.20	H.	4	132.03	5.587	1882.24	(14.13)	131°13	5″517
82.25	Seabr.	2	129.83	—				
82.26	Sp.	4	131.06	5.468				
82.27	J.	4	130.94	5.497				
83.13	Engelm.	4	129.43	5.653	1883.26	(15.14)	129°73	5″599
83.29	Sp.	4	130.16	5.598				
83.31	H.	4	130.21	5.567				
83.32	Seabr.	1	128.33	—				
83.35	Küstner	2	129.20	5.557				
84.21	Perrotin	2	128.95	5.561	1884.28	(17.14)	128°63	5″546
84.25	Sp.	4	129.21	5.589				
84.26	O. Σ.	4	129.22	5.418				
84.28	H.	4	126.59	5.625				
84.38	Seabr.	1	131.00	—				
84.39	Smith	2	128.90	—				
85.28	Seabr.	1	126.20	5.760	1885.29	(9)	128°09	5″643
85.29	Engelm.	4	128.18	5.654				
85.29	Sp.	4	128.48	5.603				
86.04	Tarrent	2	125.71	5.480	1886.26	(20.14)	126°99	5″591
86.24	Seabr.	1	126.40	(5.06)				
86.25	Smith	1	127.30	(4.61)				
86.28	H.	4	126.26	5.600				
86.29	J.	4	126.98	—				
86.30	Engelm.	4	128.58	5.569				
86.30	H. Σ.	4	126.84	5.660				

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel			
87.24	Sp.	4	125°18	5".598				
87.24	H.	4	126.96	5.595				
87.30	H. Σ.	4	126.17	5.600	1887.27	(14.12)	125°96	5".598
87.35	Seabr.	1	125.40	(4.51)				
87.36	Smith	1	124.80	(4.64)				
88.25	H.	4	124.13	5.520				
88.27	Sp.	4	124.31	5.684				
88.28	Smith	2	125.20	(4.65)				
88.33	O. Σ.	2	123.84	5.667	1888.29	(17.15)	124°27	5".625
88.33	H. Σ.	4	124.01	5.610				
88.36	Maw	1	124.70	5.790				
89.12	Seabr.	1	125.30	(4.85)				
89.18	Highton	1	124.60	5 310				
89.19	Leavenworth	2	123.80	5.530	1889.22	(18.17)	123°79	5".534
89.22	Sp.	4	123.01	5.536				
89.23	H. Σ.	4	123 51	5.590				
89.23	H.	4	123.91	5.680				
89.29	Maw	2	124.50	5 240				
90.23	Sp.	4	123.43	5.514				
90.24	Comstock	1	124.80	5.470	1890.28	(13)	123°51	5".507
90.28	H.	4	123.51	5.432				
90.33	H. Σ.	4	123.26	5.580				
91.21	Sp.	4	122.43	5.527				
91.22	H.	4	122.87	5.479				
91.26	Maw	2	122.50	5.300	1891.26	(13)	122°76	5".490
91.27	H. Σ.	2	122.31	5.570				
91.65	Byers & Collins	1	125.10	5.610				
92.26	Sp.	4	122.40	5.443	1892.26	(4)	122°40	5".443
93.16	Jones	1	(115.70)	5.320				
93.21	Lewis	2	123.70	5.185	1893.24	(6.7)	122°54	5".288
93.25	Sp.	4	121.96	5.331				
94.16	H. Σ.	4	122.39	5.430				
94.16	Lovett	2	123.10	5.540	1894.19	(10)	122°46	5".405
94.24	Sp.	4	122.22	5.313				

Zu dieser Zusammenstellung ist Folgendes zu bemerken:

1. Die Gewichtsbestimmung geschah wieder nach dem in II. aufgestellten Schema. Das genügt jedenfalls für die vorliegenden Zwecke, wenngleich hierdurch die neuen mit so ausgezeichneten Hülfsmitteln ausgerüsteten Beobachter sicherlich zu kleine Gewichte bekommen haben. Bei einer definitiven Bearbeitung wird man u. A. den aus sehr zahlreichen und augenscheinlich sehr genauen Abendmitteln zusammengesetzten Jahresmitteln Schiaparelli's ein grösseres Gewicht zu geben haben. Die Jahresmittel Schiaparelli's sind der Reihe nach aus 13, 12, 14, 8, 10, 10, 14, 14 Abenden gebildet.

2. Die Reduction der auf A oder B bezogenen Messungen von C auf $\frac{A+B}{2}$ ist mit Hülfe von Annahmen über die gegenseitige Stellung von A und B erfolgt, die nicht ganz sicher sind und nicht ohne grössere Rechnungen sicher hergestellt werden konnten. Diese Ungenauigkeit, die übrigens kaum merklich sein wird, kann nur bei den Beobachtungen von H. Σ. die letzte Stelle der obigen Zahlen beeinflusst haben.

3. Was die constanten persönlichen Fehler betrifft, so wurden durch Vergleichung mit der II. S. 71 gegebenen Ephemeride folgende Correctionen angebracht:

Sp.	$-0^{\circ}.85$	$+0''.074$
H.	$+0.51$	-0.025
H. Σ.	-0.41	$+0.097$

Die letzte Beobachtung von H. Σ. scheint indessen sich dieser Correction zu widersetzen. Dieselbe ist durch eine dreijährige Pause von den früheren getrennt und besteht aus je 6 Vergleichungen von C mit A und mit B, welche vollständig übereinstimmende Mittelwerthe geben. Danach scheint es besser zu sein, diese letzte Messung von H. Σ. uncorrigirt zu lassen. Im Uebrigen tritt auf den ersten Blick ziemlich deutlich die Thatsache hervor, dass hierdurch das letzte Jahresmittel in Distanz unsicher ist, und man wird das auch in der Folge bestätigt finden.

4. Die Messungen von O. Σ. aus dem Jahre 1881 und die mit dem 30zölligen Refractor angestellten sind direct ohne Correction dem Anhange von II. entnommen worden. Die Gründe für dieses Verfahren lasse ich unerörtert, weil ein merklicher Einfluss hierdurch im Folgenden nicht hervorgerufen werden kann. Alle anderen Beobachtungen sind, wie früher, uncorrigirt geblieben.

Was die in II. und im Anschluss hieran in der vorliegenden Notiz angewandten constanten persönlichen Fehler betrifft, so geben sie nichts anderes an, als die Mittel der Abweichungen gegen die Ephemeride, welche wiederum aus provisorisch corrigirten Beobachtungen abgeleitet ist. Die Beobachtungen erscheinen hierdurch auf ein mehr oder weniger willkürliches System der Positionswinkel und Distanzen bezogen. Mit einiger Wahrscheinlichkeit wird man aber die gefundenen Correctionen als wirkliche constante persönliche Fehler betrachten dürfen, wenn das Mittel aller angebrachten Correctionen nicht merklich von Null abweicht, im anderen Falle ist das angenommene System noch nicht das normale. Die in II. und gegenwärtig benutzten Correctionen sind nun, wenn dort, wo für denselben Beobachter verschiedene Correctionen gefunden worden sind, einfache Mittelwerthe angesetzt werden (mit Ausnahme von Sp., bei welchem wegen der grossen Verschiedenheit der Instrumente dies kaum zulässig sein dürfte):

W. Σ.	$+1^{\circ}.82$	$-0''.070$
O. Σ.	-0.47	-0.125
D.	$+0.84$	-0.033
S.	$+0.02$	-0.003
Δ.	-0.26	-0.031
Mädler	$+0.30$	—
Du.	-1.56	-0.050
Sp.I	$+1.04$	$+0.004$
Engelmann	$+1.38$	$+0.217$
J.	$+0.71$	-0.103

Kaiser	$+1^{\circ}.79$	$-0''.280$
Sp. II	-0.85	$+0.074$
H.	$+0.51$	-0.025
H. Σ.	-0.41	$+0.097$
Mittel	$+0^{\circ}.35$	$-0''.024$

Nimmt man nur die am sichersten bestimmten Correctionen, nämlich: W. Σ., Δ., Sp. I, Sp. II, H., H. Σ., so ergiebt sich als Mittelwerth $+0^{\circ}.31$, $+0''.008$. Danach dürfte das System etwas zu grosse Positionswinkel angeben, während die Distanzen jedenfalls nahezu der Wahrheit entsprechen. Da aber eine constante Correction im Positionswinkel auf die Theorie keinen Einfluss übt, wird man das gewählte System als nahezu normal ansehen dürfen. Ausserdem ist diese positive Correction durch die etwas ungewöhnlich grosse Correction von W. Σ. zum grössten Theile entstanden. Jedenfalls liegt vorderhand kein Grund vor, zu bezweifeln, dass sich meine Untersuchungen in II. auf Beobachtungen stützen, die auf ein wesentlich richtiges System bezogen worden sind, wenngleich nicht ausgeschlossen ist, dass sich in der Folgezeit, wo hoffentlich recht viele der jetzt zur Verfügung stehenden grossen Fernrohre zur Ausmessung von ζ Cancri benutzt werden, eine Modification nach der einen oder anderen Seite ergeben könnte.

Die oben angeführten Jahresmittel wurden zunächst, zur Erleichterung aller Vergleichungen, auf dasselbe Zehntel des betreffenden Jahres reducirt. Es muss aber wiederholt darauf aufmerksam gemacht werden, dass die letzten Stellen, also die Hundertstel der Positionswinkelgrade und die Tausendstel der Distanzsecunden, um einige wenige Einheiten unsicher wird; das liegt in der Art ihrer Berechnung. Ebenso haben alle weiteren Rechnungen eine solche minimale, gänzlich belanglose Unsicherheit. Den 15 neu abgeleiteten Jahresmitteln habe ich nun noch die 4 zunächst vorangehenden aus II. hinzugefügt. Eine Aenderung oder Vervollständigung mit ihnen vorzunehmen, war ich nicht in der Lage.

Zuerst sollen die beobachteten Positionswinkel und Distanzen p_B und ϱ_B mit den aus der Theorie (II S. 68—71) folgenden Werthen p_R und ϱ_R verglichen werden. Die Differenzen im Sinne Beobachtung—Rechnung finden sich unter der Rubrik $B-R$ in der Zusammenstellung auf folgender Seite. Ein nur flüchtiger Blick auf diese Zahlen ergiebt nun, dass im Grossen und Ganzen der Anschluss an die Theorie zufriedenstellend ist. Zum mindesten sind die eigenthümlichen Undulationen, welche die Beobachtungen in p und ϱ ergeben, fast vollständig verschwunden. Uebrig geblieben sind Differenzen von allerdings wohl noch systematischem Betrage, die aber für den objectiven Beurtheiler absolut nichts Auffallendes mehr haben, da sowohl systematische Fehler in den Beobachtungen vorauszusetzen sind und ferner es sich ja um eine Extrapolation auf etwa 10 Jahre hinaus handelt. In Anbetracht dessen darf die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung als befriedigend bezeichnet werden. Die Summen der absoluten Differenzen betragen im Positionswinkel 8.56, in Distanz 0.769.

Die Undulationen, welche die beobachteten p und ϱ zeigen und die, wie ich in II. gezeigt habe, mit einer fast mathematischen Regelmässigkeit an eine Periode von ungefähr 18 Jahren geknüpft sind, treten deutlicher hervor, wenn man die Beobachtungen etwa durch eine Kreisbewegung darzustellen sucht. Hierbei ist wohl zu beachten, dass es sich um eine fortschreitende Veränderung der Positionswinkel um nur 9 Grad handelt. Nimmt man diese fortschreitende Veränderung von p nach II an und setzt:

$$p_0 = 145^\circ.46 - 0^\circ.513\ (t - 1850.2),\ \varrho_0 = 5''.459$$

entsprechend dem einfachen ohne Rücksicht auf die Gewichte gebildeten Mittelwerth aller ϱ_B, so geben die Differenzen $p_0 - p_B$, $\varrho_0 - \varrho_B$ nahezu das, was man als die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungen anzusehen hätte, wenn man die Annahme, dass der Stern C nicht wiederum doppelt sei, fallen

liesse. Differenzen von einem solchen Betrage sind nunmehr in der vierten Wiederholung aufgetreten. Es widerstrebt mir, angesichts dieser Zahlen die Behauptung des Herrn Burnham, dass solche Abweichungen als eine merkwürdige, nunmehr zum 4. Male in gleicher Weise auftretende Anhäufung von persönlichen Fehlern aufzufassen seien, zu kritisiren. Dergleichen Behauptungen mit einem parlamentarischen Ausdrucke zu charakterisiren ist kaum möglich.

	p_B	ϱ_B	p_R	ϱ_R	$B-R$		p_0	p_0-p_B	$\varrho_0-\varrho_B$
1876.2	130°51	5″317	130°91	5″281	− 0°40	+ 0″036	132°12	+ 1°61	+ 0″142
77.2	131.15	258	131.21	255	− 0.06	+ 0.003	131.60	+ 0.45	+ 0.201
78.2	131.42	295	131.57	259	− 0.15	+ 0.036	131.09	− 0.33	+ 0.164
79.2	132.62	258	131.86	294	+ 0.76	− 0.036	130.58	− 2.04	+ 0.201
80.2	132.25	372	131.95	351	+ 0.30	+ 0.021	130.06	− 2.19	+ 0.087
81.2	131.46	425	131.76	422	− 0.30	+ 0.003	129.55	− 1.91	+ 0.034
82.2	131.16	514	131.28	494	− 0.12	+ 0.020	129.03	− 2.13	− 0.055
83.2	129.79	597	130.54	561	− 0.75	+ 0.036	128.52	− 1.27	− 0.138
84.2	128.72	543	129.59	615	− 0.87	− 0.072	128.00	− 0.72	− 0.084
85.2	128.19	642	128.49	651	− 0.30	− 0.009	127.49	− 0.70	− 0.183
86.2	127.06	591	127.32	667	− 0.26	− 0.076	126.99	− 0.07	− 0.132
87.2	126.04	598	126.12	665	− 0.08	− 0.067	126.48	+ 0.44	− 0.139
88.2	124.38	627	124.93	642	− 0.55	− 0.015	125.96	+ 1.58	− 0.168
89.2	123.81	535	123.84	601	− 0.03	− 0.066	125.45	+ 1.64	− 0.076
90.2	123.58	511	122.91	554	+ 0.67	− 0.043	124.93	+ 1.35	− 0.052
91.2	122.80	494	122.20	475	+ 0.60	+ 0.019	124.42	+ 1.62	− 0.035
92.2	122.43	447	121.75	403	+ 0.68	+ 0.044	123.90	+ 1.47	+ 0.012
93.2	122.54	290	121.60	335	+ 0.94	− 0.045	123.39	+ 0.85	+ 0.169
94.2	122.46	404	121.72	282	+ 0.74	+ 0.122	122.89	+ 0.43	+ 0.045

Um indessen die entscheidende Thatsache deutlich vorzuführen, dass die angeführten letzten 19 Jahresmittel, bei denen so viele und ausgezeichnete Beobachter (es sei hierbei hingewiesen auf die überaus gute Uebereinstimmung, namentlich in den Positionswinkeln) mitgewirkt haben, die in den Jahresmitteln vor 1876 nicht vorkommen, mit derselben Periode übereinstimmen, die in II aus der Gesammtheit der früher verfügbaren Messungen abgeleitet worden ist, habe ich die Differenzen $p_0 - p_B$ nach der Methode des kl. Qu. durch eine, einer Kreisbewegung mit der genannten Periode entsprechenden Formel darzustellen unternommen. Es ergab sich so:

$$\text{(II)} \qquad p_0 - p_B = -0^\circ.06 + 1^\circ.918 \sin 19^\circ.947\, t + 0^\circ.137 \cos 19^\circ.947\, t$$

worin die Zeit t in Jahren von 1850.2 anzusetzen ist. Wollte man noch einen besseren Anschluss dadurch erreichen, dass man die Veränderung von p_0 etwas ändert, so wäre zu setzen

$$\text{(III)} \qquad p_0 - p_B = -0^\circ.06 - 0^\circ.681 \left(\frac{t}{10}\right) + 2^\circ.268 \sin 19^\circ.947\, t + 0^\circ.286 \cos 19^\circ.947\, t$$

In der folgenden Tabelle sind die nach den Formeln gerechneten Werthe der Positionswinkel unter II bezw. III angegeben, ferner sind nunmehr die übrig bleibenden Fehler unter Δ bezw. Δ_1 angeführt. Die gewonnene Darstellung ist, wie ja gar nicht anders zu erwarten war, eine zufriedenstellende. Der systematische Charakter der Differenzen kann zum Theil gewiss durch eine mehr ausgearbeitete Theorie, ähnlich etwa der von mir früher dargestellten und einer mit Rücksicht auf die Gewichte durchgeführten Rechnung fortgeschafft werden, zum grösseren Theil sprechen sich hier eben wirklich jene rein persönlichen Beobachtungsfehler aus. Ich habe auf diesen Punkt in meinen früheren Arbeiten stets nachdrücklich hingewiesen. Für die Summen der absoluten

Werthe der Δ und Δ_1 ergiebt sich 6°05 bezw. 5°58. Man wird demnach kaum nöthig haben, der Formel III etwa einen Vorzug vor II zu geben.

	$p_0 - p_B$	II	Δ	III	Δ_1	a	Δ_2
1876.2	+ 1°61	+ 0°51	+ 1°10	+ 1°10	+ 0°51	5".493	+ 0".031
77.2	+ 0.45	− 0.15	+ 0.60	+ 0.25	+ 0.20	439	− 0.023
78.2	− 0.33	− 0.49	+ 0.16	− 0.21	− 0.12	465	+ 0.003
79.2	− 2.04	− 1.26	− 0.78	− 1.29	− 0.75	391	− 0.071
80.2	− 2.19	− 1.77	− 0.42	− 1.81	− 0.38	456	− 0.006
81.2	− 1.91	− 1.97	+ 0.06	− 2.08	+ 0.17	449	− 0.013
82.2	− 2.13	− 1.94	− 0.19	− 2.15	+ 0.02	475	+ 0.013
83.2	− 1.27	− 1.69	+ 0.42	− 1.80	+ 0.53	499	+ 0.037
84.2	− 0.72	− 1.24	+ 0.52	− 1.30	+ 0.58	399	− 0.063
85.2	− 0.70	− 0.65	− 0.05	− 0.45	− 0.25	468	+ 0.006
86.2	− 0.07	0	− 0.07	+ 0.07	− 0.14	410	− 0.052
87.2	+ 0.44	+ 0.66	− 0.22	+ 0.77	− 0.33	429	− 0.033
88.2	+ 1.58	+ 1.22	+ 0.36	+ 1.35	+ 0.23	490	+ 0.028
89.2	+ 1.64	+ 1.63	+ 0.01	+ 1.73	− 0.09	449	− 0.013
90.2	+ 1.35	+ 1.84	− 0.49	+ 1.87	− 0.52	485	+ 0.023
91.2	+ 1.62	+ 1.82	− 0.20	+ 1.73	− 0.11	534	+ 0.072
92.2	+ 1.47	+ 1.60	− 0.13	+ 1.32	+ 0.15	547	+ 0.085
93.2	+ 0.85	+ 1.12	− 0.27	+ 0.70	+ 0.15	434	− 0.028
94.2	+ 0.43	+ 0.43	0	+ 0.08	+ 0.35	(582)	(+0.120)

Eine nicht unwichtige Controlle, wenn es derselben überhaupt noch bedarf, liefert nunmehr die Behandlung der Distanzen. Die Formel II zieht natürlich dann, wenn angenommen wird, dass C eine Kreisbahn um einen dunklen Begleiter beschreibt, ganz bestimmte Veränderungen der Distanzen nach sich. Nennt man a den Radius der Kreisbahn, welchen der Schwerpunkt von C und seinem Begleiter um $\frac{A+B}{2}$ beschreibt, so kann man aus jedem ϱ_B einen Werth von a rechnen. Die angeführten a nebst den Differenzen $\Delta_1 = 5".462 - a$, wobei 5".462 den einfachen ohne Rücksicht auf die Gewichte genommenen Mittelwerth darstellt, liefern nun wieder eine und zwar eine ganz unabhängige Be-

stätigung der Theorie. Wenn man die geringen Abweichungen ($\Sigma \Delta_2 = 0''.720$ bezw. $0''.600$) überblickt, so wird man nicht zweifelhaft sein können, dass alle grösseren regelmässigen Undulationen in den Distanzen vollkommen verschwunden sind. Ich habe in dieser Controlle in meinen beiden früheren Abhandlungen stets eine sehr gewichtige Stütze erblickt für die fast apodiktische Sicherheit der Annahme, dass C einen dunklen Begleiter haben müsse. Ich kann auch jetzt nur wiederholen, was ich über jene Annahme in II (S. 14) gesagt habe: „Ich für meinen Theil stehe nicht an, derselben eine Sicherheit zuzusprechen, die so gross ist, wie sie wenigen Erklärungsversuchen in der Stellarastronomie zukommt, die nicht durch den blossen Augenschein sofort bewiesen werden können."

Zum Schlusse muss ich nochmals, obwohl nur ungern, auf Herrn Burnham zurückkommen. Nachdem ich die Angriffe des genannten Herrn ausführlich zurückgewiesen[1]) und gezeigt hatte, welche sonderbaren Vorstellungen er sich über systematische Beobachtungsfehler gebildet hat, hat es Herr Burnham für gut befunden in No. 120 der Zeitschrift „Astronomy and Astrophysics" nicht nur seine Behauptungen zu wiederholen, sondern dies in einem Tone zu thun, den ich als ganz ungehörig auf das Entschiedenste zurückweisen muss. Auf seine Argumente nochmals einzugehen, dazu liegt auch nicht die mindeste Veranlassung vor, da diese durch meine früheren Aufsätze vollständig widerlegt sind. Ich kann mir aber nicht versagen, Nr. III der zuletzt genannten Burnham'schen Notiz hier abzudrucken, weil die Eigenart ihres Verfassers hierdurch sich von selbst kennzeichnet. „It is evident that Professor Seeliger has had little practical experience in double stars work, or he would not have criticised my remark that the close pair of ε Hydrae could

1) Ueber Herrn Burnham's „Invisible Double Stars" und insbesondere über ε Hydrae. Astron. Nachrichten, Band 132.

not possibly affect the measures of *C.* The truth of this statement must be so obvious to every practical astronomer who is accustomed to use the micrometer that it can hardly be considered a debateable question.“ Ich kann nur mein lebhaftes Bedauern darüber aussprechen, dass ein praktischer Astronom eine so auffallende Unkenntniss der Umstände besitzt, welche systematische Abweichungen nothwendiger Weise erzeugen müssen, und noch mehr muss ich es bedauern, dass er diese Unkenntniss in so überaus anspruchsvoller Form zur Schau trägt. Schon hieraus folgt, dass ein wissenschaftlicher Gewinn aus einer Auseinandersetzung mit Herrn Burnham über die vorliegenden Fragen nicht hervorgehen kann. Ich werde deshalb auch etwaige weitere Bemerkungen dieses Herrn über ζ Cancri und meine Arbeiten, als für die Sache gleichgültig, in Zukunft unberücksichtigt und erneute Angriffe unbeantwortet lassen.

Ueber eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz'schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell-schen Elektrodynamik entspricht.

Von Dr. J. R. Schütz.

(Eingelaufen 2. Juni.)

1. Wir setzen eine unendlich ausgedehnte reibungslose Flüssigkeitsmasse voraus, der wir vorläufig die Beschränkung der Incompressibilität noch nicht auferlegen wollen; wir betrachten vorerst nur solche Gebiete derselben, in welchen die 3 rechtwinkligen Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 eindeutige und mit allen ihren Derivirten endliche und stetige Funktionen der 3 rechtwinkligen Raumcoordinaten x, y, z sind. Im Unendlichen soll die Flüssigkeit ruhen.

Ueberall dort, wo die Grössen u_1, v_1, w_1 eine Potentialfunktion Φ_1 (das Geschwindigkeitspotential) besitzen, werden die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \qquad 1)$$

Dort wo die Potentialfunktion Φ_1 zu existiren aufhört, werden gewisse Bewegungen auftreten, die v. Helmholtz in seiner Abhandlung „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen etc". Crelle's Journal, Bd. 55, S. 25—55, 1858 unter dem Namen der „Wirbelbewegungen" eingeführt hat.

2. Wirbelpotential nenne ich eine Funktion Φ_2, deren Ableitungen nach den Coordinaten die nach diesen geschätzten Wirbelgeschwindigkeiten geben. Die Wirbelgeschwindigkeiten u_2, v_2, w_2 sind definirt durch die Gleichungen

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right), \quad v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right),$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \qquad 2)$$

Dort wo ein Wirbelpotential existirt, wird sein

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \qquad 3)$$

An allen Stellen aber, wo diese Potentialfunktion zu existiren aufhört, setzen wir

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right), \quad v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\right),$$

$$w_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \qquad 4)$$

Die Grössen u_3, v_3, w_3 haben eine einfache und anschauliche physikalische Bedeutung, von der später noch die Rede sein wird; wir wollen sie die „Strömungsgeschwindigkeiten zweiter Ordnung" nennen. Die Grössen u_1, v_1, w_1 sind dann für uns die Strömungsgeschwindigkeiten erster Ordnung.

Es wird Stellen geben können, woselbst die Grössen u_3, v_3, w_3 sich als Ableitungen einer Funktion Φ_3 darstellen lassen. Wir nennen diese Funktion das „Strömungspotential zweiter Ordnung" (Φ_1 ist dann für uns das Strömungspotential erster Ordnung).

An allen diesen Stellen wird sein

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} = \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \qquad 5)$$

Dort wo Φ_3 zu existiren aufhört, setzen wir wieder

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z}\right), \quad v_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x}\right),$$

$$w_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \qquad 6)$$

Die Grössen u_4, v_4, w_4 nennen wir die Wirbelgeschwindigkeiten zweiter Ordnung und eine etwa existirende Potentialfunktion Φ_4 derselben das „Wirbelpotential zweiter Ordnung". In diesem Sinne sind dann u_2, v_2, w_2, bezw. Φ_2 die Wirbelgeschwindigkeiten bezw. das Wirbelpotential erster Ordnung.

Man sieht schon, wie sich der Faden weiter spinnt. Allgemein zu reden, nennen wir die Grössen u_{2n-1}, v_{2n-1}, w_{2n-1}, Φ_{2n-1} die Strömungsgeschwindigkeiten und das Strömungspotential $n$ter Ordnung und die Grössen u_{2n}, v_{2n}, w_{2n}, Φ_{2n} die Wirbelgeschwindigkeiten und das Wirbelpotential $n$ter Ordnung.

3. Die formale Uebereinstimmung der Differenzialgleichungen 4) und 6) lässt erwarten, dass auch die Integraleigenschaften der Wirbel und Strömungen höherer Ordnung wesentlich übereinstimmen. Es wird sich daher zur Abkürzung empfehlen, dass wir uns für beide zuweilen eines gemeinsamen Namens bedienen, und wir wählen hiefür, nicht ohne die Absicht, an den verwandten Quaternionen-Begriff des curl (vgl. Boltzmann, Vorl. II pag. 3) anzuklingen, den Ausdruck „Quirl".

Demnach nennen wir die Grössen u_k, v_k, w_k die nach den 3 rechtwinkligen Coordinatenaxen geschätzten Quirlgeschwindigkeiten $k$ter Ordnung und Φ_k das Quirlpotential $k$ter Ordnung, und erinnern uns, wenn erforderlich, daran, dass diese Grössen Strömungsgeschwindigkeiten bezw. ein Strömungspotential bedeuten, wenn k ungerade, dagegen Wirbelgeschwindigkeiten bezw. ein Wirbelpotential, wenn k gerade ist.

Man hat für die Quirlgeschwindigkeiten $k$ter Ordnung die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{k-1}}{\partial y} - \frac{\partial v_{k-1}}{\partial z}\right) \\ v_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} - \frac{\partial w_{k-1}}{\partial x}\right) \\ w_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{k-1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Für den Fall der Existenz eines Quirlpotentials Φ_k ist

$$u_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}, \quad v_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}, \quad w_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \qquad 8)$$

und

$$\frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial z} = \frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial w_k}{\partial x} = \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y} = 0 \qquad 9)$$

Es lassen sich über die Wechselbeziehungen der Quirl verschiedener Ordnung zu einander eine grosse Reihe von Sätzen ableiten, von denen wir hier nur solche anführen wollen, die für unsere späteren Entwicklungen von einiger Bedeutung sind.

4. Existirt in einem Bereiche R ein Quirlpotential $k$ter Ordnung als variable Funktion der Coordinaten, so sind die Quirlpotentiale von höherer Ordnungszahl in demselben Bereiche constante Grössen, Quirlpotentiale von niederer Ordnungszahl aber können in demselben Bereiche nicht existiren. Denn es ist in diesem Bereiche nach Gl. 9)

$$u_{k+1} = v_{k+1} = w_{k+1} = 0, \text{ also } \Phi_{k+1} = \text{const.}$$

und dasselbe gilt natürlich auch von den analogen Grössen noch höherer Ordnungszahl. Der zweite Theil des obigen Satzes ist eine nothwendige Consequenz des ersten Theiles.

Man kann daher aus der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse solche Bereiche R_1 hervorheben, die lediglich ein Quirlpotential erster Ordnung Φ_1 (d. i. ein Geschwindigkeitspotential) besitzen, dann solche Bereiche R_2, die lediglich ein Quirlpotential zweiter Ordnung Φ_2 (d. i. ein Wirbel-

potential 1. Ordnung), dann solche R_3, die lediglich ein Quirlpotential 3. Ordnung (d. i. ein Geschwindigkeitspotential 2. Ordnung) bis zu solchen Bereichen R_k, die lediglich ein Quirlpotential $k$ter Ordnung besitzen. Wir können jetzt den obigen Satz auch so aussprechen:

In einem Bereiche R_k coexistiren nothwendig sämmtliche Arten von Quirlbewegungen, deren Ordnungszahl kleiner ist als k, und es existirt darin keine Quirlbewegung von einer grösseren Ordnungszahl. (Satz I.)

5. Jedes Quirlpotential Φ_k $(k > 1)$ genügt der Laplace'schen Differentialgleichung (Satz II). Aus Gl. 7 ergibt sich (für $k > 1$)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} = 0 \qquad 10)$$

Für den Fall der Existenz einer Potentialfunktion kann diese Gleichung so geschrieben werden

$$\Delta \Phi_k = 0 \qquad 11)$$

Die Gleichung 10) gilt nicht für $k = 1$; nur, wenn die Flüssigkeit incompressibel ist, hat man auch

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \qquad 12)$$

Es müssen daher alle nachfolgenden Sätze, insoweit sie sich auf den Eingangs dieses Artikels angegebenen Satz stützen, entweder unter der beschränkenden Annahme $k > 1$, oder unter der Voraussetzung der Incompressibilität der Flüssigkeit verstanden werden.

6. Es kann nicht ein einziger Bereich R_k die ganze unendliche Flüssigkeitsmasse erfüllen. (Satz III.) Denn man hätte dann eine Funktion Φ_k, welche im ganzen unendlichen Raume der Gleichung $\Delta \Phi_k = 0$ genügte und im Unendlichen, da die Flüssigkeit daselbst als ruhend vorausgesetzt wird, gegen einen constanten Werth C limitirte. Genau so gross

würde daher auch das arithmetische Mittel der Funktionswerthe von Φ_k auf der Oberfläche einer Kugel sein, die man mit unendlich grossem Radius um einen im Endlichen gelegenen Punkt P beschriebe. Gemäss einem nach Herrn Riemann benannten Satze der Potentialtheorie müsste daher auch im Punkte P, und weil dieser beliebig gewählt wurde, überall im Endlichen $\Phi_k = C$ sein. Nach Satz I müsste demnach die Ordnungszahl des Bereiches R_k kleiner sein als k und sie könnte, da k beliebig ist, nur gleich 1 sein, aber auch dies nur dann, wenn die Flüssigkeit compressibel ist.

7. Es kann nicht ein Bereich R_k einem Bereiche R_m unmittelbar benachbart sein, es sei denn $k = m$. (IV.)

Denn setzen wir etwa willkürlich $m > k$, dann würde nach Satz I das Quirlpotential Φ_k im Bereiche R_k existiren, im Bereiche R_m aber zu existiren aufhören. Dagegen würde das Quirlpotential Φ_m sowohl im Raume R_m als auch im Raume R_k existiren, im letzteren Bereiche aber als Constante. Da die beiden Bereiche einander unmittelbar benachbart sein sollen, so muss ein Theil ihrer Begrenzungsflächen beiden gemeinsam sein. Denkt man sich diesen Theil entfernt, so erhielte man einen grösseren Bereich, in welchem eine Funktion Φ_m existirte, die überall der Laplace'schen Differentialgleichung genügte und in einem endlichen Theile des Bereiches einen constanten Werth C besässe. Wir können dann eine Kugelfläche so construiren, dass deren Mittelpunkt in diesem Bereiche, in welchem $\Phi_m = C$ ist, liegt, und die zum Theil in diesen Bereich selbst fällt, zum Theile aber in eine Region taucht, in der Φ_m grösser (oder kleiner) als C wird. Dann müsste aber auch das arithmetische Mittel der Funktionswerthe von Φ_m auf der Kugeloberfläche grösser (oder kleiner) als C sein, und dies wäre ein Widerspruch gegen den Riemann'schen Satz.

8. Es muss in der bewegten Flüssigkeitsmasse Bereiche, mindestens aber einen geben, innerhalb

deren überhaupt kein Quirlpotential irgend welcher Ordnungszahl existirt. (V.)

Dieser Satz ist eine nothwendige Consequenz der Sätze III und IV. Wir wollen diese Gebiete die „charakteristischen Schichten" nennen; nach Satz IV muss jeder Bereich R_k von einer solchen charakteristischen Schicht vollständig eingehüllt sein. Sie soll im Allgemeinen als von endlicher Dicke vorausgesetzt sein. An Stellen, wo sie unendlich dünn wird, degenerirt sie zu einer wahren Discontinuität; solche und andere Discontinuitäten wollen wir, wie schon Eingangs im Artikel 1 bemerkt ist, von unserer Betrachtung ausschliessen. Wir denken uns hiezu jede derselben einzeln von einer sie ganz umschliessenden, einfach zusammenhängenden Fläche umgeben, die wir passend „Discontinuitätshülle" nennen können. Die Flüssigkeit, die sich ausserhalb dieser Discontinuitätshüllen befindet, ist für uns die „betrachtete Flüssigkeitsmasse".

9. Ein für uns sehr wichtiger Satz ist der folgende: Die Bewegung der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse ist zu irgend einem Zeitmomente überall eindeutig bestimmt, wenn in demselben Zeitmomente die Quirlgeschwindigkeiten irgend einer beliebigen Ordnungszahl n in allen charakteristischen Schichten gegeben sind und gleichzeitig auch die Bewegung der Flüssigkeit an den Discontinuitätshüllen vorgeschrieben ist. (VI.)

Man erhält aus den Gleichungen 7), indem man in denselben die Grössen u_{k-1}, v_{k-1}, w_{k-1} durch die Grössen u_{k-2}, v_{k-2}, w_{k-2} ersetzt, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial x} - \Delta u_{k-2}\right) \\ v_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial y} - \Delta v_{k-2}\right) \\ w_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial z} - \Delta w_{k-2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

Hiebei ist

$$\Theta_{k-2} = \frac{\partial u_{k-2}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k-2}}{\partial y} + \frac{\partial w_{k-2}}{\partial z} \qquad 14)$$

Nach Gleichung 10) verschwindet dieser Ausdruck für $k > 3$; also ist für $k > 1$ und bei incompressibeln Flüssigkeiten auch für $k = 1$

$$u_{k+2} = -\frac{1}{4} \Delta u_k, \quad v_{k+2} = -\frac{1}{4} \Delta v_k, \quad w_{k+2} = -\frac{1}{4} \Delta w_k \qquad 15)$$

Speziell in Bereichen von der Ordnungszahl k ist daher mit Rücksicht auf Satz I

$$\Delta u_{k-1} = 0, \quad \Delta v_{k-1} = 0, \quad \Delta w_{k-1} = 0 \qquad 16)$$

und auch

$$\Delta u_k = 0, \quad \Delta v_k = 0, \quad \Delta w_k = 0 \qquad 17)$$

Wir beweisen nun zunächst folgenden Hilfssatz: Sind in allen Punkten der betrachteten Flüssigkeitsmasse die Quirlgeschwindigkeiten von der Ordnungszahl n, also u_n, v_n, w_n, in einem bestimmten Augenblicke gegeben, und ist gleichzeitig die Bewegung der Flüssigkeit an den Discontinuitätshüllen vorgeschrieben, so sind für denselben Augenblick auch die Quirlgeschwindigkeiten $(n-1)$ter Ordnung u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1} überall eindeutig bestimmt. (VIa.)

Zunächst ist klar, dass auch überall die Quirlintensitäten $(n+1)$ter Ordnung, die ja aus jenen $n$ter Ordnung durch eindeutige Differenzation hervorgehen, gegeben sind. Nun ist nach Gleichung 15)

$$\Delta u_{n-1} = -4 u_{n+1}, \; \Delta v_{n-1} = -4 v_{n+1}, \; \Delta w_{n-1} = -4 w_{n+1}; \qquad 18)$$

gäbe es noch 3 andere Funktionen $\mathfrak{u}_{n-1}$, $\mathfrak{v}_{n-1}$, $\mathfrak{w}_{n-1}$, welche denselben Differentialgleichungen

$$\Delta \mathfrak{u}_{n-1} = -4 u_{n+1}, \text{ etc.} \qquad 18a)$$

genügten, so wären $u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1}$, $v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1}$, $w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1}$ drei neue Funktionen, welche — wie sich durch Subtraktion

der Gleichung 18) und 18a) ergibt — in der ganzen betrachteten Flüssigkeit die Laplace'schen Differentialgleichungen befriedigen und an den Discontinuitätshüllen, sowie im Unendlichen verschwinden. Die — zufolge des Dirichlet'schen Principes einzige — Lösung hiefür ist

$$u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1} = v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1} = w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1} = 0.$$

Es sind demnach die Quirlgeschwindigkeiten (n—1) ter Ordnung und, da sich dieses Beweisverfahren beliebig oft wiederholen lässt, auch jene von beliebig anderer Ordnungszahl, demnach die gesammte Bewegung der Flüssigkeit eindeutig bestimmt.

Sind nun nicht in der ganzen Flüssigkeit, sondern bloss an den charakteristischen Stellen die Grössen u_n', v_n', w_n' gegeben, so lässt sich dieser Fall immer auf den durch den Hilfssatz präcisirten Fall zurückführen. Denn sei etwa R_k derjenige Bereich, der unter allen Bereichen R_1 bis R_k die höchste Ordnungszahl k hat, so bilden wir, wenn $n \leq k$ ist, aus den Grössen u_n', v_n', w_n' durch fortgesetztes Differenziren nach dem Schema der Gleichung 7) die Grössen

$$u_{k+1}', \quad v_{k+1}', \quad w_{k+1}' \qquad 19)$$

Da nun die Quirlgeschwindigkeiten $(k+1)$ ter Ordnung in der ganzen Flüssigkeitsmasse, mit Ausschluss der charakteristischen Schichten, verschwinden, in diesen letzteren aber die gegebenen Werthe 19) haben, so darf man sie in der gesammten Flüssigkeitsmasse als gegeben betrachten.

Ist aber $n > k$, dann sind ohnehin schon die Grössen u_n, v_n, w_n in allen Bereichen R_1 bis R_k gleich Null, also gleichfalls in der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse gegeben.

10. Ein specieller Fall des vorigen Satzes ist der folgende: Sind in einem Augenblicke die Geschwindigkeiten u_1', v_1', w_1' in allen charakteristischen Schichten sowie an den

Discontinuitätshüllen gegeben, so sind für denselben Augenblick die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 überall eindeutig bestimmt. Es sollen hier die drei letzteren Grössen aus den drei ersteren berechnet werden.

Es sei wieder R_k jener Quirlbereich, der die höchste Ordnungszahl k besitzt. Die auf die Zahl k zunächst folgende ungerade Zahl bezeichnen wir mit $2i+1$; sie ist — unabhängig davon ob k selbst eine gerade oder ungerade Zahl ist — jedenfalls durch die Formel gegeben

$$2i+1 = k + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k,$$

woraus folgt

$$i = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^k \qquad 20)$$

Durch i-malige Anwendung der Δ-Operation auf die gegebenen Funktionen u_1', v_1', w_1' erhält man gemäss Formel 15) — wenn wir uns für die i-malige Anwendung der gedachten Operation des Symboles Δ^i bedienen —

$$\Delta^i u_1' = (-4)^i u_{2i+1}', \quad \Delta^i v_1' = (-4)^i v_{2i+1}', \quad \Delta^i w_1' = (-4)^i w_{2i+1}' \qquad 21)$$

Ganz ebenso würde man durch i-malige Anwendung der Δ-Operation auf die zu suchenden Funktionen u_1, v_1, w_1 erhalten

$$\Delta^i u_1 = (-4)^i u_{2i+1} \text{ etc.} \qquad 21\text{a})$$

Nun sind aber die Grössen u_{2i+1}' und u_{2i+1} nicht nur in den charakteristischen Schichten, sondern auch in allen Quirlbereichen R_1 bis R_k einander gleich, weil sie daselbst — wegen $2i+1 > k$ — überall verschwinden. Also erhält man die Differentialgleichungen

$$\Delta^i u_1 = \Delta^i v_1', \quad \Delta^i v_1 = \Delta^i v_1', \quad \Delta^i w_1 = \Delta^i w_1' \qquad 22)$$

Die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\iiint\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\iiint\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots \\
&\quad \iiint\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\iiint\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\,\Delta^i u_1' + \frac{d}{dx}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}, \\
v_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\iiint\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\iiint\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots \\
&\quad \iiint\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\iiint\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\,\Delta^i v_1' + \frac{d}{dy}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}, \\
w_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\iiint\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\iiint\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots \\
&\quad \iiint\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\iiint\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\,\Delta^i w_1' + \frac{d}{dz}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}.
\end{aligned}\right\}\quad 23)$$

Hiebei ist

$$\left.\begin{aligned}
r_{1,2} &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \\
&\vdots \\
r_{i-1,i} &= \sqrt{(x_{i-1}-x_i)^2+(y_{i-1}-y_i)^2+(z_{i-1}-z_i)^2} \\
r_i &= \sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2} \\
\text{und}\quad & \\
r_{ds} &= \sqrt{(x_{ds}-x)^2+(y_{ds}-y)^2+(z_{ds}-z)^2}
\end{aligned}\right\}\quad 24)$$

Alle dreifachen Integrale sind über die gesammte betrachtete Flüssigkeitsmasse zu erstrecken, das einfache Integral $\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}$ aber über die Oberfläche derselben, sowie über alle Discontinuitätshüllen.

G ist eine willkürliche Funktion, die so bestimmt werden muss, dass die Auswerthung der Gesammtintegrale für alle Punkte dieser Oberflächen die an denselben vorgeschriebenen Werthe von u_1, v_1, w_1 ergibt.

v. Helmholtz hat in seiner Eingangs erwähnten Abhandlung über die Wirbelbewegung eine interessante Analogie entwickelt, die zwischen dieser Art hydrodynamischer

Bewegung und den elektrodynamischen Erscheinungen besteht. Die Gleichungen 23) lehren, dass man eine unendliche Mannigfaltigkeit solcher Analogieen angeben kann. Bevor wir auf dieselben mit einigen Worten eingehen, wollen wir noch den Begriff der „Wirbellinie" verallgemeinern.

11. Wir verstehen unter einer „Quirllinie $k$ter Ordnung" eine Curve, welche der Differentialgleichung genügt

$$d x : d y : d z = u_k : v_k : w_k, \qquad 25)$$

und unter einem „Quirlfaden" einen unendlich dünnen Faden, welcher aus der Flüssigkeit ausgeschnitten wird, wenn man durch alle Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche die Quirllinien zieht. Auch erinnern wir uns wieder, dass wir es mit Stromlinien, bezw. -Fäden zu thun haben, wenn k ungerade ist, dagegen mit Wirbellinien bezw. -Fäden, wenn k gerade ist.

Durch Anwendung des Green'schen Satzes auf die Gleichung 10) erhalten wir

$$\int \nu_k \, d q = 0 \qquad 26)$$

Hiebei bezeichnet ν_k die normal zum Oberflächenelemente $d q$ geschätzte Componente der Quirlgeschwindigkeit $k$ter Ordnung. Wir nennen die Gleichung 26) die allgemeine Continuitätsgleichung der Quirlbewegungen; sie lehrt, dass kein Quirlfaden beliebiger Ordnungszahl inmitten der Flüssigkeit enden kann und dass für einen und denselben Quirlfaden das Produkt aus seinem Querschnitt und der Quirlgeschwindigkeit

$$\nu_k \cdot d q = i_k = \text{constans} \qquad 27)$$

für seine ganze Erstreckung einen constanten Werth behalten muss.

12. Um uns nun die erwähnte unendliche Mannigfaltigkeit der elektrodynamischen Analogieen an einem Beispiele

zu versinnlichen, wollen wir annehmen, es sei ein aus der betrachteten Flüssigkeitsmasse herausgetheilter zweifach zusammenhängender Raum mit lauter Quirlfäden $k$ter Ordnung so erfüllt, dass er einen Quirlbereich R_k (im Sinne des Artikels 4) darstelle. Gemäss Artikel 7 und 8 muss dieser Quirlbereich zunächst von einer charakteristischen Schicht S umgeben sein, von welcher wir annehmen wollen, dass ihre Dicke sehr klein gegenüber den Dimensionen des Bereiches R_k ist. Die ganze übrige betrachtete Flüssigkeitsmasse soll ein Bereich R_{k-1} von der nächstniederen Ordnungszahl sein. Bezeichnen wieder u_k, v_k, w_k die Quirlgeschwindigkeiten im Bereiche R_k und u_k', v_k', w_k' dieselben Grössen in der charakteristischen Schicht, so ist für alle Punkte der betrachteten Flüssigkeitsmasse (die wir zur Vereinfachung so gross voraussetzen wollen, dass wir die Randbedingungen vernachlässigen können)

$$u_{k-2} = \frac{1}{\pi}\iiint \frac{u_k\,dx\,dy\,dz}{r} + \frac{1}{\pi}\iiint \frac{u_k'\,dx\,dy\,dz}{r}$$

Das erste Integral ist über den Bereich R_k zu erstrecken, das zweite über die charakteristische Schicht S. Wir wollen annehmen, dass letztere so dünn ist, dass der Beitrag, den das zweite Integral liefert, gegenüber dem des ersten verschwindet. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} u_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\iiint \frac{u_k\,dx\,dy\,dz}{r} \\ v_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\iiint \frac{v_k\,dx\,dy\,dz}{r} \\ w_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\iiint \frac{w_k\,dx\,dy\,dz}{r} \end{aligned}\right\} \qquad 28)$$

Wir führen nun statt des Volumelements $dx\,dy\,dz$ das Produkt $dq \cdot ds$ ein, d. i. jenes Volum, welches ein Längenelement ds des Quirlfadens vom Querschnitte dq besitzt. Ferner setzen wir

$$u_k = v_k \cdot \alpha, \quad v_k = v_k \cdot \beta, \quad w_k = v_k \cdot \gamma,$$

wobei v_k die resultirende Quirlgeschwindigkeit und α, β, γ die Richtungscosinus des ds sind.

Berücksichtigen wir endlich noch, dass das Produkt $v_k \cdot dq$ für die ganze Erstreckung des Wirbelfadens einen constanten Werth i_k besitzt (Gleichung 27), so lauten die Gleichungen 28) jetzt

$$u_{k-2} = \int i_k ds \cdot \alpha \frac{1}{r}, \quad v_{k-2} = \int i_k ds \cdot \beta \frac{1}{r}, \quad w_{k-2} = \int i_k ds \cdot \gamma \frac{1}{r}$$

Hieraus erhalten wir für u_{k-1}

$$u_{k-1} = \int i_k ds \left[\gamma \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} - \beta \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right]$$

oder, wenn φ, χ, ψ die Richtungscosinus der Geraden r bezeichnen,

$$u_{k-1} = -\int i_k \frac{ds}{r^2} [\gamma\chi - \beta\psi]$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist gleich dem Produkte $\sin(ds, r) \cdot \cos(n, x)$, wo n die auf ds und r senkrecht stehende Richtung ist; also ist

$$u_{k-1} = \int \frac{i_k\, ds \cdot \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, x), \quad \text{und analog}$$

$$v_{k-1} = \int \frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, y),$$

$$w_{k-1} = \int \frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, z).$$

Man kann diese Formeln so aussprechen: Jedes Element ds eines Quirlfadens von der Ordnungszahl k bedingt in jedem Theilchen der Flüssigkeitsmasse eine Quirlgeschwindigkeit von der Ordnungszahl $(k-1)$, deren Grösse gleich dem Ausdrucke

$$\frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \qquad 29)$$

ist, und deren Richtung n senkrecht zu jener Ebene steht, die durch das Fadenelement ds und das betrachtete Flüssigkeitstheilchen bestimmt ist.

13. Es besteht also zwischen den Quirllinien $k$ter und $(k-1)$ter Ordnung genau dieselbe Wechselbeziehung, die auch zwischen den elektrischen Stromlinien und den magnetischen Kraftlinien statt hat. (Vgl. hiezu Boltzmann, Vorlesungen I pag. 90.) Wäre etwa der Bereich R_k ein metallischer Leiter, innerhalb dessen das Strompotential Φ_k bestünde, so würde die hiedurch bedingte elektrische Strömung im Aussenraum eine Vertheilung der magnetischen Kraftlinien hervorrufen, die sich der Grösse und Richtung nach vollkommen mit der Vertheilung der Quirllinien $(k-1)$ter Ordnung im Bereiche R_{k-1} decken würde.

Es entspricht diese Analogie genau jener, welche v. Helmholtz a. a. O. abgeleitet hat und welche man hier erhält, wenn man $k = 2$ setzt. Für $k = 3$ erhält man das hydrodynamische Bild, welches Boltzmann in den Sitzungsberichten der bayerischen Akademie[1]) 1892 pag. 279 zur Maxwell'schen Elektrodynamik in Analogie gesetzt hat. Mit Bezug auf diese letztere Abhandlung, welche diese Analogie insbesonders auch für quasielastische Media mechanisch ausbaut, sei hier die übrigens selbstverständliche Bemerkung gemacht, dass unsere bisherigen Betrachtungen, da sie ja rein geometrischer Natur sind und desshalb jedweder physikalischen Voraussetzung entbehren können, natürlich auf jedes beliebige continuirliche Medium anwendbar sind.

14. Wir wollen aber sogleich eine andere wesentlich mechanische Analogie ableiten, welche die verwandtschaft-

1) Abgedruckt in Wiedemann's Annalen, Bd. 48 pag. 78.

lichen Beziehungen zwischen den allgemeinen Quirlbewegungen und den elektrodynamischen Phänomenen sehr enge knüpft.

Wir gehen dabei von den Integralen der Gleichung 23) aus; doch machen wir auch hier wieder die vereinfachende Annahme, dass die betrachtete Flüssigkeitsmasse so gross ist, dass wir die Oberflächenbedingungen vernachlässigen dürfen, sowie dass die charakteristischen Schichten im Vergleiche zu den Dimensionen der von ihnen umhüllten Quirlbereiche so dünn sind, dass ihre Beiträge in die Bewegung der betrachteten Flüssigkeitsmasse verschwindend klein sind. Wir behandeln den Fall, dass in der Flüssigkeit neben Quirlbereichen beliebig anderer Ordnungszahlen sich zwei Quirlbereiche R_k und R_k' von der Ordnungszahl k vorfinden, und es sei k die grösste unter den vorhandenen Ordnungszahlen. Φ_k und Φ_k' seien die Quirlpotentiale in diesen Bereichen, ν_k und ν_k' die Quirlgeschwindigkeiten in denselben und u_k, v_k, w_k, beziehlich u_k', v_k', w_k' deren Componenten.

Hier haben wir nun zum erstenmale zwischen den Strömungen und den Wirbeln höherer Ordnung zu unterscheiden. Wir wollen vorerst den einfacheren Fall betrachten und annehmen, es sei k eine ungerade Zahl $2i+1$. Wir haben es also mit Strömungen zu thun.

Es seien u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeiten, welche irgend ein Flüssigkeitstheilchen $(dx \cdot dy \cdot dz)$ haben würde, wenn bloss der eine Quirlbereich R_k, und u_1', v_1', w_1', jene, wenn bloss der zweite Quirlbereich R_k' vorhanden wäre. Die Geschwindigkeiten, die dasselbe Flüssigkeitstheilchen bei der Coexistenz beider Quirlbereiche R_k und R_k' hat, sind dann wegen der Linearität der Gleichungen 21a)

$$u_1 + u_1',\ v_1 + v_1',\ w_1 + w_1' \qquad 30)$$

Es ist noch wichtig, zu bemerken, dass die Grössen u_k, v_k, w_k bei gegebener Configuration der Systeme vollkommen unabhängig von den Grössen u_k', v_k', w_k' sind, so dass,

wenn z. B. bloss der eine Quirlbereich R_k' existiren würde, an den Stellen, wo sich der von diesen weggedachte Quirlbereich R_k befindet, die Grössen u_k, v_k, w_k sämmtlich gleich Null wären, und umgekehrt.

15. Unter all den Voraussetzungen des vorhergehenden Artikels erhalten wir für u_1 in Anlehnung an Gleichung 23) das Integral

$$u_1 = \frac{1}{\pi} \int\int\int \frac{dx_i\, dy_i\, dz_i}{r_i} \cdots\cdots$$
$$\int\int\int \frac{dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{2,3}} \int\int\int \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, u_k}{r_{1,2}} \qquad 31)$$

Um das letzte dreifache Integral in ein Linienintegral zu verwandeln, zerlegen wir den Quirlbereich R_k, der allenfalls die Form eines Ringes hat, durch einander unendlich nah geführte Querschnitte in unendlich viele Cylinder von unendlich kleiner Höhe ds. Diese Querschnitte q sollen so geführt werden, dass sie zur resultirenden Geschwindigkeit ν_k überall normal stehen. Ausserdem zertheilen wir das ganze Bündel von Quirlfäden, welches die charakteristische Schicht erfüllt, in N unendlich dünne Quirlfäden so, dass das Produkt aus dem Querschnitt dq eines Fadens in dessen Quirlgeschwindigkeit ν_k gleich einer für alle Fäden constanten Grösse p_k ist

$$dq \cdot \nu_k = p_k = \text{constans.}$$

Dann kann man setzen

$$\int\int\int \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, u_k}{r_{1,2}} = p_k \int \frac{ds \cos(ds, x}{r}$$

und es lautet die Gleichung 30):

$$u_1 = p_k \int\int\int \frac{1}{\pi^i} \frac{dx_i\, dy_i\, dx_i}{r_i} \cdots\cdots$$
$$\int\int\int \frac{dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{2,3}} \int \frac{ds_1 \cos(ds_1, x)}{r} \qquad 32)$$

Das letzte einfache Integral ist über alle Quirlfäden einzeln zu erstrecken. Nimmt man an, dass alle Quirlfäden nahezu parallel laufen und dass überdies der gesammte Querschnitt des Quirlbereichs klein ist, dann darf man $N = 1$ setzen, und es braucht das Integral bloss über einen einzigen Stromfaden erstreckt werden. p_k können wir dann passend die Quirlintensität des Bereiches R_k nennen.

Zur Abkürzung bezeichnen wir noch das gesammte vielfache Integral der Gleichung 32) mit J_x, so dass

$$u_1 = p_k \cdot J_x, \quad v_1 = p_k \cdot J_y, \quad w_1 = p_k \cdot J_z \qquad 33)$$

ist, wo J_y und J_z analog zu J_x zu bilden sind.

Ganz ebenso erhält man für die vom zweiten Quirlbereich R_k' bedingten Geschwindigkeiten u_1', v_1', w_1' unseres Flüssigkeitstheilchens die Werthe

$$u_1' = p_k' J_x', \quad v_1' = p_k' J_y', \quad w_1' = p_k' J_z' \qquad 34)$$

16. Mit Rücksicht auf 30, 33 und 34 erhält man für die gesammte kinetische Energie T der betrachteten Flüssigkeitsmasse den Ausdruck

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2} p_k^2 \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ & + \frac{1}{2} p_k'^2 \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \qquad 35) \\ & + p_k p_k' \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x J_x' + J_y J_y' + J_z J_z') \end{aligned}$$

ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit.

Wir bezeichnen das erste Integral mit $A_{(h_1, h_2, h_3)}$, das zweite mit $B_{(h_4, h_5, h_6)}$ und das dritte mit $C_{(h_7, h_8, h_9)}$, so dass

$$T = \frac{A_{(h_1, h_2, h_3)}}{2} p_k^2 + \frac{B_{(h_4, h_5, h_6)}}{2} p_k'^2 + C_{(h_7, h_8, h_9)} p_k p_k' \qquad 36)$$

und es seien h_1, h_2, h_3 drei Coordinaten (Parameter), welche die geometrische Configuration des Quirlbereiches R_k bezogen auf seinen Schwerpunkt bestimmen, h_4, h_5, h_6 die analogen

Parameter für den zweiten Quirlbereich und h_7, h_8, h_9 die Parameter, welche die relative Configuration der beiden Bereiche zu einander bestimmen.

Wir wollen annehmen, dass alle diese Configurationen im Raume sich mit Geschwindigkeiten ändern, die klein gegen die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen sind. Dann liefert die Lagrange'sche Gleichung für die Kräfte P_k, P'_k und H_i, welche beziehlich die cyclischen Coordinaten p_k, p'_k und den beliebig gewählten Parameter h_i zu beschleunigen streben, die Werthe

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \frac{d}{dt}\left(A_{(h_1, h_2, h_3)}\, p_k + C_{(h_7, h_8, h_9)}\, p'_k\right) \\ P'_k &= \frac{d}{dt}\left(C_{(h_7, h_8, h_9)}\, p_k + B_{(h_4, h_5, h_6)}\, p'_k\right) \\ H_i &= -\frac{p_k^2}{2}\frac{\partial A_{(h_1, h_2, h_3)}}{\partial h_i} - \frac{p_k'^2}{2}\frac{\partial B_{(h_4, h_5, h_6)}}{\partial h_i} - p_k p'_k \frac{\partial C_{(h_7, h_8, h_9)}}{\partial h_i} \end{aligned}\right\} 37)$$

17. Gleichungen von ganz derselben Form erhält man auch, wenn man annimmt, dass die Ordnungszahl k gerade ist, in welchem Falle man es mit Wirbeln höherer Ordnung zu thun hat. Doch haben dann die Parameterfunktionen A, B, C eine etwas andere Bedeutung, von der sogleich die Rede sein wird. Vergleicht man die Gleichungen 37) mit den Gleichungen 12) in Boltzmann's Vorlesungen über Maxwell's Theorie I, pag. 24, so sieht man, dass zwei Quirlbereiche gleicher, im Uebrigen aber beliebiger Ordnungszahl ganz analoge ponderomotorische und Inductionswirkungen auf einander ausüben, wie elektrische Ströme. Dieses Resultat ist an sich so wenig wunderbar, dass es sogar als ganz selbstverständliches Postulat der Maxwell'schen Theorie erscheint, wenn wir diese in der Allgemeinheit auffassen, in der sie in den wiederholt citirten „Vorlesungen" dargestellt worden ist.

Das letzte einfache Integral ist über alle Quirlfäden einzeln zu erstrecken. Nimmt man an, dass alle Quirlfäden nahezu parallel laufen und dass überdies der gesammte Querschnitt des Quirlbereichs klein ist, dann darf man $N = 1$ setzen, und es braucht das Integral bloss über einen einzigen Stromfaden erstreckt werden. p_k können wir dann passend die Quirlintensität des Bereiches R_k nennen.

Zur Abkürzung bezeichnen wir noch das gesammte vielfache Integral der Gleichung 32) mit J_x, so dass

$$u_1 = p_k \cdot J_x, \quad v_1 = p_k \cdot J_y, \quad w_1 = p_k \cdot J_z \qquad 33)$$

ist, wo J_y und J_z analog zu J_x zu bilden sind.

Ganz ebenso erhält man für die vom zweiten Quirlbereich R_k' bedingten Geschwindigkeiten u_1', v_1', w_1' unseres Flüssigkeitstheilchens die Werthe

$$u_1' = p_k' J_x', \quad v_1' = p_k' J_y', \quad w_1' = p_k' J_z' \qquad 34)$$

16. Mit Rücksicht auf 30, 33 und 34 erhält man für die gesammte kinetische Energie T der betrachteten Flüssigkeitsmasse den Ausdruck

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} p_k^2 \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ & + \frac{1}{2} p_k'^2 \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \\ & + p_k p_k' \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x J_x' + J_y J_y' + J_z J_z') \end{aligned} \qquad 35)$$

ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit.

Wir bezeichnen das erste Integral mit $A_{(h_1, h_2, h_3)}$, das zweite mit $B_{(h_4, h_5, h_6)}$ und das dritte mit $C_{(h_7, h_8, h_9)}$, so dass

$$T = \frac{A_{(h_1, h_2, h_3)}}{2} p_k^2 + \frac{B_{(h_4, h_5, h_6)}}{2} p_k'^2 + C_{(h_7, h_8, h_9)} p_k p_k' \qquad 36)$$

und es seien h_1, h_2, h_3 drei Coordinaten (Parameter), welche die geometrische Configuration des Quirlbereiches R_k bezogen auf seinen Schwerpunkt bestimmen, h_4, h_5, h_6 die analog

[illegible]

[illegible] Qu-
[illegible] sei
[illegible] an.
[illegible] dass
[illegible] ein
[illegible] a der
[illegible] gleich
P [illegible] die
[illegible] ebig
[illegible] Wert

[illegible]

[illegible]

H [illegible] B

[illegible] gan
[illegible] ist, dass
[illegible] man es
[illegible] haben
A. B. [illegible] andere B
B [illegible] Vergleicht
[illegible] in Boltz
wo [illegible] 24, so
[illegible] im Ve
[illegible] analoge
[illegible] gen auf e
[illegible] Dieses
[illegible] gar als
[illegible] Theorie
Allge[illegible] fassen, in
„Verb[illegible]“ dargestellt w

18. Es besteht aber in Bezug auf den Richtungssinn, in welchem diese ponderomotorischen und Induktionswirkungen erfolgen, eine bemerkenswerthe Differenzirung zwischen den Quirlbewegungen von gerader und jenen von ungerader Ordnungszahl. Man gelangt zu derselben durch eine Discussion der Parameterfunktionen A, B, C. Wir wollen diese oben mit dem Index s versehen, wenn sie sich auf Quirlbereiche mit ungerader Ordnungszahl (Strömungen) beziehen, dagegen mit dem Index w, wenn sie sich auf solche mit gerader Ordnungszahl (Wirbeln) beziehen. Nach den Festsetzungen der Artikel 15 und 16 haben die A^s, B^s, C^s folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} A^s &= \iiint \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ B^s &= \iiint \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \\ C^s &= \iiint \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x J_x' + J_y J_y' + J_z J_z') \end{aligned}\right\} \quad 38)$$

Hiebei hat J_x den Werth

$$\begin{aligned} J_x = \iiint \frac{1}{\pi^i} \frac{dx_i\, dy_i\, dz_i}{r_i} \cdots\cdots \\ \iiint \frac{dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{2,3}} \int \frac{ds \cos(ds, x)}{r} \end{aligned} \quad 39)$$

Die Grössen J_y und J_z erhält man, wenn man im letzten einfachen Integral statt $\cos(ds, x)$ beziehlich $\cos(ds, y)$ und $\cos(ds, z)$ setzt, und die Grössen J_x', J_y', J_z' erhält man, wenn man das einfache Integral beziehlich über alle Quirlfäden im Bereiche R_k^i erstreckt. Der Index i hat den Zahlenwerth $\frac{k-1}{2}$.

Für die Parameterfunktionen A^w, B^w, C^w aber erhält man folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
A^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)^2\right] \\
B^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J'_z}{\partial y} - \frac{\partial J'_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial J'_x}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J'_y}{\partial x} - \frac{\partial J'_x}{\partial y}\right)^2\right] \\
C^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial J'_z}{\partial y} - \frac{\partial J'_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial J'_x}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial J'_y}{\partial x} - \frac{\partial J'_x}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Die Grössen J_x, J_y, J_z, J'_x, J'_y, J'_z haben auch hier noch die in Gleichung 39) gegebene Bedeutung; doch ist hier $i = \frac{k}{2}$ zu setzen.

19. Wir wollen die Grössen A, B die Selbstinductionscoefficienten der beiden Quirlbereiche und die Grösse C den wechselseitigen Inductionscoefficienten derselben nennen. Man kann dann die Inductionsgesetze so aussprechen, dass sie allgemein für beliebige Quirlfäden gerader und ungerader Ordnungszahl gelten. Man sagt dann z. B.: „Wird die relative geometrische Configuration der beiden Quirlfäden so geändert, dass dadurch der wechselseitige Inductionscoefficient vergrössert wird, so erregen die Quirlfäden in einander Quirlbewegungen, welche den erregenden entgegengesetzt gerichtet sind." Aehnliches gilt für das Gesetz der ponderomotorischen Kräfte. Würde man aber diese Sätze speziell so aussprechen: „Nähert man zwei geradlinige parallele Quirlfäden, so erregen sie in einander etc." oder „zwei geradlinige parallele und gleichgerichtete Quirlfäden ziehen einander an", so wären sie in dieser Form nur für Quirlfäden

mit ungerader Ordnungszahl unbedingt zutreffend; überhaupt gebührt den letzteren auch noch in anderer Hinsicht der Vorzug, wenn man sich darüber entscheiden will, welche Art der Quirlbewegungen man den elektrischen Strömen zuordnen soll; auf einen hieher gehörigen Punkt hat schon Boltzmann[1]) aufmerksam gemacht; man kann die daselbst angewandte Betrachtungsweise leicht auf die Quirl jeder beliebigen geraden Ordnungszahl verallgemeinern. Aber gerade die Discussion der Parameterfunktionen A^s, B^s, C^s und A^w, B^w, C^w liesse sogar auch noch unter den Quirlbewegungen ungerader Ordnungszahl eine spezielle Vorzugswahl treffen. Die letzten Consequenzen, zu denen man dann gelangen würde, kann man aber auch noch auf einem anderen direkteren Wege erreichen. In einer Abhandlung über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für rasch veränderliche Parameter, welche gleichzeitig mit der vorliegenden an anderer Stelle zum Drucke gelangt, findet sich einiges hierüber.

20. Hier sei noch folgendes bemerkt: Unsere Analogieen bleiben auch dann noch bestehen, wenn wir unter u_1, v_1, w_1, nicht die Geschwindigkeiten eines Mediumtheilchens, sondern die einfachen Verschiebungen eines solchen, unter u_k, v_k, w_k aber Grössen verstehen, welche aus jenen durch $k$malige Anwendung der Curl-Operation hervorgehen, nur bedarf es hiezu der Annahme, dass die durch diese Verschiebungen in das Medium gespeicherte (hier potentielle) Energie wiederum dem Ausdrucke $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ proportional ist. Auch sei besonders noch betont, dass alle unsere Aussagen ihren physikalischen Sinn in voller Strenge nur dann bewahren, wenn wir uns vorstellen, dass alle inneren Kräfte des Mediums stets durch willkürlich hinzugefügte langsam veränderliche äussere Kräfte paralysirt werden.

Es mögen hier noch 2 Sätze Platz finden, welche wir

1) Wiedem. Ann. Bd. 48, 1893, p. 95.

als die mechanischen Bilder der beiden Hertz'schen Gleichungssysteme betrachten können:

a) Sind die Quirllinien $(k+1)$ter Ordnung elektrische Stromlinien, so sind die Quirllinien $k$ter Ordnung magnetische Kraftlinien. (Mechanisches Bild des „zweiten" Hertz'schen Gleichungssystems.)

b) Sind die Quirllinien $k$ter Ordnung magnetische Stromlinien, so sind die Quirllinien $(k-1)$ter Ordnung elektrische Kraftlinien. (Mechanisches Bild des „ersten" Hertzschen Gleichungssystems.)

Der Begriff des magnetischen Stromes ist dabei natürlich nicht im vulgären elektrotechnischen Sinne zu verstehen, sondern in jener Auffassung, in welcher er zuerst wohl von Hertz (1884) gebraucht und später vornehmlich von Heaviside in die Theorie eingebürgert worden ist.

Der Satz a) gilt — sofern man der Ampère'schen Ansicht vom Wesen des Magnetismus beipflichtet — immer auch umgekehrt, der Satz b) dies aber nur dann, wenn das elektromagnetische Feld frei von elektrostatischer Ladung ist.

Die beiden Sätze a) und b) umfassen — im wohlverstandenen bildlich-mechanischen Sinne — das gesammte Lehrgebäude der Maxwell'schen Theorie der Elektrodynamik des freien Aethers.

München, mathem.-physik. Institut d. Universität.

Sitzung vom 7. Juli 1894.

1. Herr GUSTAV BAUER hält einen Vortrag: „Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome".

2. Herr GUSTAV BAUER legt eine Abhandlung des Privatdozenten Dr. LUDWIG MAURER in Strassburg: „zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen" vor.

3. Herr AD. V. BAEYER theilt die Resultate seiner neueren Untersuchungen „über das Kümmelöl" mit. Dieselben werden an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen.

Von L. Maurer in Strassburg.

(Eingelaufen 7. Juli.)

Die folgende Untersuchung schliesst sich an die Abhandlung von mir an, die der Akademie im Jahre 1888 vorgelegen ist.[1]) Es sei gestattet zunächst in Kürze an den Inhalt derselben zu erinnern.

Den Ausgangspunkt bildet die Aufgabe, die umfassendste continuirliche Gruppe linearer homogener Substitutionen zu bestimmen, die eine rationale und homogene Function f der Variabeln $x_1\ x_2 \ldots x_n$ in sich selbst transformirt. Ist diese Gruppe gerade m-gliedrig, so genügt f einem System von m Differentialgleichungen der Form

$$(\gamma) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = C_i(f) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

Diese Differentialgleichungen sind von einander linear unabhängig, d. h. ihre Coefficienten genügen keiner Relation der Form

$$q_1\, c_{\lambda\mu}^{(1)} + q_2\, c_{\lambda\mu}^{(2)} \ldots + q_m\, c_{\lambda\mu}^{(m)} = 0 \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Damit ist nicht ausgeschlossen, dass nicht eine der Differentialgleichungen (γ) eine Folge der übrigen ist.

---

1) Ueber allgemeinere Invariantensysteme. Ich citire diese Abhandlung im Folgenden kurz mit Inv.

Die Coefficienten der Differentialgleichungen (γ) ge
Gleichungen der Form

$$(J)\quad \sum_{\nu=1}^{n}\left(c_{\lambda\nu}^{(i)}\,c_{\nu\mu}^{(k)}-c_{\lambda\nu}^{(k)}\,c_{\nu\mu}^{(i)}\right)=\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j^{ik}\,c_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda,\mu=1,2,\ldots n \qquad i,k=1,2,\ldots m$$

Man kann dieselben auch in der symbolischen Fo

$$C_i\,C_k\,(f)-C_k\,C_i\,(f)=\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j^{ik}\,C_j\,(f)$$

darstellen.

Die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gr
die f in sich selbst transformirt, sind als Funktione
m Parametern $u_1\,u_2\ldots u_m$ definirt durch die Differ
gleichungen

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u_i}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}a_{\lambda\nu}\,c_{\nu\mu}^{(j)}\,P_j^{(i)} \qquad \begin{array}{l}\lambda,\mu=1,2,\ldots\\ i=1,2,\ldots m\end{array}$$

und die Anfangsbedingung, dass einem bestimmten W
system der Parameter — den Anfangswerthen —
identische Substitution entspricht.

Die m^2 Funktionen $P_j^{(i)}$ der Parameter unterliege
Bedingung, dass ihre Determinante nicht identisch
schwindet und dass sie insbesondere nicht für die An
werthe der Parameter gleich Null ist.

Die angegebenen Bedingungen reichen — wie a
allgemeinen Theorie des H. Lie hervorgeht — aus,
das m-fach unendliche Substitutionensystem

$$y_\lambda=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\lambda\mu}\,((u))\,x_\mu \qquad \lambda=1,2,\ldots n$$

eine Gruppe bildet. Damit aber diese Gruppe die
fassendste Gruppe ist, die eine rationale Funktion in
selbst transformirt, müssen noch weitere Bedingunge
füllt sein.

Die Aufstellung dieser Bedingungen führt zu einer Ein-
eilung der „infinitesimalen Transformationen" der Form

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

verschiedene Arten.

Nehmen wir an, die zu $C(f)$ gehörige charakteristische
eterminante

$$\Delta(p) = \left| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} p \right| \text{ [1]} \qquad \lambda, \mu = 1, 2 \,..\, n$$

erschwinde nur für $p = 0$, dann bezeichne ich $C(f)$ als
gulär von der ersten Art.

Nehmen wir zweitens an, $\Delta(p)$ verschwinde nur für
anzzahlige Werthe von p und es verschwinden für eine
-fache Wurzel auch alle Unterdeterminanten $n - h + 1$. Grades
es Systems

$$\left| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} p \right|$$

ann bezeichne ich $C(f)$ als regulär von der zweiten Art.
allen anderen Fällen heisst $C(f)$ irregulär. Diese Be-
ichnungen werden auch auf das Coefficientensystem $c_{\lambda\mu}$
gewandt. Ist $C(f)$ irregulär, so kann man immer eine
nzahl regulärer infinitesimaler Transformationen

$$K(f) \quad K_1(f) \quad K_2(f) \,..\, K_\beta(f)$$

erart bestimmen[2]) dass

$$C(f) = K(f) + \varrho_1 K_1(f) + \varrho_2 K_2(f) \,..\, + \varrho_\beta K_\beta(f)$$

Von diesen inf. Transformationen ist die erste von der
sten Art, alle übrigen sind von der zweiten Art.

---

1) Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ hat den Werth 1 oder 0, je nachdem λ
d μ gleich oder ungleich sind.

2) Inv. S. 123.

Die Zerlegung von $C(f)$ in reguläre inf. Transformation ist im wesentlichen vollkommen bestimmt, d. h. eine Unbestimmtheit tritt nur insoferne ein, als eine jede der inf. Transformationen $K_1(f)$ $K_2(f)$ .. $K_\beta(f)$ durch einen Ausdruck der Form

$$\alpha_1 K_1(f) + \alpha_2 K_2(f) \ldots + \alpha_\beta K_\beta(f)$$

mit ganzzahligen Coefficienten $\alpha_1 \alpha_2$ .. ersetzt werden kann.

Die oben erwähnten weiteren Bedingungen, denen unsere Gruppe genügen muss, lauten nun:

Kommt unter den inf. Transformationen der Gruppe eine irreguläre Transformation $C(f)$ vor, so gehören der Gruppe auch alle die regulären Transformationen $K(f)$ $K_1(f)$ $K_\beta(f)$ an, in die $C(f)$ zerlegt werden kann.

Daraus folgt sofort:

Unsere m-gliedrige Gruppe enthält m linear unabhängige reguläre inf. Transformationen.

Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so kann man die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ als rationale Funktionen von m Parametern $u_1 u_2 \ldots u_m$ darstellen und daraus folgt dann die Existenz rationaler Funktionen — der Invarianten der Gruppe — die durch die Gruppe in sich selbst transformirt werden.

Zu dieser rationalen Darstellung der Substitutionscoefficienten gelangt man auf folgende Art:

Man wähle m linear unabhängige inf. Transformationen $C_1(f)$ $C_2(f)$ .. $C_m(f)$ der Art aus, dass eine jede derselben regulär ist.

Die infinitesimale Transformation $C_i(f)$ „erzeugt" eine eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$. Ist die inf. Transformation $C_i(f)$ von der ersten Art, so sind die Coefficienten $b^{(i)}_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe $B_i(u_i)$ durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d\, b_{\lambda\mu}^{(i)}}{d\, u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(i)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und die Anfangsbedingung $b_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 0$ bestimmt. Die Grössen $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ sind in diesem Fall ganze Funktionen von u_i.

Ist dagegen die inf. Transformation $C_i(f)$ von der zweiten Art, so sind die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ durch die Differentialgleichungen

$$u_i \frac{d\, b_{\lambda\mu}^{(i)}}{d\, u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(i)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und die Anfangsbedingung $b_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 1$ bestimmt. In diesem Fall sind die Substitutionscoefficienten wenigstens rationale Funktionen des Parameters u_i.

Setzt man nun die m eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ zu einer m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1\, u_2 \ldots u_m) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \ldots B_m(u_m)$$

zusammen, so ist klar, dass die Coefficienten der allgemeinen Substitution dieser Gruppe A sich als rationale Funktionen der m Parameter $u_1\, u_2 \ldots u_m$ ergeben, und zwar gilt dies, wie auch immer die m inf. Transformationen $C_i(f)$ im übrigen gewählt sein mögen, wenn nur eine jede derselben regulär ist.

Setzt man zwei Substitutionen der Gruppe A

$$z_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((v))\, y_\mu \quad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

zusammen, so erhält man dem Gruppenbegriff gemäss wieder eine Substitution der Gruppe.

Es muss also möglich sein m Funktionen $w_1\, w_2 \ldots w_m$ der Grössen $u_1\, u_2 \ldots u_m$; $v_1\, v_2 \ldots v_m$ der Art zu bestimmen, dass

$$a_{\lambda\mu}((w)) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((v))\, a_{\nu\mu}((u)) \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Die Grössen w sind im allgemeinen algebraische Funktionen der Grössen u und v, weil ja die Substitutionscoefficienten rationale Funktionen der Parameter sind. Aber es gilt der Satz:

Man kann die m inf. Transformationen $C_i(f)$, von deren Wahl die Wahl des Parametersystems abhängig gemacht worden ist, so wählen, dass die Grössen w rationale Funktionen der Grössen u und v werden.

Der Satz ist für die allgemeine Theorie der continuirlichen Gruppen insofern von Bedeutung, als er für eine sehr ausgedehnte Classe von Gruppentypen die Existenz einfach transitiver rationaler Gruppen nachweist. Es ist aber auch vom invariantentheoretischen Gesichtspunkt von Interesse, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll.

Im Folgenden erlaube ich mir einen Beweis dieses Satzes vorzulegen.

Der Beweis wird in der Weise geführt, dass nachgewiesen wird: bei passender Wahl der inf. Transformationen $C_i(f)$ ergeben sich nicht nur die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe als rationale Funktionen der Parameter, sondern es sind auch umgekehrt die Parameter rational durch die Substitutionscoefficienten bestimmt. Ist dies bewiesen, so ist klar, dass von den vorhin besprochenen drei Grössensystemen u; v; w ein jedes durch die beiden anderen rational bestimmt ist.

Für den Beweis ist es zweckmässig die hier in Betracht kommenden Gruppen in drei Classen einzutheilen. In die erste Classe rechnen wir die Gruppen, deren inf. Transformationen sämmtlich regulär von der ersten Art sind; in die zweite Classe die Gruppen, deren inf. Transformationen sämmtlich regulär von der zweiten Art sind; in die dritte

Classe endlich die Gruppen, die sowohl reguläre inf. Transformationen erster Art als auch solche zweiter Art enthalten. Jede dieser Classen muss für sich betrachtet werden.

I.

Die im Vorausgehenden ausgesprochenen Sätze kann man leicht von einer unnöthigen, ihnen anhaftenden Beschränkung frei machen.

Diese Sätze beziehen sich nämlich zunächst nur auf solche Gruppen, für die Invarianten existiren, die also nach der Lie'schen Terminologie intransitiv sind. Damit Invarianten auftreten, ist erforderlich, dass die Differentialgleichungen (γ) wenigstens eine Lösung zulassen, dass also die Anzahl der untereinander unabhängigen Differentialgleichungen kleiner als n ist.

Halten wir an der Voraussetzung fest, dass die Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

eine m-gliedrige Gruppe definiren, lassen aber die Voraussetzung, dass für diese Gruppen Invarianten existiren, fallen und machen wir statt dessen die Voraussetzung, die Gruppe sei durch algebraische Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten definirt. Derartige Gruppen sollen im Folgenden als reguläre Gruppen bezeichnet werden.

Die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen — wie aus der allgemeinen Theorie des H. Lie hervorgeht — einem System von Differentialgleichungen der Form (α) und den zugehörigen Anfangsbedingungen.

Wir betrachten nun ein System von q cogredienten Substitutionen

$$(\beta) \quad y_\lambda^{(\sigma)} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \quad \sigma = 1, 2, \ldots q$$

und wählen die Zahl q so gross, dass $q\,n > m$ ist. Alsdann hat das System der Differentialgleichungen

$$(\gamma) \quad S_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^{(\sigma)}} x_\mu^{(\sigma)} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots m$$

$q\,n - m$ unabhängige Lösungen und jede Lösung ist gegenüber der Gruppe (β) invariant. Da aber die Gruppe (β) durch algebraische Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten definirt ist, so gibt es rationale Invarianten der Gruppe[1]) und zwar sind darunter $q\,n - m$ untereinander unabhängige.

Den Differentialgleichungen $S_i(f) = 0$ kommt also ein vollständiges System rationaler Lösungen zu. Es finden somit die in der Einleitung angegebenen Sätze auf die Gruppe (β) Anwendung.

Nun überzeugt man sich leicht, dass die inf. Transformation $S_i(f)$ regulär oder irregulär ist, je nachdem die inf. Transformation $C_i(f)$ regulär oder irregulär ist. Es gilt somit der Satz:

Findet sich unter den inf. Transformationen, die zu einer regulären Gruppe gehören, eine irreguläre Transformation $C(f)$, so gehören alle die regulären Transformationen, in die $C(f)$ zerlegt werden kann, der Gruppe an.

II.

Um später den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich einige Hülfssätze aus der Theorie der bilinearen Formen voraus.

Wir stellen uns zunächst die folgende Frage: es seien n^2 Grössen $c_{\lambda\mu}$ gegeben, unter welchen Bedingungen gibt es

1) Christoffel Math. Annalen Bd. 19 S. 280.

dann n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$, die nicht alle gleich Null sind und die den Gleichungen

$$(a) \quad \sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Ich behaupte, ein derartiges System $c'_{\lambda\mu}$ kann nur existiren, wenn die Grösse ω gleich der Differenz zweier der Werthe r ist, für die die charakteristische Determinante $\Delta(r) = | c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r | \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$ verschwindet.

Den Beweis führen wir indirect: wir nehmen an, ω sei nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, und beweisen, dass dann alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ verschwinden müssen.

Die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ bezeichnen wir mit $r_1\, r_2 \ldots r_n$, und die Exponenten der zum Wurzelfaktor $r_k - r$ gehörigen Elementartheiler mit $e_0^{(k)}\, e_1^{(k)} \ldots e_{l_k}^{(k)}$.

Wie ich in meiner Inauguraldissertation[1]) nachgewiesen habe, lassen sich n^2 Grössen $[g\, h\, \lambda]_k$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k = r_k\, [1\, h\, \lambda]_k \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [g\, h\, \mu]_k = r_k\, [g\, h\, \lambda]_k + [g-1\, h\, \lambda]_k \qquad \begin{array}{l} g = 2, 3, \ldots e_h^{(k)} \\ h = 0, 1, \ldots l_k \\ k = 1, 2, \ldots n' \end{array}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (a)

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu}\, [1\, h\, \mu]_k \right) = (r_k + \omega) \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots n$$

Weil nach Voraussetzung die Determinante $\Delta(r)$ für $r = r_k + \omega$ nicht verschwindet, so folgt hieraus

1) Zur Theorie der linearen Substitutionen, Strassburg 1887.

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\,[1\,h\,\mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n$$

Nun folgt aus (a) weiter

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu}\left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu}\,[2\,h\,\mu]_k\right) = (r_k + w)\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\,[2\,h\,\mu]_k$$
$$\lambda = 1, 2, \ldots n$$

und hieraus ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\,[2\,h\,\mu]_k = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

Diese Schlussweise fortsetzend erkennt man, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\,[g\,h\,\mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n$$

und alle n Werthsysteme der Indices g, h, k.

Da die Determinante der Grössen $[g\,h\,\mu]_k$ nicht verschwindet, so folgt hieraus $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$, w. z. b. w.

Aus dem eben Bewiesenen folgt der

1. Hülfssatz:

Ist das System der n^2 Grössen $c_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art, so können die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\,c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\,c_{\nu\mu}) = \omega\,c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

nur dann bestehen, wenn entweder ω oder alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Denn in diesem Fall verschwindet die charakteristische Determinante $\Delta(r)$ nur für $r = 0$.

Man kann das Gleichungssystem (a) in bekannter Weise durch die symbolische Gleichung

$$C\,C' - C'\,C = \omega\,C'$$

repräsentiren. Aus dieser symbolischen Gleichung ergibt sich:

$$C'^2 - C'^2 C = (CC' - C'C)\,C' + C'\,(CC' - C'C) = 2\omega\,C'^2$$

$$C'^3 - C'^3 C = (CC'^2 - C'^2 C)\,C' + C'^2 (CC' - C'C) = 3\omega C'^3$$

$$\text{und allgemein } CC'^h - C'^h C = h\,\omega\,C'^h$$

Wählt man die Zahl h so gross, dass $h\,\omega$ nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ ist, was offenbar immer möglich ist, wenn ω von Null verschieden ist — so müssen alle n^2 Elemente des durch das Symbol C'^h repräsentirten Systems verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn die zu dem System $c'_{\lambda\mu}$ gehörige charakteristische Determinante $\Delta'(r)$ für keinen von Null verschiedenen Werth von r verschwindet, d. h. wenn das System der n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art ist.

Es gilt somit der

2. Hülfssatz:

Bestehen die n^2 Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\,c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\,c_{\nu\mu}) = \omega\,c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und ist die Constante ω von Null verschieden, so ist das System der n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art.

Die beiden ersten Hülfssätze haben sich auf reguläre Systeme erster Art bezogen, die beiden folgenden beziehen sich auf reguläre Systeme zweiter Art.

3. Hülfssatz:

Wenn die charakteristische Determinante

$$\Delta(r) = \left| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

nur Elementartheiler erster Ordnung besitzt, so können die Gleichungen

$$a_{\lambda\mu}((w)) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((v))\, a_{\nu\mu}((u)) \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots$$

Die Grössen w sind im allgemeinen algebraische I tionen der Grössen u und v, weil ja die Substit coefficienten rationale Funktionen der Parameter sind es gilt der Satz:

Man kann die m inf. Transformationen $C_i(f)$, von Wahl die Wahl des Parametersystems abhängig ge worden ist, so wählen, dass die Grössen w rati Funktionen der Grössen u und v werden.

Der Satz ist für die allgemeine Theorie der cont lichen Gruppen insofern von Bedeutung, als er für eine ausgedehnte Classe von Gruppentypen die Existenz e transitiver rationaler Gruppen nachweist. Es ist aber vom invariantentheoretischen Gesichtspunkt von Int worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll

Im Folgenden erlaube ich mir einen Beweis dieses vorzulegen.

Der Beweis wird in der Weise geführt, dass na wiesen wird: bei passender Wahl der inf. Transforma $C_i(f)$ ergeben sich nicht nur die Coefficienten der meinen Substitution der Gruppe als rationale Funk der Parameter, sondern es sind auch umgekehrt die meter rational durch die Substitutionscoefficienten best Ist dies bewiesen, so ist klar, dass von den vorhin besproc drei Grössensystemen u; v; w ein jedes durch die anderen rational bestimmt ist.

Für den Beweis ist es zweckmässig die hier in Be kommenden Gruppen in drei Classen einzutheilen. I erste Classe rechnen wir die Gruppen, deren inf. T formationen sämmtlich regulär von der ersten Art sin die zweite Classe die Gruppen, deren inf. Transformat sämmtlich regulär von der zweiten Art sind; in die

asse endlich die Gruppen, die sowohl reguläre inf. Transformationen erster Art als auch solche zweiter Art enthalten. Jede dieser Classen muss für sich betrachtet werden.

I.

Die im Vorausgehenden ausgesprochenen Sätze kann man leicht von einer unnöthigen, ihnen anhaftenden Beschränkung frei machen.

Diese Sätze beziehen sich nämlich zunächst nur auf solche Gruppen, für die Invarianten existiren, die also nach der Lie'schen Terminologie intransitiv sind. Damit Invarianten auftreten, ist erforderlich, dass die Differentialgleichungen (γ) wenigstens eine Lösung zulassen, dass also die Anzahl der untereinander unabhängigen Differentialgleichungen kleiner als n ist.

Halten wir an der Voraussetzung fest, dass die Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

eine m-gliedrige Gruppe definiren, lassen aber die Voraussetzung, dass für diese Gruppen Invarianten existiren, fallen und machen wir statt dessen die Voraussetzung, die Gruppe sei durch algebraische Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten definirt. Derartige Gruppen sollen im Folgenden als reguläre Gruppen bezeichnet werden.

Die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen — wie aus der allgemeinen Theorie des H. Lie hervorgeht — einem System von Differentialgleichungen der Form (α) und den zugehörigen Anfangsbedingungen.

Wir betrachten nun ein System von q cogredienten Substitutionen

$$(\beta) \quad y_\lambda^{(\sigma)} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \quad \sigma = 1, 2, \ldots q$$

und wählen die Zahl q so gross, dass $q\,n > m$ ist. Alsd
hat das System der Differentialgleichungen

$$(\gamma) \quad S_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^{(\sigma)}} x_\mu^{(\sigma)} = 0 \quad i = 1, 2 \ldots$$

$q\,n - m$ unabhängige Lösungen und jede Lösung ist ge
über der Gruppe (β) invariant. Da aber die Gruppe
durch algebraische Relationen zwischen den Substituti
coefficienten definirt ist, so gibt es rationale Invariante
Gruppe[1]) und zwar sind darunter $q\,n - m$ unterein
unabhängige.

Den Differentialgleichungen $S_i(f) = 0$ kommt als
vollständiges System rationaler Lösungen zu. Es
somit die in der Einleitung angegebenen Sätze auf die G
(β) Anwendung.

Nun überzeugt man sich leicht, dass die inf. T
formation $S_i(f)$ regulär oder irregulär ist, je nachde
inf. Transformation $C_i(f)$ regulär oder irregulär ist
gilt somit der Satz:

Findet sich unter den inf. Transformationen, d
einer regulären Gruppe gehören, eine irreguläre Transfor
$C(f)$, so gehören alle die regulären Transformation
die $C(f)$ zerlegt werden kann, der Gruppe an.

II.

Um später den Gang der Untersuchung nicht
brechen zu müssen, schicke ich einige Hülfssätze au
Theorie der bilinearen Formen voraus.

Wir stellen uns zunächst die folgende Frage: es
n^2 Grössen $c_{\lambda\mu}$ gegeben, unter welchen Bedingungen g

1) Christoffel Math. Annalen Bd. 19 S. 280.

in n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$, die nicht alle gleich Null sind und die 1 Gleichungen

$$) \quad \sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Ich behaupte, ein derartiges System $c'_{\lambda\mu}$ kann nur existiren, wenn die Grösse ω gleich der Differenz zweier der Werthe r ist, für die die charakteristische Determinante $\Delta(r) = | c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r | \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$ verschwindet.

Den Beweis führen wir indirect: wir nehmen an, ω sei nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, und beweisen, dass dann alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ verschwinden müssen.

Die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ bezeichnen wir mit $r_1\, r_2 \ldots r_n$, und die Exponenten der zum Wurzelfaktor $r_k - r$ gehörigen Elementartheiler mit $e_0^{(k)}\, e_1^{(k)} \ldots e_{l_k}^{(k)}$.

Wie ich in meiner Inauguraldissertation[1]) nachgewiesen habe, lassen sich n^2 Grössen $[g\, h\, \lambda]_k$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k = r_k\, [1\, h\, \lambda]_k \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [g\, h\, \mu]_k = r_k\, [g\, h\, \lambda]_k + [g-1\, h\, \lambda]_k \qquad \begin{array}{l} g = 2, 3, \ldots e_h^{(k)} \\ h = 0, 1, \ldots l_k \\ k = 1, 2, \ldots n' \end{array}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (a)

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu}\, [1\, h\, \mu]_k \right) = (r_k + \omega) \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots n$$

Weil nach Voraussetzung die Determinante $\Delta(r)$ für $r = r_k + \omega$ nicht verschwindet, so folgt hieraus

1) Zur Theorie der linearen Substitutionen, Strassburg 1887.

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} [1\, h\, \mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n$$

Nun folgt aus (*a*) weiter

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu} [2\, h\, \mu]_k \right) = (r_k + w) \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} [2\, h$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots n$$

und hieraus ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} [2\, h\, \mu]_k = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

Diese Schlussweise fortsetzend erkennt man, da

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} [g\, h\, \mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n$$

und alle n Werthsysteme der Indices g, h, k.

Da die Determinante der Grössen $[g\, h\, \mu]_k$ ni schwindet, so folgt hieraus $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1$ w. z. b. w.

Aus dem eben Bewiesenen folgt der

1. Hülfssatz:

Ist das System der n^2 Grössen $c_{\lambda\mu}$ regulär von d Art, so können die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .$$

nur dann bestehen, wenn entweder ω oder alle n^2 $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Denn in diesem Fall verschwindet die charakte Determinante $\Delta(r)$ nur für $r = 0$.

Man kann das Gleichungssystem (*a*) in bekannte durch die symbolische Gleichung

$$C C' - C' C = \omega C'$$

repräsentiren. Aus dieser symbolischen Gleichung ergibt sich:

$$C C'^2 - C'^2 C = (C C' - C' C) C' + C' (C C' - C' C) = 2 \omega C'^2$$

$$C C'^3 - C'^3 C = (C C'^2 - C'^2 C) C' + C'^2 (C C' - C' C) = 3 \omega C'^3$$

$$\text{und allgemein } C C'^h - C'^h C = h \omega C'^h$$

Wählt man die Zahl h so gross, dass $h \omega$ nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ ist, was offenbar immer möglich ist, wenn ω von Null verschieden ist — so müssen alle n^2 Elemente des durch das Symbol C'^h repräsentirten Systems verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn die zu dem System $c'_{\lambda\mu}$ gehörige charakteristische Determinante $\Delta'(r)$ für keinen von Null verschiedenen Werth von r verschwindet, d. h. wenn das System der n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art ist.

Es gilt somit der

2. Hülfssatz:

Bestehen die n^2 Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu} c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}) = \omega c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und ist die Constante ω von Null verschieden, so ist das System der n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art.

Die beiden ersten Hülfssätze haben sich auf reguläre Systeme erster Art bezogen, die beiden folgenden beziehen sich auf reguläre Systeme zweiter Art.

3. Hülfssatz:

Wenn die charakteristische Determinante

$$\Delta(r) = \left| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

nur Elementartheiler erster Ordnung besitzt, so können die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c''_{\nu\mu} - c''_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c''_{\lambda\mu} + c'_{\lambda\mu}$$

nur dann bestehen, wenn alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, unter denen beliebig viele einander gleiche vorkommen können, mit $r_1\, r_2 \ldots r_n$. Aus unserer Voraussetzung folgt: es gibt zwei Systeme von je n^2 Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ und $\delta_\lambda^{(\sigma)}$ $(\sigma, \lambda = 1, 2 \ldots n)$ mit nicht verschwindender Determinante, die den folgenden Gleichungen genügen:

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma\, d_\lambda^{(\sigma)}$$

$$\lambda, \sigma = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu\lambda}\, \delta_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma\, \delta_\lambda^{(\sigma)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen leitet man aus dem vorgelegten Gleichungssystem das Folgende ab:

$$(r_\varrho - r_\sigma - \omega) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)} = 0$$

$$(r_\varrho - r_\sigma - \omega) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c''_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)}$$

$$\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots n$$

Die erste Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$\sum_\lambda \sum_\mu c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)}$$

verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega$ von Null verschieden ist. Die zweite Gleichung zeigt, dass dieser Ausdruck auch dann

verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega = 0$ ist. Der genannte Ausdruck verschwindet also in allen Fällen und daraus folgt $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$, w. z. b. w.

4. Hülfssatz:

Es seien m Systeme von je n^2 Grössen vorgelegt:

$$c^{(1)}_{\lambda\mu}\, c^{(2)}_{\lambda\mu} \ldots c^{(m)}_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Wir setzen voraus, die zu einem jeden Systeme gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ habe nur Elementartheiler erster Ordnung, und wir setzen weiter voraus, zwischen den Elementen von je zwei Grössensystemen bestehen die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c^{(i)}_{\lambda\nu}\, c^{(k)}_{\nu\mu} - c^{(k)}_{\lambda\nu}\, c^{(i)}_{\nu\mu} \right) = 0 \qquad \begin{array}{l} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i, k = 1, 2, \ldots m \end{array}$$

Dann kann man ein System von n^2 Grössen $d^{(\sigma)}_\lambda$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c^{(i)}_{\lambda\mu}\, d^{(\sigma)}_\mu = r^{(i)}_\sigma\, d^{(\sigma)}_\lambda \qquad \begin{array}{l} \lambda, \sigma = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{array}$$

Die n Grössen $r^{(i)}_1\, r^{(i)}_2 \ldots r^{(i)}_n$ sind die Wurzeln der Gleichung $\Delta_i(r) = 0$, also ganze Zahlen, wenn das System der $c^{(i)}_{\lambda\mu}$ regulär von der zweiten Art ist.

Dass der eben ausgesprochene Satz gilt, wenn nur ein Grössensystem $c^{(i)}_{\lambda\mu}$ vorgelegt ist, ist bekannt. Um seine allgemeine Gültigkeit darzuthun, wollen wir annehmen, er gelte, solange die Anzahl der vorgelegten Grössensysteme kleiner als m ist, und beweisen, dass er dann auch noch für m Grössensysteme gilt. Wir nehmen also an, es gebe ein Grössensystem $t^{(\sigma)}_\lambda$ mit nicht verschwindender Determinante, das den Gleichungen

$$(T) \quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} t_{\mu}^{(\sigma)} = r_{\sigma}^{(i)} t_{\lambda}^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, .. n; \; i = 1, 2, .. m-1$$

genügt. Weil nach Voraussetzung die Determinante der $t_{\lambda}^{(\sigma)}$ nicht verschwindet, so kann man die Gleichungen ansetzen

$$(\alpha) \quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(m)} t_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\sigma\nu} t_{\lambda}^{(\nu)} \qquad \lambda, \sigma = 1, 2, .. n$$

Nach dem bekannten Theorem des H. Weinstrass stimmen die charakteristischen Determinanten.

$$\Delta_m(r) = \left| c_{\lambda\mu}^{(m)} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \text{ und } \Delta_m'(r) = \left| \alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right|$$
$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n$$

in ihren Elementartheilern überein.

Nun folgt aus den Gleichungen, von denen wir ausgegangen sind bei Benützung der Gleichungen (T) und (α)

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(m)} - c_{\lambda\nu}^{(m)} c_{\nu\mu}^{(i)} \right) t_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(r_{\nu}^{(i)} - r_{\sigma}^{(i)} \right) \alpha_{\sigma\nu} t_{\lambda}^{(\nu)} = 0$$
$$\sigma, \lambda = 1, 2, .. n; \; i = 1, 2, .. m-1$$

und hieraus ergibt sich $\alpha_{\sigma\nu} = 0$, wenn nicht

$$r_{\nu}^{(i)} = r_{\sigma}^{(i)} \text{ für } i = 1, 2, .. m-1$$

Ist nun für keinen Index $\nu > 1$ gleichzeitig $r_{\nu}^{(i)} = r_1^{(i)}$ für $i = 1, 2, .. m-1$, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu}^{(m)} t_{\mu}^{(i)} = \alpha_{11} t_{\lambda}^{(1)} \qquad \lambda = 1, 2, .. n$$

und wir genügen den zu beweisenden Gleichungen, wenn wir $d_{\lambda}^{1)} = t_{\lambda}^{(1)}$ und $r_1^{(m)} = \alpha_{11}$ setzen.

Nehmen wir nunmehr an, es sei

$$r_1^{(i)} = r_2^{(i)} .. = r_h^{(i)} \qquad i = 1, 2, .. m-1$$

dagegen sei für keinen Index $\nu > h$ gleichzeitig

$$r_\nu^{(i)} = r_1^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots m-1$$

Von den Elementen der Determinante

$$\Delta'_m(r) = \left| \alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

verschwinden alle, die den ersten h Zeiten, aber nicht gleichzeitig den ersten h Spalten angehören. Beachtet man, dass die Determinante $\Delta'_m(r)$ ebenso wie die Determinante $\Delta_m(r)$ nur Elementartheile erster Ordnung besitzt, so überzeugt man sich leicht, dass auch die charakteristische Determinante des Systems h^{ten} Grades $\alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r$ $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots h$ nur Elementartheiler erster Ordnung hat, und daraus folgt: man kann ein System von h^2 Grössen $\beta_{\varrho\sigma}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\sigma=1}^{h} \beta_{\varrho\sigma}\, \alpha_{\sigma\nu} = r_\varrho^{(m)} \beta_{\varrho\nu} \qquad \varrho, \nu = 1, 2, \ldots h$$

Setzt man dann

$$\sum_{\nu=1}^{h} \beta_{\varrho\nu}\, t_\lambda^{(\nu)} = d_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n;\ \varrho = 1, 2, \ldots h$$

so ergibt sich aus den Gleichungen (α)

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(m)}\, d_\mu^{(\varrho)} = r_\varrho^{(m)}\, d_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n;\ \varrho = 1, 2, \ldots h$$

Damit sind die ersten h der zu beweisenden Gleichungen als richtig erwiesen. Der Beweis der übrigen ergibt sich auf analoge Weise.

III.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zunächst zu den Gruppen der zweiten Classe (s. Einleitung, Schluss).

Wir nehmen also an, eine jede inf. Transformation, die der vorgelegten m-gliedrigen Gruppe A angehört, sei regulär

von der zweiten Art. Zwischen den Coefficienten von m linear unabhängigen inf. Transformationen der Gruppe A

$$C_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

bestehen Gleichungen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)} c_{\nu\mu}^{(i)} \right) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} c_{\lambda\mu}^{(j)}$$
$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \quad i, k = 1, 2, \ldots m)$$

Ich behaupte, die Constanten ε_j^{ik} müssen alle gleich Null sein. Wäre nämlich z. B. eine der m^2 Grössen ε^{1k} von Null verschieden, so müsste die Determinante $E(r) = | \varepsilon_j^{1k} - \binom{k}{j} r |$ $k, j = 1, 2, \ldots m$ entweder wenigstens für einen von Null verschiedenen Werth von r verschwinden, oder sie müsste, wenn sie durch r^n theilbar ist, wenigstens einen Elementartheiler von höherer als der ersten Ordnung haben.

Tritt der letztere Fall ein, so kann man zwei Werthsysteme, deren Elemente nicht alle verschwinden, $e_1\, e_2 \ldots e_m$ und $e_1'\, e_2' \ldots e_m'$ so bestimmen, dass

$$\sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h} e_h = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h} e_h' = e_j \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

Setzt man nun

$$\sum_{i=1}^{m} e_i c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} e_i' c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu}' \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

so bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)} k_{\nu\mu} - k_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}^{(1)} \right) = 0 \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)} k_{\nu\mu}' - k_{\lambda\nu}' c_{\nu\mu}^{(1)} \right) = k_{\lambda\mu} \end{aligned}\right\} \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Aber diese Gleichungen können nach Hülfssatz (3) nur dann statt haben, wenn alle n^2 Grössen $k_{\lambda\mu}$ verschwinden.

Dies ist aber unmöglich, weil einerseits nicht alle m Grössen e_i Null sind, und andererseits die m inf. Transformationen $C_i(f)$ linear unabhängig sind.

Nehmen wir nunmehr an, die Determinante $E(r)$ verschwinde für einen von Null verschiedenen Werth ω von r. Unter dieser Voraussetzung kann man m Grössen $e_1\, e_2 \ldots e_m$, die nicht alle gleich Null sind, so bestimmen, dass

$$\sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h}\, e_h = \omega\, e_j \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots m$$

Setzen wir wieder zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{m} e_i\, c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu}$$

Diese Grössen $k_{\lambda\mu}$ genügen der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)}\, k_{\nu\mu} - k_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}^{(1)}\right) = \omega\, k_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Aber diese Gleichungen können nach Hülfssatz (2) nur dann bestehen, wenn entweder alle n^2 Grössen $k_{\lambda\mu}$ verschwinden oder wenn diese Grössen ein reguläres System erster Art bilden. Beides ist durch unsere Voraussetzungen ausgeschlossen.

Damit ist bewiesen: die Coefficienten der vorgelegten m inf. Transformationen genügen den Gleichungen

$$(S) \quad \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)}\, c_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0$$

$$\text{für } \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \quad i, k = 1, 2, \ldots m$$

Es sind somit die Voraussetzungen erfüllt, auf denen der Hülfssatz (4) beruht, und man kann daher n^2 Grössen $d_\mu^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$(T) \quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)}\, d_\mu^{(\sigma)}\, r_\sigma^{(i)} = d_\lambda^{(\sigma)}$$

$$\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n; \quad i = 1, 2, \ldots m$$

Führt man an Stelle der inf. Transformationen $C_i(f)$ m andere linear unabhängige inf. Transformationen

$$K_i(f) = \sum_{h=1}^{m} q_{ih}\, C_h(f) \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

ein, so treten in den Gleichungen (T) an Stelle der Grössen $r_\sigma^{(i)}$ die Grössen

$$\varrho_\sigma^{(i)} = \sum_{h=1}^{m} q_{ih}\, r_\sigma^{(h)}$$

während die Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ unverändert bleiben.

Ich behaupte nun: man kann die verfügbaren Grössen q_{ih} so wählen, dass

1. auch die Grössen $\varrho_\sigma^{(i)}$ — ebenso wie die Grössen $r_\sigma^{(i)}$ — ganze Zahlen sind, und dass

2. die aus m Spalten des Systems

$$\begin{matrix} \varrho_1^{(1)} & \varrho_2^{(1)} \ldots & \varrho_n^{(1)} \\ \varrho_1^{(2)} & \varrho_2^{(2)} \ldots & \varrho_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \varrho_1^{(m)} & \varrho_2^{(m)} \ldots & \varrho_n^{(m)} \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten m^{ten} Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Zum Beweise ist zunächst zu bemerken: weil nach Voraussetzung die m inf. Transformationen $C_i(f)$ linear unabhängig sind, so können nicht alle Determinanten m^{ten} Grades, die aus m Spalten des Systems

$$(R) \qquad \begin{matrix} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} \ldots & r_n^{(1)} \\ r_1^{(2)} & r_2^{(2)} \ldots & r_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ r_1^{(m)} & r_2^{(m)} \ldots & r_n^{(m)} \end{matrix}$$

gebildet sind, verschwinden. Wir können ferner voraussetzen, dass nicht alle n zu einer inf. Transformation $C_i(f)$ gehörigen Grössen

$$r_1^{(i)} \quad r_2^{(i)} \ldots \quad r_n^{(i)}$$

einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Wären nämlich diese n Zahlen durch die Zahl a theilbar, so hätte man nur die inf. Transformation $C_i(f)$ durch $\frac{1}{a} C_i(f)$ zu ersetzen.

Um nun unsere Behauptung zu beweisen, gehen wir von der Annahme aus, dass nicht alle Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen des Systems (R) angehören, einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor besitzen. Diese Voraussetzung ist, wenn nicht für grössere h, so doch sicher für $h = 2$ erfüllt. Es sei sodann a der grösste gemeinschaftliche Divisor aller der Unterdeterminanten h^{ten} Grades, deren Elemente den h ersten Zeilen von (R) angehören. Unter den Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen von (R) angehören, ist mindestens eine nicht durch a theilbar. Es sei dies die aus den Elementen der $h-1$ ersten Spalten gebildete Determinante D_{h-1}. Unter den Unterdeterminanten h^{ten} Grades, deren Elemente den h ersten Zeilen von (R) angehören und die alle Elemente von D_{h-1} enthalten, hat mindestens eine einen von Null verschiedenen Werth. Es sei dies die aus den Elementen der h ersten Spalten gebildete Determinante D_h. Es sei ferner b der grösste gemeinschaftliche Divisor von D_{h-1} und a, so dass jedenfalls $b < a$ ist. Endlich sei t eine Wurzel der Congruenz $t\, R_{h-1} \equiv b \mod a$.

Wir lassen nun an Stelle der inf. Transformation $C_h(f)$ die Transformation

$$K(f) = \frac{1}{a}\left(t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}} C_1(f) + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}} C_2(f) \ldots \right.$$
$$\left. + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}} C_{h-1}(f) + b\, C_h(f)\right)$$

treten. Dementsprechend tritt an Stelle des Zahlensystems (R) ein Zahlensystem (R'), das sich von (R) nur in den

Elementen der h^{ten} Zeile unterscheidet, indem die Zahlen $r_\sigma^{(h)}$ durch die Zahlen

$$\varrho_\sigma = \frac{1}{a}\left(t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}} r_\sigma^{(1)} + t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}} r_\sigma^{(2)} \ldots \right.$$
$$\left. + t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}} r_\sigma^{(h-1)} + b\, r_\sigma^{(h)}\right)$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots n)$$

ersetzt sind. Die Grössen ϱ_σ sind ganze Zahlen, denn der Zähler von ϱ_σ ist nach dem Modul a dem t-fachen einer der Unterdeterminanten h^{ten} Grades congruent, die aus den Elementen der h ersten Zeilen des Systems (R) gebildet sind, er ist also durch a theilbar.

Man überzeugt sich nun leicht, dass b der grösste gemeinschaftliche Divisor der Unterdeterminanten h^{ten} Grades ist, die aus den Elementen der h ersten Zeilen des Systems (R') gebildet sind. An Stelle des gemeinschaftlichen Divisors a ist somit ein kleinerer gemeinschaftlicher Divisor b getreten.

Es ist nun klar, dass bei wiederholter Anwendung des eben durchgeführten Verfahrens an Stelle des Systems (R) ein System (R_1) von der Beschaffenheit tritt, dass die Unterdeterminanten h^{ten} Grades, die aus den Elementen der h ersten Zeilen gebildet sind, keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr besitzen. Aus diesem System (R_1) leitet man dann in analoger Weise ein System (R_2) von der Beschaffenheit ab, dass auch die Unterdeterminanten $h+1^{\text{ten}}$ Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr besitzen u. s. w.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, die inf. Transformation $C_1(f)\ C_2(f) \ldots C_m(f)$ seien von Anfang an so gewählt, dass die aus m Spalten des Systems (R) gebildeten Determinanten m^{ten} Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen.

Unter dieser Voraussetzung bezeichne ich die genannten

inf. Transformationen als ein kanonisches System inf. Transformationen.

Die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution unserer m-gliedrigen Gruppe A sind — wie in der Einleitung bemerkt worden ist — durch Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}^{(j)}\, P_j^{(i)} \qquad \begin{array}{l} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{array}$$

und die Anfangsbedingungen $a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 1 \ldots \quad u_m = 1$$

bestimmt. Ich setze nun $P_j^{(i)} = 0$, wenn i und j ungleich sind und $P_i^{(i)} = \frac{1}{u_i}$. Dass diese Festsetzung nicht gegen die Integrabilitätsbedingung verstösst, wird sich im Folgenden von selbst ergeben.

Die vorstehenden Differentialgleichungen kann man wegen der Gleichungen (T) durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{u_i}\, r_\sigma^{(i)} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)}$$
$$(\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n; \; i = 1, 2, \ldots m)$$

und aus diesen ergibt sich bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)} = u_1^{r_\sigma^{(1)}}\, u_2^{r_\sigma^{(2)}} \ldots u_m^{r_\sigma^{(m)}}\, d_\lambda^{(\sigma)}$$
$$(\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Durch diese n^2 Gleichungen sind die Substitutionscoefficienten als rationale Funktionen der Parameter bestimmt. Um zu beweisen, dass auch umgekehrt die Parameter rationale Funktionen der Substitutionscoefficienten sind, nehmen wir an, den beiden Werthsystemen der Parameter

$$u_1\; u_2 \ldots u_m \text{ und } v_1\; v_2 \ldots v_m$$

entspreche dasselbe Werthsystem der Grössen $a_{\lambda\mu}$, und wir beweisen, dass dann nothwendig

$$v_1 = u_1 \quad v_2 = u_2 \,.\,.\quad v_m = u_m$$

Aus unserer Voraussetzung ergibt sich

$$\left(\frac{v_1}{u_1}\right)^{r_\sigma^{(1)}} \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^{r_\sigma^{(2)}} \cdot\cdot \left(\frac{v_m}{u_m}\right)^{r_\sigma^{(m)}} = 1 \qquad \sigma = 1, 2, \,.\,.\, n$$

und hieraus folgt, dass eine jede von den n Summen

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{m} r_\sigma^{(h)} \log \frac{v_h}{u_h}$$

eine ganze Zahl ist.

Wir setzen nun, unter N_σ eine ganze Zahl verstehend, die n Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{m} r_\sigma^{(h)} \log \frac{v_h}{u_h} = N_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \,.\,.\, n)$$

an und bilden von denselben alle die Combinationen zu m, die m von einander unabhängige Gleichungen umfassen. Die Auflösung eines dieser Gleichungssysteme ergibt die m Grössen $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{v_h}{u_h}$ als Quotienten, deren Zähler von den Zahlen N_σ abhängige, nicht näher bestimmte ganze Zahlen sind, und deren gemeinschaftlicher Nenner — die Auflösungsdeterminante — eine von den Determinanten m^{ten} Grades ist, die aus m Spalten des Systems (R) gebildet sind, und es ist klar, dass jede derartige Determinante, die nicht verschwindet, als Auflösungsdeterminante zu einem unserer Systeme von m Gleichungen gehört. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner der m Brüche $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{v_h}{u_h}$ muss daher gemeinschaftlicher Divisor aller der genannten Determinanten sein: er ist also $= 1$.

Demnach sind die Logarithmen der Quotienten $\frac{v_h}{u_h}$ Multipla von $2\pi i$ und es ist folglich $v_1 = u_1 \;\; v_2 = u_2 \,.\,.\;\; v_m = u_m$ w. z. b. w.

IV.

Die beiden Theile unseres Beweises, die sich auf Gruppen der ersten und der dritten Classe (s. Einleitung) beziehen, beruhen auf einem gemeinschaftlichen Grundgedanken. Ich beginne mit der Darlegung dieses Beweisprincips.

Es seien m reguläre, linear unabhängige, inf. Transformationen

$$C_1(f) \;\; C_2(f) \,.\,.\; C_m(f)$$

vorgelegt, die eine m-gliedrige Gruppe erzeugen. Wir bestimmen die zu einer jeden inf. Transformation $C_i(f)$ gehörige eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$ (s. Einleitung) und setzen dann diese m eingliedrigen Gruppen zu der m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1 u_2 \,.\,.\, u_m) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \,.\,.\; B_m(u_m)$$

zusammen.

Bezüglich der inf. Transformationen $C_i(f)$ machen wir nun die Voraussetzungen:

1. es sollen die q ersten von denselben für sich eine Gruppe bestimmen und ebenso sollen die $m-q$ letzten für sich eine Gruppe bestimmen.

Alsdann werden die q ersten unter den eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ sich zu einer q-gliedrigen Gruppe

$$A'(u_1 u_2 \,.\,.\, u_q) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \,.\,.\; B_q(u_q)$$

zusammensetzen und ebenso werden sich die $m-q$ letzten zu einer $m-q$-gliedrigen Gruppe

$$A''(u_{q+1}\, u_{q+2} \,.\,.\, u_m) = B_{q+1}(u_{q+1})\, B_{q+2}(u_{q+2}) \,.\,.\; B_m(u_m)$$

zusammensetzen.

Wir nehmen nun an, es sei bereits bewiesen:

2. Die Parameter $u_1 u_2 \ldots u_q$, von denen die Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A' abhängen, lassen sich als rationale Funktionen der Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ darstellen und ebenso sind die Parameter $u_{q+1} u_{q+2} \ldots u_m$, von denen die Coefficienten $a''_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A'' abhängen, rationale Funktionen der Coefficienten $a''_{\lambda\mu}$.

Bezüglich der Gruppe A'' machen wir noch die weitere Voraussetzung:

3. Unter den Potenzen einer beliebigen Substitution S der Gruppe A'' soll die identische Substitution nur dann vorkommen, wenn S selbst die identische Substitution ist, wenn also die der Substitution entsprechenden Parameter die Werthe haben, die in der Einleitung als Anfangswerthe der Parameter bezeichnet worden sind.

Aus dieser Voraussetzung ergibt sich in bekannter Weise, dass alle Potenzen einer Substitution S der Gruppe A'' unter einander verschieden sind.

Geht also die Substitution S^h aus der allgemeinen Substitution der Gruppe dadurch hervor, dass man den verfügbaren Parametern $u_{q+1} u_{q+2} \ldots u_m$ die Werthe $w_{q+1}^{(h)} w_{q+2}^{(h)} \ldots w_m^{(h)}$ ertheilt, so sind diese Werthsysteme $w_{q+1}^{(h)} w_{q+2}^{(h)} \ldots$, die den verschiedenen Potenzen von S entsprechen, alle unter einander verschieden.

Ich behaupte nun, die eingeführten Voraussetzungen reichen für den Beweis hin, dass sich die Parameter $u_1 u_2 \ldots u_m$ rational durch die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A darstellen lassen.

Zum Beweis ist zunächst zu bemerken:

Weil die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ rationale Funktionen der Parameter $u_1 u_2 \ldots u_m$ sind, so hängen umgekehrt die Parameter algebraisch von den Substitutionscoefficienten ab und weil die Gruppe A m-gliedrig ist, also über m der Substitutionscoefficienten durch geeignete Wahl der Parameter

verfügt werden kann, so kann einem Werthsystem der Substitutionscoefficienten nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen der Parameter entsprechen. Um die eben aufgestellte Behauptung zu beweisen, genügt es also zu zeigen:

Wenn einem Werthsysteme der Substitutionscoefficienten zwei verschiedene Werthsysteme der Parameter entsprechen, so entsprechen ihm unendlich viele Werthsysteme der Parameter.

Nehmen wir, um diesen Nachweis zu führen, an, den beiden Parametersystemen

$$u_1\, u_2 \,..\, u_m \quad \text{und} \quad v_1\, v_2 \,..\, v_m$$

entspreche dieselbe Substitution der Gruppe A. Es sei also

$$(G) \quad A\,(u_1\, u_2 \,..\, u_m) = A\,(v_1\, v_2 \,..\, v_m)$$

ohne dass gleichzeitig die m Gleichungen $v_1 = u_1$ $v_2 = u_2$ .. bestehen. Da allgemein $A = A'\,A''$ so kann man die symbolische Gleichung (G) durch die folgende ersetzen:

$$(G') \quad \begin{aligned} &A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q)\, A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m) \\ &= A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)\, A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m) \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$(H) \quad \begin{aligned} &[A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)]^{-1}\, A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q)\, A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m) \\ &[A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m)]^{-1} = 1 \end{aligned}$$

wo in üblicher Weise die identische Substitution mit 1 bezeichnet ist.

Wegen des Gruppencharakters der Substitutionen A' und A'' kann man Funktionen $w_1\, w_2 \,..\, w_q$ von $u_1\, u_2 \,..\, u_q$ und $v_1\, v_2 \,..\, v_q$ und Funktionen $w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m$ von u_{q+1} $u_{q+2} \,..\, u_m$ und $v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m$ derart bestimmen, dass

$$(J) \quad [A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)]^{-1}\, A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q) = A'\,(w_1\, w_2 \,..\, w_q)$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} &A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m)\, [A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m)]^{-1} \\ &= A''\,(w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m) \end{aligned}$$

Nach unserer zweiten Voraussetzung hängen diese Funktionen w rational von ihren Argumenten ab.

Setzen wir sodann für beliebige positive und negative Exponenten h

$$(K)\qquad \begin{aligned} [A'(w_1 w_2 \ldots w_q)]^h &= A'(w_1^{(h)} w_2^{(h)} \ldots w_q^{(h)}) \\ [A''(w_{q+1} w_{q+2} \ldots w_m)]^h &= A''(w_{q+1}^{(h)} w_{q+2}^{(h)} \ldots w_m^{(h)}) \end{aligned}$$

so sind auch die Grössen $w_1^{(h)} w_2^{(h)} \ldots w_q^{(h)}$ rationale Funktionen von $u_1 u_2 \ldots u_q$ und $v_1 v_2 \ldots v_q$ und die Grössen $w_{q+1}^{(h)} w_{q+2}^{(h)} \ldots w_m^{(h)}$ rationale Funktionen von $u_{q+1} u_{q+2} \ldots u_m$ und $v_{q+1} v_{q+2} \ldots v_m$.

Die Substitution

$$A''(w_{q+1} w_{q+2} \ldots w_m)$$

ist von der identischen Substitution verschieden.

Denn andernfalls wäre

$$A''(u_{q+1} u_{q+2} \ldots u_m) = A''(v_{q+1} v_{q+2} \ldots v_m)$$

und nach unserer zweiten Voraussetzung folgt hieraus $v_{q+1} = u_{q+1}$ $v_{q+2} = u_{q+2} \ldots v_m = u_m$.

Wegen (G') wäre nun auch

$$A'(u_1 u_2 \ldots u_q) = A'(v_1 v_2 \ldots v_q)$$

also auf Grund der zweiten Voraussetzung auch

$$v_1 = u_1 \quad v_2 = u_2 \ldots v_q = u_q$$

im Widerspruch mit der Annahme, von der wir ausgegangen sind.

Aus unserer dritten Voraussetzung ergibt sich nunmehr, dass die Werthsysteme

$$w_{q+1}^{(h)} w_{q+2}^{(h)} \ldots w_m^{(h)}$$

alle untereinander verschieden sind.

Nun folgt aus (H) bei Berücksichtigung von (J) und (K)

$$A'(w_1 w_2 \ldots w_q)\, A''(w_{q+1} w_{q+2} \ldots w_m) = 1$$

$$\begin{aligned} &[A'(w_1 w_2 \ldots w_q)^h\, [A''(w_{q+1} w_{q+2} \ldots w_m)]^h \\ &= A'(w_1^{(h)} w_2^{(h)} \ldots w_q^{(h)})\, A''(w_{q+1}^{(h)} w_{q+2}^{(h)} \ldots w_m^{(h)}) \\ &= A(w_1^{(h)} w_2^{(h)} \ldots w_m^{(h)}) = 1 \end{aligned}$$

für beliebige positive und negative Exponenten h.

Es entsprechen also der identischen Substitution unendlich viele verschiedene Werthsysteme der Parameter und hieraus schliesst man leicht, dass einem jeden System der Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ unendlich viele Werthsysteme der Parameter entsprechen.

Damit ist bewiesen, dass die Annahme, die Parameter seien nicht rationale Funktionen der Substitutionscoefficienten zu einem Widerspruch führt.

Durch ganz analoge Betrachtungen beweist man:

Unter den Potenzen der Substitution

$$A(u_1 u_2 \cdot u_m) = A'(u_1 u_2 \cdot \cdot u_q) A''(u_{q+1} u_{q+2} \cdot \cdot u_m)$$

kann nur dann die identische Substitution auftreten, wenn sich die Substitution

$$A''(u_{q+1} u_{q+2} \cdot \cdot u_m)$$

auf die identische Substitution reducirt.

V.

Der Theil des Beweises, der sich auf Gruppen der ersten Classe bezieht, bietet nun keine Schwierigkeit mehr.

Ich nehme zunächst an, es sei nur eine reguläre inf. Transformation erster Art $C(f)$ vorgelegt. Die zu dieser inf. Transformation gehörige eingliedrige Gruppe $B(u)$ ist in meiner früheren Abhandlung (S. 122) in expliciter Form dargestellt werden. Aus den daselbst gegebenen Formeln ergibt sich

1. Der Parameter u lässt sich rational durch die Coefficienten $b_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe B darstellen.

Ferner: Setzt man zwei Substitutionen der Gruppe $B(u)$ und $B(v)$ zusammen, so ergibt sich

$$B(u)\, B(v) = \mathrm{B}(u + v)$$

Es ist somit

$$[B(u)]^h = B(h\,u)$$

Die identische Substitution entspricht dem Parameterwerth $u = 0$. Daraus folgt

2. In der Reihe der Potenzen der Substitution $B(u)$ kann die identische Substitution nur dann auftreten, wenn $u = 0$, also schon die Substitution $B(u)$ selbst die identische Substitution ist.

Es sei nun eine m-gliedrige Gruppe der ersten Classe vorgelegt.

$$C_1(f)\;\; C_2(f) \,..\; C_m(f)$$

seien untereinander linear unabhängig, im Uebrigen aber beliebige inf. Transformationen derselben. Sie sind alle regulär von der ersten Art, weil die Gruppe nach ihrer Definition keine anderen inf. Transformationen enthält.

Zwischen diesen m inf. Transformationen bestehen Relationen der Form

$$C_i\, C_k(f) - C_k\, C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik}\, C_j(f) \qquad i, k = 1, 2, \,..\, m$$

Ich behaupte, die charakteristische Determinante

$$\left| \varepsilon_j^{ik} - \binom{k}{j} r \right| \qquad k, j = 1, 2, \,..\, m$$

kann für keinen von Null verschiedenen Werth von r verschwinden.

Nehmen wir nämlich an, diese Determinante verschwinde für den von Null verschiedenen Werth $r = \omega$, dann kann man eine lineare Combination $K(f)$ der inf. Transformationen $C_1(f)\;\; C_2(f) \,..\; C_m(f)$ derart bestimmen, dass

$$C_i\, K(f) - K\, C_i(f) = \omega\, C_i(f)$$

Aber dies ist nach dem ersten Hülfssatz des Art. II unmöglich, weil $C_i(f)$ regulär von der ersten Art ist.

Daraus folgt, dass die Gruppen erster Classe zu den-

jenigen Gruppen gehören, die H. Killing als Gruppen vom Rang Null bezeichnet hat.

Für diese Gruppen gilt der Satz:[1])

Man kann die inf. Transformationen $C_i(f)$ so wählen, dass sie den Relationen

$$(J) \quad C_i\, C_k(f) - C_k\, C_i(f) = \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j^{ik}\, C_j(f)$$

$$(k = 1, 2, \ldots i-1;\ i = 2, 3, \ldots m)$$

genügen.

Das charakteristische an den Relationen (J) ist: sie haben zur Folge, dass die i inf. Transformationen

$$C_1(f)\ C_2(f) \ldots C_i(f)$$

für sich eine i-gliedrige Gruppe bestimmen, und zwar gilt dies für $i = 1, 2, \ldots m$.

Ein System von m unter einander linear unabhängigen Transformationen, das den Relationen (J) genügt, bezeichne ich als kanonisches System.

Um nun die m-gliedrige Gruppe A zu bestimmen, die von den m inf. Transformationen $C_i(f)$ erzeugt ist, bestimmen wir zunächst die zu einer jeden inf. Transformation $C_i(f)$ gehörige eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$ und setzen dann diese m eingliedrigen Gruppen zu der m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1 u_2 \ldots u_m) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \ldots B_m(u_m)$$

zusammen. Da die inf. Transformationen

$$C_1(f)\ C_2(f) \ldots C_{m-1}(f)$$

für sich eine Gruppe bestimmen, so setzen sich die $m-1$ eingliedrigen Gruppen

$$B_1(u_1)\, B_2(u_2) \ldots B_{m-1}(u_{m-1})$$

---

1) Dissertation von Umlauf: Ueber die Zusammensetzung der Gruppen vom Rang Null. Leipzig 1891. Vergl. auch Engel, Leipziger Berichte 1887 S. 95.

zu einer $m-1$-gliedrigen Gruppe

$$A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1}) = B_1(u_1) B_2(u_2) \ldots B_{m-1}(u_{m-1})$$

zusammen und $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$ entsteht durch Zusammensetzung von $A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1})$ und $B_m(u_m)$.

Um zu beweisen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, nehmen wir an, die Behauptung gelte für Gruppen, deren Gliederzahl kleiner als m ist, und beweisen, dass sie dann auch für m-gliedrige gilt. Da sie für eingliedrige Gruppen gilt, gilt sie dann allgemein.

Für die Gruppe A' gelten auf Grund unserer Annahme die Voraussetzungen, die im vorigen Artikel bezüglich der dort mit A' bezeichneten Gruppe gemacht worden sind; für die eingliedrige Gruppe gelten die im vorigen Artikel bezüglich der Gruppe A'' gemachten Voraussetzungen. Somit ergibt sich der Beweis unserer Behauptung aus den Betrachtungen des vorigen Artikels.

Die Gruppen erster Classe haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass unter den Potenzen einer Substitution $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$, die der Gruppe angehört, nur dann die identische Substitution auftreten kann, wenn sich die Substitution $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$ selbst auf die identische Substitution reducirt. Der Beweis ergiebt sich aus der Schlussbemerkung des vorigen Art. Darnach muss nämlich, damit unter den Potenzen der Substitution

$$A(u_1 u_2 \ldots u_m) = A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1}) B_m(u_m)$$

die identische Substitution vorkommt, $B_m(u_m)$ die identische Substitution sein, woraus $u_m = 0$ folgt. Man schliesst dann in derselben Weise weiter, dass sich jede der Substitutionen $B_{m-1}(u_{m-1}) B_{m-2}(u_{m-2}) \ldots B_1(u_1)$ auf die identische Substitution reducirt, dass also $u_1 = u_2 = u_3 \ldots = u_m = 0$ ist.

Aus der Definition der Gruppen erster Classe hat sich ergeben: man kann m untereinander linear unabhängige

inf. Transformationen der Gruppe so wählen, dass 1) jede derselben regulär von der ersten Art ist, und dass 2) die Zusammensetzung der Gruppe durch Gleichungen der Form (J) bestimmt ist.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass umgekehrt diese beiden Eigenschaften eine Gruppe erster Classe — d. h. eine Gruppe, die nur reguläre inf. Transformationen erster Art enthält — charakterisiren. Ich unterlasse diesen Nachweis, weil er für das Folgende nicht nothwendig ist, und beschränke mich auf die Bemerkung, dass die beiden eben angeführten Eigenschaften für den Beweis hinreichen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, und dass keine Potenz einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe, die identische Substitution ergeben kann. Es ergibt sich dies unmittelbar aus dem Gang des gegebenen Beweises.

Im Folgenden wenden wir die Bezeichnung „Gruppe erster Classe" auf alle die Gruppen an, die die beiden eben genannten charakteristischen Eigenschaften besitzen.

VI.

Wir gehen nunmehr zu den Gruppen der dritten Classe über, die reguläre inf. Transformationen sowohl von der ersten als von der zweiten Art enthalten.

Es sei $C_1(f)$ eine beliebige in der Gruppe enthaltene reguläre inf. Transformation zweiter Art.

Unter den in der Gruppe enthaltenen inf. Transformationen $K(f)$, die mit $C_1(f)$ vertauschbar sind, d. h. der Relation $C_1 K(f) - K C_1(f) = 0$ genügen, wählen wir, — wenn es solche gibt — eine reguläre Transformation zweiter Art aus und bezeichnen sie mit $C_2(f)$. Gibt es weitere reguläre Transformationen zweiter Art, die mit $C_1(f)$ und

$C_2(f)$ vertauschbar und von diesen linear unabhängig sind, so bezeichnen wir eine derselben mit $C_3(f)$ u. s. w.

Nehmen wir an, es finden sich genau m_0 reguläre Transformationen zweiter Art

$$C_1(f)\ C_2(f)\,..\ C_{m_0}(f)$$

die untereinander linear unabhängig und paarweise vertauschbar sind. Diese bestimmen eine m_0-gliedrige Gruppe A_0, die der zweiten Classe angehört.[1]) Daran wird selbstredend nichts geändert, wenn wir an Stelle der inf. Transformationen

$$C_1(f)\ C_2(f)\,..\ C_{m_0}(f)$$

lineare Combinationen derselben treten lassen. Wir können desshalb voraussetzen, diese m_0 inf. Transformationen seien so gewählt, dass sie ein kanonisches System für die Gruppe A_0 bilden (Art. III).

Mit $$C_{m_0+1}(f)\ C_{m_0+2}(f)\,..\ C_m(f)$$

bezeichnen wir irgend welche untereinander und von $C_1(f)$ $C_2(f)\,..\ C_{m_0}(f)$ linear unabhängige inf. Transformationen der vorgelegten m-gliedrigen Gruppe A.

Die m inf. Transformationen $C_i(f)$ genügen Relationen der Form

$$(J)\quad C_i\,C_k(f) - C_k\,C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik}\,C_j(f) \qquad i, k = 1, 2, \,..\, m$$

Aus der Art, wie die m_0 ersten inf. Transformationen gewählt worden sind, folgt, dass

$$\varepsilon_j^{ik} = 0 \quad \text{für } i, k = 1, 2, \,..\, m_0 \text{ und } j = 1, 2, \,..\, m$$

Zwischen drei inf. Transformationen besteht die Jacobi'sche Identität[2])

---

1) Diese Zahl m_0 stimmt mit der Zahl überein, die H. Killing als Rang der Gruppe bezeichnet. Math. Annalen Bd. 33.

5) Lie, Transformationsgruppen I S. 94.

$$C_h(C_i C_k - C_k C_i) - (C_i C_k - C_k C_i) C_h + C_i(C_h C_h - C_h C_k)$$
$$-(C_k C_h - C_h C_k) C_i + C_k(C_h C_i - C_i C_h) - (C_h C_i - C_i C_h) C_k = 0$$

Sind i und k Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0$, so ist $C_i C_k - C_k C_i = 0$ und es folgt mit Rücksicht auf (J)

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{kh} (C_i C_j - C\ C_i) + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{hi} (C_k C_j - C_j C_k) = 0$$

und hieraus weiter

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} (\varepsilon_j^{kh} \varepsilon_l^{ij} + \varepsilon_j^{hi} \varepsilon_l^{kj}) C_l = 0$$

Die m inf. Transformationen $C_l(f)$ sind untereinander linear unabhängig, ferner ist $\varepsilon_j^{hi} = -\varepsilon_j^{ih}$ folglich ist

$$\sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_j^{ih} \varepsilon_l^{kj} - \varepsilon_j^{kh} \varepsilon_l^{ij}) = 0 \qquad \begin{matrix} i, k = 1, 2, \ldots m_0 \\ h, l = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

Repräsentiren wir das System der m^2 Constanten ε_j^{hi} $(h, j = 1, 2, \ldots m)$ durch das Symbol E_i, so lassen sich die vorstehenden Gleichungen durch die symbolischen Gleichungen

$$E_i E_k - E_k E_i = 0 \qquad i, k = 1, 2, \ldots m_0$$

repräsentiren. Die zu einem der m_0 Systeme E_i gehörige charakteristische Determinante kann nur Elementartheiler erster Ordnung besitzen. Denn andernfalls könnte man zwei nicht identisch verschwindende inf. Transformationen der Gruppe $K(f)$ und $K'(f)$ so bestimmen, dass

$$C_i K(f) - K C_i(f) = \omega K(f)$$
$$C_i K'(f) - K' C_i(f) = \omega K'(f) + K(f)$$

Aber dies ist wegen des dritten Hülfssatzes des Art. II nicht möglich.

Demnach genügen die m_0 Systeme E_i den Voraussetzungen, auf denen der vierte Hülfssatz des Art. II beruht. Man kann also ein System von m^2 Constanten $\gamma_k^{(h)}$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} \gamma_k^{(h)} = \omega_h^{(i)} \gamma_j^{(h)} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots m_0 \\ h, j = 1, 2, \ldots m. \end{array}$$

Von den Gleichungen (J) benützen wir nun diejenigen, die einem der Indiceswerthe $i = 1, 2, \ldots m_0$ entsprechen, und setzen zur Abkürzung

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^{(h)} C_j(f) = K_h(f) \qquad h = 1, 2, \ldots m$$

Es ergibt sich

$$(\Omega) \quad C_i K_h(f) - K_h C_i(f) = \omega_h^{(i)} K_h(f) \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots \\ h = 1, 2, \ldots \end{array}$$

Weil $\varepsilon_j^{ik} = 0$ für $i, k = 1, 2, \ldots m_0$; $j = 1, 2, \ldots$ kann man die Grössen $\gamma_k^{(h)}$ so wählen, dass

$$\gamma_k^{(i)} = \binom{k}{i} \text{ für } i = 1, 2, \ldots m_0; \; k = 1, 2, \ldots m$$

Es ist dann $K_i(f) = C_i(f)$ für $i = 1, 2, \ldots m_0$ und $= 0$ für $h, i = 1, 2, \ldots m_0$.

In dem aus m_0 Zeilen und m Spalten bestehenden S

$$\begin{array}{cccc} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \ldots & \omega_m^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \ldots & \omega_m^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{(m_0)} & \omega_2^{(m_0)} & \ldots & \omega_m^{(m_0)} \end{array}$$

haben also alle Elemente, die den ersten m_0 Spalten hören, den Werth Null.

Es kann der Fall eintreten, dass noch weitere S dieses Systems kein von Null verschiedenes Element enth Es seien dies etwa die auf die ersten m_0 Spalten folg m_0' Spalten, dagegen möge in jeder weiteren Spalte weni ein von Null verschiedenes Element vorkommen.

Jede inf. Transformation, deren Index $h > m_0 + m$ genügt somit einer Relation

$$C_i K_h(f) - K_h C_i(f) = \omega_h^{(i)} K_h(f) \qquad (i \leq m_0)$$

wo $\omega_h^{(0)}$ von Null verschieden ist. Daraus folgt: jede inf. Transformation $K_h(f)$ $(h > m_0 + m_0')$ ist regulär von der ersten Art (Art. II Hülfssatz 2) und es folgt überdies: die Grössen $\omega_h^{(0)}$ sind ganze Zahlen. Denn $\omega_h^{(0)}$ muss gleich der Differenz von zweien der Werthe r sein, für welche die zu $C_i(f)$ gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ verschwindet (Art II Anfang). Diese Determinante verschwindet aber nur für ganzzahlige Werthe von r, weil $C_i(f)$ regulär von der zweiten Art ist.

Bezüglich $m - m_0'$ von den inf. Transformationen

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_m(f)$$

steht nunmehr fest, dass sie regulär sind, nämlich von den m_0 ersten und von dem $m - m_0 - m_0'$ letzten. Die ersteren sind von der zweiten, die letzteren von der ersten Art. Es bleiben nur noch die m_0' inf. Transformationen übrig, die den Indices $m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots m_0 + m_0'$ entsprechen. Diese bedürfen einer besonderen Untersuchung, die im nächsten Art. durchgeführt wird.

Auf Grund der Formeln (Ω) kann nun die vorgelegte Gruppe in bemerkenswerther Weise in Untergruppen zerfällt werden. Zu diesem Zweck bilden wir zunächst — unter $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{m_0}$ ganze Zahlen verstehend — eine lineare Combination der inf. Transformationen zweiter Art

$$L(f) = \alpha_1 K_1(f) + \alpha_2 K_2(f) \ldots + \alpha_{m_0} K_{m_0}(f)$$

Aus den Gleichungen (Ω) folgt

$$L K_h(f) - K_h L(f) = \varrho_h K_h(f) \qquad h = 1, 2, \ldots m$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha_1 \omega_h^{(1)} + \alpha_2 \omega_h^{(2)} \ldots + \alpha_{m_0} \omega_h^{(m_0)} = \varrho_h$$

gesetzt ist.

Die zur Verfügung stehenden Zahlen α denken wir so gewählt, dass

1) ϱ_h nur dann $= 0$ ist, wenn gleichzeitig

$$\omega_h^{(1)} = 0 \;\; \omega_h^{(2)} = 0 \,.\,.\; \omega_h^{(m_0)} = 0$$

also wenn $h \leqq m_0 + m_0'$, und dass

2) zwei verschiedene Zahlen ϱ_h und ϱ_i nur dann einander gleich sind, wenn gleichzeitig

$$\omega_h^{(1)} = \omega_i^{(1)} \;\; \omega_h^{(2)} = \omega_i^{(2)} \,.\,.\; \omega_h^{(m_0)} = \omega_i^{(m_0)}$$

Die Indicesbezeichnung denken wir uns so gewählt, dass in der Reihe der Zahlen

$$\varrho_{m_0+m_0'+1} \quad \varrho_{m_0+m_0'+2} \cdots \varrho_m$$

die positiven den negativen und, unter Zahlen gleichen Vorzeichens, die dem absoluten Werthe nach grösseren den kleineren vorangehen. m_+ sei die Anzahl der positiven, m_- die Anzahl der negativen ϱ.

Bilden wir nun die Jacobi'sche Relation für die inf. Transformationen $K_h(f)$ $K_j(f)$ $L(f)$. Sie lautet:

$$\begin{aligned} L(K_h K_j - K_j K_h) - (K_h K_j - K_j K_h) L + K_h (K_j L - L K_j) \\ - (K_j L - L K_j) K_h + K_j (L K_h - K_h L) \\ - (L K_h - K_h L) K_j = 0. \end{aligned}$$

Die 4 letzten Glieder ergeben

$$-(\varrho_j + \varrho_h)(K_h K_j - K_j K_h)$$

Sei nun $K_h K_j - K_j K_h = \delta_1 K_1 + \delta_2 K_2 \,.\,.\, + \delta_m K_m$ wo $\delta_1 \delta_2 \,.\,.\, \delta_m$ Constante bedeuten, die in leicht zu übersehender Weise von den Constanten ε_j^{ik}, die in den Gleichungen (J) vorkommen, abhängen.

Nun erhält die Jacobi'sche Relation die Form

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i (L K_i - K_i L) - (\varrho_j + \varrho_h) \sum_{i=1}^{m} \delta_i K_i = 0$$

oder auch

$$\sum_{i=1}^{m} (\varrho_i - \varrho_j - \varrho_h) \delta_i K_i = 0$$

Weil die inf. Transformationen K_i untereinander linear unabhängig sind, so folgt hieraus

$$\delta_i = 0, \text{ wenn nicht } \varrho_i = \varrho_j + \varrho_h \text{ ist.}$$

Nehmen wir zunächst an, j und h seien Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0 + m_0'$. Dann ist $\varrho_j = 0$ $\varrho_h = 0$ also $\delta_i = 0$ wenn nicht auch $\varrho_i = 0$.

In dem Ausdruck $K_h K_j - K_j K_h$ kommen in diesem Fall nur die inf. Transformationen

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_{m_0+m_0'}(f)$$

vor. Diese $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen bestimmen also für sich eine Gruppe Γ, die die m_0-gliedrige Gruppe A_0 als Untergruppe enthält.

Nehmen wir zweitens an, j und h seien Zahlen aus der Reihe $m_0 + m_0' + 1, m_0 + m_0' + 2, \ldots m_0 + m_0' + m_+$, dann sind ϱ_j und ϱ_h positiv, also ist $\delta_i = 0$, wenn nicht auch ϱ_i positiv ist. Da ferner die positiven ϱ nach absteigender Grösse geordnet sind, so kann die Gleichung $\varrho_i = \varrho_j + \varrho_h$ nur dann bestehen, also nur dann δ_i von Null verschieden sein, wenn der Index i grösser als der grössere der beiden Indices j, h ist. In dem Ausdruck $K_h K_j - K_j K_h$ kommen also nur solche inf. Transformationen K_i vor, die positiven Werthen ϱ_i entsprechen und deren Index grösser als der grössere der beiden Indices j, h ist. Demnach bestimmen die m_+ inf. Transformationen, die zu positiven Werthen ϱ gehören, für sich eine Gruppe erster Classe A_+ (vergl. Art. V Schluss) und sie bilden ein kanonisches System inf. Transformationen derselben.

Ebenso bestimmen die m_- inf. Transformationen, die zu negativen Werthen von ϱ gehören, für sich eine Gruppe A_- und bilden für dieselbe ein kanonisches System.

Nehmen wir endlich drittens für h eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0 + m_0'$, für j eine Zahl aus der Reihe

$m_0 + m_0' + 1,\ m_0 + m_0' + 2, \ldots\ m_0 + m_0' + m_+$, so ist $\varrho_h = 0$ ϱ_j positiv und aus $\varrho_i = \varrho_h + \varrho_j$ folgt $\varrho_i = \varrho_j$ also auch ϱ_i positiv.

Man schliesst hieraus: die inf. Transformationen, die zu verschwindenden, und diejenigen, die zu positiven Werthen ϱ gehören, bestimmen zusammengenommen eine Gruppe. Mit anderen Worten: die $m_0 + m_0'$-gliedrige Gruppe Γ und die m_+-gliedrige Gruppe A_+ setzen sich zu einer Gruppe H zusammen, deren Gliederzahl $m_0 + m_0' + m_+ = m - m_-$ ist.

VII.

Die Untergruppe Γ bedarf einer eingehenderen Untersuchung.

Von den zu dieser Untergruppe gehörigen inf. Transformationen

$$K_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad i = 1, 2, \ldots m_0 + m_0'$$

wissen wir:

1) Die ersten m_0 derselben

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_{m_0}(f)$$

sind regulär von der zweiten Art und sie bestimmen für sich eine Untergruppe A_0.

2) Diese m_0 inf. Transformationen sind mit allen inf. Transformationen der Untergruppe Γ vertauschbar, es ist also

$$K_i K_h(f) - K_h K_i(f) = 0$$
$$\text{für } i = 1, 2, \ldots m_0;\ h = 1, 2, \ldots m_0 + m_0'.$$

In nicht symbolischer Form geschrieben heisst das:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(i)} k_{\nu\mu}^{(h)} - k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0$$

für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$ und die eben angegebenen Werthe der Indices i, h.

Da die $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen eine Gruppe bestimmen, so bestehen weitere Relationen der Form

$$3)\quad \sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(l)} - k_{\lambda\nu}^{(l)} k_{\nu\mu}^{(h)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{lh} k_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n;\ h, l = m_0 + 1,\ m_0 + 2, \ldots m_0 + m_0'.$$

Wir werden nun beweisen: die m_0' inf. Transformationen $K_{m_0+1}(f)\ K_{m_0+2}(f) \ldots K_{m_0+m_0'}(f)$ können so gewählt werden, dass sie für sich eine m_0'-gliedrige Gruppe A_0' bestimmen, die der ersten Classe angehört. Ist dies erwiesen, so ist klar, dass die genannten inf. Transformationen so gewählt werden können, dass sie ein kanonisches System bilden.

Zum Beweise bemerken wir zunächst:

Die Coefficienten der m_0 inf. Transformationen

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_{m_0}(f)$$

genügen den Voraussetzungen des vierten Hülfssatzes des Art. II. Man kann also ein System von n^2 Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma^{(i)} d_\lambda^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n;\ i = 1, 2, \ldots m_0$$

Wir führen nun neue Variable durch die Substitution

$$(S)\quad x_\lambda = \sum_{\sigma=1}^{n} d_\lambda^{(\sigma)} y_\sigma \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

ein, wodurch die inf. Transformation $K_h(f)$ in

$$\bar{K}_h(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \bar{k}_{\lambda\mu}^{(h)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda} y_\mu$$

übergehen möge. Auf Grund des Weierstrass'schen Theorems stimmen die zu $K_h(f)$ und $\bar{K}_h(f)$ gehörigen charakteristischen Determinanten in ihren Elementartheilern überein. Diese beiden inf. Transformationen sind also gleichzeitig regulär

oder irregulär. Es ist ferner klar, dass zwischen den inf. Transformationen $\overline{K}_h(f)$ genau dieselben Relationen (2) und (3) bestehen, wie zwischen den inf. Transformationen $K_h(f)$.

Nun ist für $i = 1, 2, \ldots m_0$

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} d_\mu^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} y_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n} r_\sigma^{(i)} \frac{\partial f}{\partial y_\sigma} y_\sigma$$

$$\text{also } \bar{k}_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu} r_\lambda^{(i)}$$

und aus (2)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\bar{k}_{\lambda\nu}^{(i)} \bar{k}_{\nu\mu}^{(h)} - \bar{k}_{\lambda\nu}^{(h)} \bar{k}_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots m_0 \\ h = m_0 + 1, m_0 + 2 \ldots m_0 + m_0' \end{array}$$

folgt: $\bar{k}_{\lambda\mu}^{(h)} = 0$ wenn nicht $r_\lambda^{(i)} = r_\mu^{(i)}$ für $i = 1, 2, \ldots m_0$.

Ist also etwa

$$r_1^{(i)} = r_2^{(i)} \ldots = r_\varkappa^{(i)} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots m_0$$

aber für keinen Index $\nu > \varkappa$ gleichzeitig

$$r_\nu^{(i)} = r_1^{(i)} \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots m_0$$

so hängen die Coefficienten der Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ $\frac{\partial f}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$ in $\overline{K}_h(f)$ nur von $y_1\, y_2 \ldots y_\varkappa$ ab, und diese Variabeln kommen in den Coefficienten der übrigen Differentialquotienten nicht vor.

Die Variabeln $y_1\, y_2 \ldots y_\varkappa$ lassen sich also derart in eine Reihe von Systemen vertheilen, dass die Coefficienten der Differentialquotienten nach den Variabeln eines Systems nur von den Variabeln dieses Systems abhängen. Die Anzahl dieser Systeme sei q und die Anzahl der Variabeln, die dem σ^{ten} System angehören, sei n_σ. Dieselben mögen — unter Abänderung der bisher gebrauchten Bezeichnung — mit

$$y_1^{(\sigma)}\; y_2^{(\sigma)} \ldots y_{n_\sigma}^{(\sigma)}$$

bezeichnet werden.

Es ergeben sich nun für unsere $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen Ausdrücke folgender Gestalt:

$$\bar{K}_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} R_\sigma^{(i)} y_\lambda^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} \qquad i = 1, 2, \ldots m_0$$

$$\bar{K}_h(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} y_\mu^{(\sigma)}$$

$$h = m_0 + 1,\ m_0 + 2 \ldots m_0 + m_0'$$

Wir beweisen nun zunächst: die m_0' inf. Transformationen $\bar{K}_{m_0+1}(f)\ \bar{K}_{m_0+2}(f) \ldots \bar{K}_{m_0+m_0'}(f)$ können so gewählt werden, dass eine jede derselben regulär von der ersten Art ist.

Zu dem Zweck bemerken wir, dass unter den genannten Transformationen keine vorkommen kann, die regulär von der zweiten Art ist. Denn eine solche müsste von $\bar{K}_1(f)\ \bar{K}_2(f) \ldots \bar{K}_{m_0}(f)$ linear unabhängig und mit jeder dieser inf. Transformationen vertauschbar sein. Es gäbe also entgegen unserer Voraussetzung (Art. VI Anfang) in der Gruppe A mehr als m_0 linear unabhängige inf. Transformationen zweiter Art, die paarweise vertauschbar sind. Eine jede der m_0' Transformationen $\bar{K}_h(f)$ ist also entweder regulär von der ersten Art oder irregulär.

Nehmen wir an, die inf. Transformation $\bar{K}_h(f)$ sei irregulär. Man kann dann (s. Einleitung) eine reguläre Transformation erster Art $L(f)$ und eine gewisse Anzahl regulärer Transformationen zweiter Art $L_1(f)\ L_2(f) \ldots$ so bestimmen, dass

$$\bar{K}_h(f) = L(f) + \varrho_1 L_1(f) + \varrho_2 L_2(f) \ldots + \varrho_\beta L_\beta(f).$$

In den inf. Transformationen $L(f)\ L_1(f)\ L_2(f) \ldots$ sind — wie man sich leicht überzeugt[1]) — die Variabeln in genau derselben Weise getrennt, wie in $\bar{K}_h(f)$, und daraus

1) Vergl. die Inv. S. 123 gegebenen Formeln.

folgt, dass eine jede der inf. Transformationen $L(f)$ $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. mit den inf. Transformationen $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)$ .. $\overline{K}_{m_0}(f)$ vertauschbar ist. Weil unsere Gesammtgruppe A regulär ist, so gehört ihr eine jede der regulären Transformationen an (s. Einleitung), in die die irreguläre Transformation $\overline{K}_h(f)$ zerlegt worden ist, und weil eine jede der regulären Transformationen zweiter Art $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. mit $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)$ .. $\overline{K}_{m_0}(f)$ vertauschbar ist, so kann keine der Transformationen $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. von $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)$ .. $\overline{K}_{m_0}(f)$ linear unabhängig sein. Denn sonst gehörten gegen unsere Voraussetzung der Gruppe A mehr als m_0 untereinander linear unabhängige reguläre Transformationen zweiter Art an, die paarweise vertauschbar sind. Man kann nun offenbar die der Gruppe Γ angehörige irreguläre Transformation $\overline{K}_h(f)$ durch die ebenfalls der Gruppe Γ angehörige reguläre Transformation erster Art $L(f)$ ersetzen.

Nachdem die Zulässigkeit dieser Annahme bewiesen ist, setzen wir nunmehr jede der inf. Transformationen $\overline{K}_{m_0+1}(f)$ $\overline{K}_{m_0+2}(f)$ .. $\overline{K}_{m_0+m_0'}(f)$ als regulär von der ersten Art voraus.

Damit die inf. Transformation

$$\overline{K}_h(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \left(\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} y_\mu^{(\sigma)} \right)$$

regulär von der ersten Art ist, muss jedes der q Coefficientensysteme $k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma)$ regulär von der ersten Art sein. In der Entwicklung der charakteristischen Determinante

$$| k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} - \binom{\lambda}{\mu} r | \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma$$

nach Potenzen von r verschwinden also die Coefficienten aller Potenzen von r, abgesehen von r^{n_σ}, und es ist insbesondere

$$\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, .. q; \; h = m_0 + 1, \; m_0 + 2 .. \; m_0 + m_0'$$

Die unter (3) angegebenen Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(l)} - k_{\lambda\nu}^{(l)} k_{\nu\mu}^{(h)} \right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{hl} k_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

gelten, wie bereits oben bemerkt worden ist, unverändert für die Coefficienten der transformirten inf. Transformationen.

Es ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n_\sigma} \left(k_{\lambda\nu}^{(h\sigma)} k_{\nu\mu}^{(l\sigma)} - k_{\lambda\nu}^{(l\sigma)} k_{\nu\mu}^{(h\sigma)} \right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{hl} k_{\nu\mu}^{(j\sigma)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma; \; \sigma = 1, 2, .. q; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

und hieraus folgen für $\lambda = \mu$, wegen

$$\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = 0 \qquad \text{für } h = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

$$\text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = n_\sigma R_\sigma^{(h)} \qquad \text{für } h = 1, 2, .. \; m_0$$

die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{m_0} \delta_j^{hl} R_\sigma^{(j)} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, .. q; \; h, l = m_0 + 1, m_0 + 2, .. m_0 + m_0'$$

Weil die inf. Transformationen

$$\overline{K}_1(f) \; \overline{K}_2(f) .. \; \overline{K}_{m_0}(f)$$

linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$\delta_j^{hl} = 0 \text{ für } h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'; \\ \text{und } j = 1, 2 .. \; m_0$$

In dem Ausdruck $\overline{K}_h \overline{K}_l(f) - \overline{K}_l \overline{K}_h(f)$ kommen demnach nur die inf. Transformationen

$$\overline{K}_{m_0+1}(f) \; \overline{K}_{m_0+2}(f) .. \; \overline{K}_{m_0+m_0'}(f)$$

vor. Diese m_0' inf. Transformationen bestimmen demnach für sich eine Gruppe A_0' und diese Gruppe gehört nothwendig der ersten Classe an. Denn die m_0'-gliedrige Gruppe A_0' ist regulär, weil sie m_0' linear unabhängige reguläre Transformationen enthält, und sie kann keine reguläre Transformation zweiter Art enthalten.

VIII.

Damit ist auch für die regulären Gruppen der dritten Classe ein kanonisches System inf. Transformationen nachgewiesen. Die m inf. Transformationen dieses Systems vertheilen sich auf vier Untergruppen $A_0\ A_0'\ A_+\ A_-$. Jede dieser Untergruppen ist regulär, und zwar gehört die erste A_0 der zweiten Classe an, die drei übrigen gehören zur ersten Classe. Die inf. Transformationen, die einer dieser Untergruppen angehören, sind so gewählt, dass sie ein kanonisches System für die betreffende Untergruppe bilden.

Für alle vier Untergruppen gilt nun der Satz:

Die Parameter der Gruppe lassen sich rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen.

Für die drei Gruppen erster Classe gilt überdies der Satz: Unter den Potenzen einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe kommt die identische Substitution nicht vor.

Wir haben nun weiter bewiesen:

Die Untergruppen A_0 und A_0' setzen sich zu einer Untergruppe Γ zusammen.

Die Untergruppen Γ und A_+ setzen sich zu einer Untergruppe H zusammen.

Endlich entsteht die m-gliedrige Gruppe A selbst durch Zusammensetzung von H und A_-. Durch Anwendung der Principien des Art. IV beweist man nun erst für die Unter-

gruppe Γ, dann für die Untergruppe H, endlich für die Gruppe A selbst den zu beweisenden Satz, dass sich die Parameter der Gruppe rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen.

Dass eine Gruppe A im Allgemeinen aus drei Untergruppen $\Gamma A_+ A_-$ zusammengesetzt werden kann, ergibt sich unmittelbar aus den sehr interessanten Sätzen des H. Killing über die Zusammensetzung von Gruppen.[1]) Für die hier verfolgten Zwecke konnten aber diese Sätze nicht benützt werden. Denn H. Killing beschränkt sich darauf, die Zusammensetzung der Gruppe zu untersuchen, und geht auf die Natur der einzelnen inf. Transformationen nicht weiter ein, während gerade diese für die vorliegende Untersuchung von wesentlicher Bedeutung ist. So gehören — solange man nur die Zusammensetzung der Gruppen in Betracht zieht — die Gruppen, die hier als Gruppen erster und zweiter Classe unterschieden worden sind, in dieselbe Kategorie: sie sind beide Gruppen vom Rang Null.

Sobald man aber die Substitutionen der Gruppe und die zugehörigen Invariantensysteme genauer untersucht, zeigen sie die allergrösste Verschiedenheit.

---

1) Math. Annalen, Bd. 31, 33, 34, 36.

Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome.

Von Gustav Bauer.

(*Eingelaufen 4. August.*)

Das Legendre'sche Polynom n^{ten} Grades sei nach Legendrescher Bezeichnung durch X_n bezeichnet; dann ist X_n Coefficient von z^n in der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots$$

und es berechnet sich hieraus

$$X_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right) \qquad \text{I.}$$

Diese Formel kann als Definition von X_n für jeden Werth von x gelten. Nun sagt Heine in seinem „Handbuch der Kugelfunktionen" 1. Aufl. 1861, S. 7: „Nach der Bemerkung von Euler in einem Briefe an Goldbach, dass in der Entwicklung von $\sqrt[n]{1-n^2a}$ nach aufsteigenden Potenzen von a alle Coefficienten von a ganze Zahlen werden, erkennt man sofort, dass X_n nur eine Potenz von 2 zum numerischen Nenner hat", indem er beifügt, dass ihm diese Eigenschaft der Polynome X_n von mir mitgetheilt worden sei.[1])

1) In der 2. Auflage seines Handbuchs, I. Th. S. 14, kommt Heine auf diese Eigenschaft der Polynome X_n zurück. Man kann hinzufügen,

Diese Bemerkung in Bezug auf die Coefficienten der Form I und der bekannte Satz, dass alle Polynome X_n für $x = 1$ den Werth 1 annehmen, ist, so viel ich weiss, das einzige, was bisher in zahlentheoretischer Beziehung von diesen Polynomen bekanntgegeben wurde.

Es soll nun hier zunächst gezeigt werden, dass diese Polynome auch die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzen, dass, wenn x irgend eine ungerade ganze Zahl ist, sie selbst ungerade ganze Zahlen sind.

2. Die Polynome X_n genügen bekanntlich der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2 X_n}{d x^2} - 2x\frac{d X_n}{d x} + n(n+1) X_n = 0 \qquad \text{II.}$$

Differentiirt man diese Gleichung wiederholt und setzt sodann in diesen Gleichungen $x = 1$, so ergiebt sich sofort die Relation

$$\frac{d^m X_n}{d x^m} = \frac{n(n+1) - m(m-1)}{2m} \cdot \frac{d^{m-1} X_n}{d x^{m-1}}$$
$$= \frac{(n-m+1)(n+m)}{2m} \frac{d^{m-1} X_n}{d x^{m-1}}$$

und hiemit, da $X_n = 1$ für $x = 1$,

$$\frac{d X_n}{d x} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{d^2 X_n}{d x^2} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3},$$
$$\frac{d^3 X_n}{d x^3} = \frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \quad \text{u. s. f.}$$

Mittels dieser Werthe erhält man die Entwicklung

$$X_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4}\frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2}$$
$$+ \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{(x-1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

---

sagt er hier, „dass sämmtliche Coefficienten mit 4^n multiplicirt ganze Zahlen sind". Diese Angabe ist nicht genau. Denn man beweist leicht mittelst dem in n^0 4 angegebenen Verfahren, dass die Coefficienten der Formel I höchstens 2^{n-1} im Nenner haben.

welche sich auch schreiben lässt

$$X_n = 1 + \frac{n(n+1)}{1^2}\frac{x-1}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1^2\cdot 2^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \cdots \tag{1}$$

Die Coefficienten von $\left(\frac{x-1}{2}\right)^k$ in dieser Entwicklung wollen wir mit $A_n^{(k)}$ bezeichnen, so dass

$$X_n = 1 + A_n^{(1)}\left(\frac{x-1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n, \tag{1'}$$

wo allgemein

$$A_n^{(k)} = \frac{(n-k+1)(n-k)\cdots(n+k)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2}. \tag{2}$$

Setzt man in dieser Reihe $-x$ statt x, so hat man zugleich

$$(-1)^n X_n = 1 - A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - + \cdots \tag{3}$$

und wenn man in 1) $x+2$ statt x setzt,

$$X_{n(x+2)} = 1 + A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots \tag{4}$$

Also ist auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(X_{n(x+2)} + (-1)^n X_n\right) &= 1 + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + A_n^{(4)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^4 + \cdots \\ \frac{1}{2}\left(X_{n(x+2)} - (-1)^n X_n\right) &= A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(3)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus Gleichung 3) folgt sofort für $x = 1$, dass die Coefficienten A_n der Relation genügen

$$1 - A_n^{(1)} + A_n^{(2)} - + \cdots \pm A_n^{(n)} = (-1)^n \qquad (6)$$

3. Es soll nun bewiesen werden, dass die Coefficienten A_n sämmtlich ganze gerade Zahlen sind.[1])

Hiezu haben wir zunächst zu fragen, wie oft eine gegebene Primzahl θ in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$ enthalten ist. Diese Frage ist schon von Legendre[2]) beantwortet. Ist nämlich $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$ die grösste ganze Zahl, welche in dem Bruch $\frac{N}{\theta}$ enthalten ist, so ist die gesuchte Zahl, d. i. der Exponent der höchsten Potenz von θ, welche in $1 \cdot 2 \cdots N$ enthalten ist, durch die Formel gegeben

$$\sigma = E\left(\frac{N}{\theta}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^2}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^3}\right) + \cdots,$$

wo die Reihe fortzusetzen ist, bis der Nenner θ^i grösser als N wird.

Theilt man nun N in zwei oder mehrere ganze Zahlen, z. B. in die drei Zahlen n, n', n'', sodass $N = n + n' + n''$,

---

1) Setzt man in den Gleichungen 1) 3) $x = \cos a$, $\frac{1-x}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} a$, $\frac{1+x}{2} = \cos^2 \frac{1}{2} a$, so werden dieselben

$$X_n(\cos a) = 1 - A_n^{(1)} \sin^2 \frac{1}{2} a + A_n^{(2)} \sin^4 \frac{1}{2} a - + \cdots$$

$$(-1)^n X_n(\cos a) = 1 - A_n^{(1)} \cos^2 \frac{1}{2} a + A_n^{(2)} \cos^4 \frac{1}{2} a - + \cdots$$

In dieser Form sind die Gleichungen längst bekannt und schon von Dirichlet gegeben worden (Crelle J. Bd. XVII). Aber man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die Coefficienten dieser Reihen sämmtlich ganze Zahlen sind, was allerdings auch wenig Interesse bietet, so lange man die Polynome X nur für Werthe von $x < 1$ betrachtet.

2) Legendre, Théorie des Nombres, 3me éd. 1830, T. I p. 10.

so ist klar, dass $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right)$ nicht kleiner sein kann als $E\left(\frac{n}{\theta^i}\right)$ $+ E\left(\frac{n'}{\theta^i}\right) + E\left(\frac{n''}{\theta^i}\right)$; wohl aber kann es grösser als diese Summe sein; denn bleiben bei der Division von n, n', n'' durch θ^i die Reste α, β, γ und ist $\alpha+\beta+\gamma > \theta^i$, so wird $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right)$ um 1 oder auch 2 grösser sein, als diese Summe. Hieraus folgt, dass für irgend eine Primzahl θ

$$\Sigma E\left(\frac{N}{\theta^i}\right) \geqq \Sigma E\left(\frac{n}{\theta^i}\right) + \Sigma E\left(\frac{n'}{\theta^i}\right) + \Sigma E\left(\frac{n''}{\theta^i}\right)$$

die Summen auf die Potenzen von θ ausgedehnt, die in N enthalten sind.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz[1]): In dem Ausdruck

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!\cdots}, \quad \text{wo } N = n + n' + n'' + \cdots,$$

ist jede in dem Nenner enthaltene Primzahl wenigstens ebenso oft im Zähler enthalten als im Nenner und der Ausdruck stellt mithin eine ganze Zahl dar.

Der Coefficient $A_n^{(k)}$ kann nun auf diese Form gebracht werden, nämlich

$$A_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!\,k!}$$

Es ist hier $N = n + k$, und diese Zahl ist in die 3 Theile $n-k$, k, k, zerlegt. Also ist $A_n^{(k)}$ eine ganze Zahl.

4. In dem besonderen Falle, wenn $\theta = 2$, ist für $N = 2^p$ die Zahl $\sigma = 2^p - 1$. Nun kann aber irgend eine Zahl N in der Form

$$N = 2^p + 2^q + 2^r + \cdots, \qquad p > q > r \cdots$$

dargestellt werden, und die Anzahl der Faktoren 2, welche in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$ enthalten sind, ist also $N - h$,

1) Unter $N!$ ist hier das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$ zu verstehen.

wenn h die Anzahl der Glieder 2^p, $2^q \cdots$ in N ist (Legendre a. a. O. p. 12).

Frägt man nun, wie oft der Faktor 2 in

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!} \qquad (N = n + n' + n'')$$

vorkommt, so ersieht man, dass der ungünstigste Fall eintritt, wenn n, n', n'' selbst Potenzen von 2 sind, $n = 2^p$, $n' = 2^q$, $n'' = 2^r$, also $N = 2^p + 2^q + 2^r$; in diesem Falle ist der Faktor 2 nämlich im Zähler und im Nenner $N - 3$ mal enthalten und die Zahl $\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!}$ enthält den Faktor 2 gar nicht, und ist also eine ungerade Zahl. Eine Ausnahme hievon tritt ein, wenn zwei der Zahlen n, n', n'' oder auch alle drei gleich sind; denn ist $n' = n'' = 2^q$, so ist $N = 2^p + 2^{q+1}$ und der Faktor 2 ist dann in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdots N$ noch $N - 2$ mal enthalten, während er im Nenner $n!\,n'!\,n''!$ nur $N - 3$ mal enthalten ist. Aber man sieht, dass ähnliches eintritt, sowie überhaupt zwei der Zahlen n, n', n'' gleich sind. Ist $n' = n'' = 2^v + 2^w + \cdots$ und i die Anzahl dieser Glieder 2^v, $2^w \cdots$ so wird $N!$ die Zahl 2 wenigstens i-mal öfter enthalten, als der Nenner $n!\,n'!\,n''! \cdots$ und man kann daher obigen Satz dahin ergänzen:

Sind in dem Ausdruck

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!\ldots} \qquad (N = n + n' + n'' + \cdots)$$

zwei (oder mehrere) der Zahlen n, n', n'', $\cdots$ gleich, so ist derselbe eine ganze gerade Zahl.

Dieser Fall tritt ein bei dem Coefficienten $A_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!\,k!}$ und folglich ist dieser Coefficient immer eine gerade Zahl.

5. Setzt man in den Gleichungen 1) 3) für x irgend eine ungerade ganze Zahl, $x = 2y + 1$, so werden dieselben

$$\left.\begin{aligned} X_{n(2y+1)} &= 1 + A_n^{(1)} y + A_n^{(2)} y^2 + \cdots + A_n^{(n)} y^n \\ (-1)^n X_{n(2y+1)} &= 1 - A_n^{(1)} (y+1) + A_n^{(2)} (y+1)^2 + \cdots \\ &\quad \pm A_n^{(n)} (y+1)^n \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

woraus die in Nr. 1 angegebene Eigenschaft dieser Polynome X_n hervorgeht, dass sie ganze ungerade Zahlen werden, wenn für x irgend eine ungerade Zahl $2y+1$ gesetzt wird. Zugleich ersieht man, dass dieselben sowohl nach Potenzen von y, als auch nach Potenzen von $y+1$ in ganzzahlige Reihen entwickelt werden können.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner, dass für $x = 2y+1$

$$X_n - X'_n$$

für irgend welche Indices n, n' immer durch y theilbar ist, und ebenso, dass, je nachdem n, n' gleichartig oder ungleichartig sind, im ersten Falle

$$X_n - X'_n,$$

im zweiten

$$X_n + X'_n$$

durch $y+1$ theilbar sind.

Aus den Gleichungen 5) folgt für $x = 2y-1$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(X_{n(2y+1)} + (-1)^n X_{n(2y-1)}\right) \\ &\quad = 1 + A_n^{(2)} y^2 + A_n^{(4)} y^4 + \cdots \\ &\frac{1}{2}\left(X_{n(2y+1)} - (-1)^n X_{n(2y-1)}\right) \\ &\quad = A_n^{(1)} y + A_n^{(3)} y^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

woraus ersichtlich, dass auch

$$X_{n(2y+1)} - (-1)^n X_{n(2y-1)}$$

immer durch y theilbar ist.

Wenn nun aber x eine gerade Zahl ist, so zeigen die Gleichungen 1) und 3), dass sich X_n nur ausnahmsweise

auf eine ganze Zahl reduciren wird.[1]) Da das höchste Glied der Reihe 1) $A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ ist, so steht darin 2^n im Nenner; aber

$$A_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

hat, wenn $n = 2^p + 2^q\,2^r + \cdots$ mit i-Gliedern ist und also $2n = 2^{p+1} + 2^{q+1} + 2^{r+1} + \cdots$, nach Nr. 4 $(2n-i)-(n-i)-(n-i) = i$ Faktoren 2, so dass in $A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ nur noch 2^{n-i} im Nenner bleibt. Nur wenn n eine Potenz von 2 ist, also $i = 1$, bleibt noch 2^{n-1} im Nenner. Das vorletzte Glied $A_n^{(n-1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}$ kann in jedem Falle höchstens 2^{n-2} im Nenner behalten; das drittletzte höchstens nur 2^{n-3} u. s. f. Man sieht also, dass, wenn x eine gerade Zahl ist, X_n höchstens den Nenner 2^{n-1} haben kann; dies wird aber nur eintreten, wenn n eine Potenz von 2 ist; in allen andern Fällen hat X_n, wenn x eine ganze gerade Zahl ist, 2^{n-2} oder eine niedrigere Potenz von 2 im Nenner.

6. Da, wenn n gerade, X_n nur gerade Potenzen von x enthält, und dasselbe von $\frac{X_n}{x}$ gilt, wenn n ungerade, so lassen sich diese Polynome auch nach Potenzen von $x^2 - 1$ entwickeln. Man erhält für gerade n

$$X_n = 1 + a_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right) + a_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2 + \cdots + a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{9}$$

wo

$$a_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{1^2},\quad a_n^{(2)} = \frac{(n-2)\,n\cdot(n+1)(n+3)}{1^2\cdot 2^2},\ \ldots$$

1) Dies tritt z. B. ein für $n = 3$.

emein

$$= \frac{(n-2k+2)(n-2k+4)\cdots n\cdot(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2},$$

Für ungerade n

$$\frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right) + b_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2 + \cdots + b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \tag{10}$$

o

$$b_n^{(1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{1^2},\quad b_n^{(2)} = \frac{(n-3)(n-1)\cdot(n+2)(n+4)}{1^2\cdot 2^2},\ldots$$

llgemein

$$b_n^{(k)} = \frac{(n-2k+1)(n-2k+3)\cdots(n-1)\cdot(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2}$$

Die Coefficienten a, b in diesen Reihen sind ebenfalls sämmtlich ganze und gerade Zahlen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Setzt man $x = 2y+1$, so wird $\frac{x^2-1}{4} = y(y+1)$ und man erhält also, wenn x eine ungerade Zahl $2y+1$ ist, folgende ganzzahlige Reihenentwicklungen nach Potenzen von $y(y+1)$[1]:

---

1) Für $x = \cos\alpha$ erhält man aus den Gleichungen 9) 10)
für gerade n

$$X_n(\cos\alpha) = 1 - a_n^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + a_n^{(2)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^4 - + \cdots \pm a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^n$$

für ungerade n

$$X_n(\cos\alpha) = \cos\alpha\left\{1 - b_n^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + b_n^{(2)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^4 - + \cdots \pm b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

Diese einfachsten ganzzahligen Entwicklungen von $X_n(\cos\alpha)$ sind, so viel ich weiss, bisher noch nicht gegeben worden.

für gerade n

$$X_n = 1 + a_n^{(1)} y(y+1) + a_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots$$
$$+ a_n^{\binom{n}{2}} y^{\frac{n}{2}} (y+1)^{\frac{n}{2}}$$

für ungerade n

$$\frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)} y(y+1) + b_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots$$
$$+ b_n^{\binom{n-1}{2}} y^{\frac{n-1}{2}} (y+1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Entwickelt man in 11) die Potenzen von $(y+$
vergleicht sodann die Reihe mit der Reihe 7) so erg

$$a_n^{(1)} = A_n^{(1)}, \quad a_n^{(2)} = A_n^{(2)} - a_n^{(1)} = A_n^{(2)} - A_n^{(1)},$$

und allgemein

$$A_n^{(2k)} = a_n^{(k)} + \binom{k+1}{k-1} a_n^{(k+1)} + \binom{k+2}{k-2} a_n^{k+2} + \cdots + \binom{2k-1}{1} a_n^{(2k-1)} +$$
$$A_n^{(2k-1)} = \binom{k}{k-1} a_n^{(k)} + \binom{k+1}{k-2} a_n^{(k+1)} + \cdots + \binom{2k-2}{1} a_n^{(2k-2)} + a_n^{(2}$$

Da in diesen Recursionsformeln der höchste Coef
immer den Faktor 1 hat, so berechnet sich hieraus a
$a_n^{(2k-1)}$ durch eine Reihe der A_n mit ganzen Coef
Also sind auch die a ganze gerade Zahlen.

Die Vergleichung der Coefficienten von y^n und
den beiden Reihen 7) und 11) liefert

$$a_n^{\binom{n}{2}} = A_n^{(n)}, \quad \frac{n}{2} a_n^{\binom{n}{2}} = A_n^{(n-1)},$$

woraus

$$A_n^{(n-1)} = \frac{n}{2} A_n^{(n)}$$

sich ergiebt. Das Bildungsgesetz der A_n zeigt, da
Relation in der That stattfindet, und zwar für ger
ungerade n. Es ist also auch $A_n^{(n-1)}$ immer durch n
Dies ist aber nur ein specieller Fall des allgemeinen
dass $A_n^{(k-1)}$ immer durch k theilbar ist. (Nr. 7.)

allgemein

$$a_n^{(k)} = \frac{(n-2k+2)(n-2k+4)\cdots n\cdot(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2},$$

Für ungerade n

$$\frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right) + b_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2 + \cdots + b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \tag{10}$$

wo

$$b_n^{(1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{1^2},\quad b_n^{(2)} = \frac{(n-3)(n-1)\cdot(n+2)(n+4)}{1^2\cdot 2^2},\ldots$$

allgemein

$$b_n^{(k)} = \frac{(n-2k+1)(n-2k+3)\cdots(n-1)\cdot(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2}$$

Die Coefficienten a, b in diesen Reihen sind ebenfalls sämmtlich ganze und gerade Zahlen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Setzt man $x = 2y+1$, so wird $\frac{x^2-1}{4} = y(y+1)$ und man erhält also, wenn x eine ungerade Zahl $2y+1$ ist, folgende ganzzahlige Reihenentwicklungen nach Potenzen von $y(y+1)$[1]:

---

1) Für $x = \cos\alpha$ erhält man aus den Gleichungen 9) 10) für gerade n

$$X_n(\cos\alpha) = 1 - a_n^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + a_n^{(2)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^4 - + \cdots \pm a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^n$$

für ungerade n

$$X_n(\cos\alpha) = \cos\alpha\left\{1 - b_n^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + b_n^{(2)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^4 - + \cdots \pm b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

Diese einfachsten ganzzahligen Entwicklungen von $X_n(\cos\alpha)$ sind, so viel ich weiss, bisher noch nicht gegeben worden.

oder auch

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}(X_{n+1}-X_{n-1}) = 2(y+1) - \mathfrak{A}_n^{(2)}(y+1)^2 + \mathfrak{A}_n^{(3)}(y+1)^3 - + \cdots \pm \mathfrak{A}_n^{(n+1)}(y+1)^{n+1}, \tag{17}$$

wo von $k=2$ an

$$\mathfrak{A}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-k+2)(n-k+3)\cdots(n+k-1)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}.$$

Dass trotz der Abtrennung des Faktors $2n+1$ aus der Differenz $A_{n+1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}$ diese Coefficienten $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ wieder ganze gerade Zahlen sind, lässt sich auf folgende Weise zeigen. Die Polynome X genügen der Relation

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0 \qquad \text{III.}$$

Hieraus zieht man leicht

$$\frac{1}{2n+1}(X_{n+1}-X_{n-1}) = \frac{xX_n - X_{n-1}}{n+1}$$

Ist x eine ungerade ganze Zahl, so sind die Zähler der Brüche auf beiden Seiten ganze gerade Zahlen; und da $2n+1$ und $n+1$ keinen Faktor gemein haben, so folgt, dass

$$X_{n+1} - X_{n-1} \quad \text{durch } 2n+1$$

und

$$xX_n - X_{n-1} \quad \text{durch } n+1$$

theilbar sind, wenn x eine ungerade Zahl. Da also die Reihen in den Gleichungen 16), 17) für alle ganze Zahlen y ganze gerade Zahlen darstellen, so lässt sich schliessen, dass auch die Coefficienten $\mathfrak{A}$ ganze und gerade Zahlen sind.

Dies lässt sich aber auch mittelst des Satzes in Nr. 3 erweisen. Denn es ist

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-k+1)!\,k!\,(k-1)!}$$

Nun sagt der Satz aus, dass $\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!}$ eine ganze Zahl ist, wenn $N = n + n' + n''$. In $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)}$ ist $N = n + k - 1$, aber die Summe der drei Zahlen im Nenner ist $n + k = N + 1$. Der Satz lässt sich also nicht unmittelbar anwenden. Aber wenn eine Primzahl θ die Zahl k theilt, so theilt sie $k-1$ nicht und ist also ebenso oft in $(k-2)!$ enthalten, als in $(k-1)!$; theilt θ aber k nicht, so ist θ jedenfalls ebenso oft in $(k-1)!$ enthalten als in $k!$ Man kann daher bei der Bestimmung wie oft eine Primzahl θ in $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)}$ als Faktor steht immer die Summe der drei Zahlen im Nenner um 1 verringern, d. h. auf N reduciren, und sodann wie in in Nr. 3 schliessen, dass jede Primzahl wenigstens so oft im Zähler steht als im Nenner. $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ ist also eine ganze gerade Zahl.

Hieraus ergiebt sich auch eine Eigenschaft der Coefficienten A_n. Denn die Vergleichung der Ausdrücke für $\mathfrak{A}_n$ und A_n liefert

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)} = \frac{1}{k} A_n^{(k-1)}$$

und, da $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n$ eine ganze Zahl, so folgt, dass die Zahl $A_n^{(k-1)}$ durch k theilbar ist.

8. Bekanntlich giebt $\frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})$ das Integral von X_n, so genommen, dass es für $x = 1$ verschwindet, d. h. es ist

$$\int_1 X_n\, dx = \frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})$$

Die Gleichungen 16) 17) zeigen also, dass dieses Integral von X_n ebenfalls eine ganze Zahl ist (und zwar eine gerade), wenn x eine ungerade Zahl $2y+1$ ist, und geben die Entwicklung dieser Zahl nach Potenzen von y oder $y+1$.

Man kann auch die Gleichungen 11) und 12) benützen, um eine Entwicklung des Integrals nach Potenzen von $y(y+1)$ zu erhalten.

Es ergiebt sich dann für $x = 2y+1$, wenn n ungerade

$$\int_1 X_n \, dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} = 2y(y+1) + \mathfrak{a}_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots + \mathfrak{a}_n^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} y^{\frac{n+1}{2}} (y+1)^{\frac{n+1}{2}} \tag{18}$$

wo

$$\mathfrak{a}_n^{(2)} = 4 \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2}, \quad \mathfrak{a}_n^{(3)} = 6 \cdot \frac{(n-3)(n-1)\cdot(n+2)(n+4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

und allgemein von $k = 2$ an

$$\mathfrak{a}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-2k+3)(n-2k+5)\cdots(n-1)\cdot(n+2)(n+4)\cdots(n+2k-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}$$

Wenn n gerade

$$\int_1 X_n \, dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} = (2y+1)\left\{ 2y(y+1) + \mathfrak{b}_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots + \mathfrak{b}_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}} (y+1)^{\frac{n}{2}} \right\} \tag{19}$$

wo

$$\mathfrak{b}_n^{(2)} = 4 \cdot \frac{(n-2)(n+3)}{1^2 \cdot 2^2}, \quad \mathfrak{b}_n^{(3)} = 6 \cdot \frac{(n-4)(n-2)\cdot(n+3)(n+5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

und allgemein von $k = 2$ an

$$\mathfrak{b}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-2k+2)(n-2k+4)\cdots(n-2)\cdot(n+3)(n+5)\cdots(n+2m-1)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}$$

Auch hier lässt sich wie oben (Nr. 6) erweisen, dass die Coefficienten $\mathfrak{a}_n^{(k)}$, $\mathfrak{b}_n^{(k)}$ sämmtlich ganze gerade Zahlen sind.

9. Da der Differentialquotient von X_n durch die Formel

$$\frac{d X_n}{d x} = (2n-1) X_{n-1} + (2n-5) X_{n-2} + \cdots$$

gegeben ist, so folgt, dass, wenn x eine ungerade Zahl ist, auch $\frac{d X_n}{d x}$ eine ganze Zahl ist, und man sieht, dass sich diese Eigenschaft auch auf die höheren Differentialquotienten von X_n überträgt.

Das Polynom X_n hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn x eine ungerade ganze Zahl ist, nicht nur X_n selbst, sondern auch $\int_1 X_n \, d x$ und alle Differentialquotienten von X_n ganze Zahlen sind.

10. Es möge nun hier noch eine Tabelle der Entwicklungen von X_n nach den Gleichungen 7), 11), 12) und von $\int_1 X_n \, d x$ nach den Gleichungen 16—19) folgen. Es ist darin auf der linken Seite immer x durch $2y+1$ zu ersetzen.

$$X_1 = 1 + 2y$$
$$-X_1 = 1 - 2(y+1)$$

$$X_2 = 1 + 6y + 6y^2$$
$$+X_2 = 1 - 6(y+1) + 6(y+1)^2$$

$$X_3 = 1 + 12y + 30y^2 + 20y^3$$
$$-X_3 = 1 - 12(y+1) + 30(y+1)^2 - 20(y+1)^3$$

$$X_4 = 1 + 20y + 90y^2 + 140y^3 + 70y^4$$
$$+X_4 = 1 - 20(y+1) + 90(y+1)^2 - 140(y+1)^3 + 70(y+1)^4$$

$$X_5 = 1 + 2\cdot 15y + 3\cdot 70\cdot y^2 + 4\cdot 140y^3 + 5\cdot 126y^4 + 6\cdot 42y^5$$
$$X_6 = 1 + 2\cdot 21y^2 + 3\cdot 140\cdot y + 4\cdot 420\cdot y^3 + 5\cdot 630\cdot y^4 + 6\cdot 462\cdot y^5 + 7\cdot 132\cdot y^6$$
$$X_7 = 1 + 2\cdot 28y + 3\cdot 252\cdot y^2 + 4\cdot 1050\cdot y^3 + 5\cdot 2310\cdot y^4 + 6\cdot 2772\cdot y^5 + 7\cdot 1716\cdot y^6 + 8\cdot 429\cdot y^7$$

* * *

$$\frac{X_1}{x} = 1$$

$$X_2 = 1 + 6\,y\,(y+1)$$

$$\frac{X_3}{x} = 1 + 10\,y\,(y+1)$$

$$X_4 = 1 + 20\,y\,(y+1) + 70\,y^2\,(y+1)^2$$

$$\frac{X_5}{x} = 1 + 28\,y\,(y+1) + 126\,y^2\,(y+1)^2$$

$$X_6 = 1 + 42\,y\,(y+1) + 378\,y^2\,(y+1)^2 + 924\,y^3\,(y+1)^3$$

$$\frac{X_7}{x} = 1 + 54\,y\,(y+1) + 594\,y^2\,(y+1)^2 + 1716\,y^3\,(y+1)^3$$

$$X_8 = 1 + 72\,y\,(y+1) + 1188\,y^2\,(y+1)^2 + 6864\,y^3\,(y+1)^3 + 12870\,y^4\,(y+1)^4$$

* * *

$$\int_1 X_1\,dx = \frac{1}{3}(X_2 - X_0) = 2\,y + 2\,y^2$$

$$-\int_1 X_1\,dx = 2\,(y+1) - 2\,(y+1)^2$$

$$\int_1 X_2\,dx = \frac{1}{5}(X_3 - X_1) = 2\,y + 6\,y^2 + 4\,y^3$$

$$+\int_1 X_2\,dx = 2\,(y+1) - 6\,(y+1)^2 + 4\,(y+1)^3$$

$$\int_1 X_3\,dx = \frac{1}{7}(X_4 - X_2) = 2\,y + 12\,y^2 + 20\,y^3 + 10\,y^4$$

$$-\int_1 X_3\,dx = 2\,(y+1) - 12\,(y+1)^2 + 20\,(y+1)^3 - 10\,(y+1)^4$$

$$\int_1 X_4\,dx = \frac{1}{9}(X_5 - X_3) = 2\,y + 20\,y^2 + 60\,y^3 + 70\,y^4 + 28\,y^5$$

$$+\int_1 X_4\,dx = 2\,(y+1) - 20\,(y+1)^2 + 60\,(y+1)^3 - 70\,(y+1)^4 + 28\,(y+1)^5$$

$$\int_1 X_5\, dx = \frac{1}{11}(X_6 - X_4) = 2y + 2\cdot 15\, y^2 + 2\cdot 70\, y^3 + 2\cdot 140\, y^4 + 2\cdot 126\, y^5 + 2\cdot 42\, y^6$$

$$\int_1 X_6\, dx = \frac{1}{13}(X_7 - X_5) = 2y + 2\cdot 21\, y^2 + 2\cdot 140\, y^3 + 2\cdot 420\, y^4 + 2\cdot 630\, y^5 + 2\cdot 462\, y^6 + 2\cdot 132\, y^7$$

* * *

$$\int_1 X_1\, dx = 2\, y\,(y+1)$$

$$\int_1 X_2\, dx = (2\, y + 1)\cdot 2\, y\,(y+1)$$

$$\int_1 X_3\, dx = 2\, y\,(y+1) + 10\, y^2\,(y+1)^2$$

$$\int_1 X_4\, dx = (2\, y + 1)\,[2\, y\,(y+1) + 14\, y^2\,(y+1)^2]$$

$$\int_1 X_5\, dx = 2\, y\,(y+1) + 28\, y^2\,(y+1)^2 + 84\, y^3\,(y+1)^3$$

$$\int_1 X_6\, dx = (2y+1)[2y(y+1) + 36\, y^2(y+1)^2 + 132\, y^3(y+1)^3]$$

$$\int_1 X_7\, dx = 2\, y\,(y+1) + 54\, y^2\,(y+1)^2 + 396\, y^3\,(y+1)^3 + 858\, y^4\,(y+1)^4$$

* * *

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1894.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Band XV. 1893. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations 1886—87. 1893. fol.

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XVII, 2. 1893. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Monumenta. Vol. XXIV, XXV. 1893. 8⁰.
Starine. Vol. XXVI. 1893. 8⁰.
Ljetopis. 1893. 8⁰.
Rad. Band 116. 117. 1893. 8⁰.

New-York State Library in Albany:

73—75 th annual Report. 1891—93. 8⁰.
State Library Bulletin. Legislation No. 4. January 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Augsburg:

Zeitschrift. Jahrg. XX. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

31. Bericht. 1894. 8⁰.

Texas Academy of Science in Austin:

Transactions. Vol. I, No. 2. 1893. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIII, No. 109—112. 1894. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XIV, No. 4. Vol. XV, No. 1—4. 1892/93. 8⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XIII, No. 4. Vol. XIV, No. 1—3. 1892/93. 8⁰.

American Chemical Journal. Vol. XIV, No. 8, Vol. XV, No. 1—7. 1892/93. 8⁰.
Studies in historical and political Science. Ser. X, No. 12. Ser. XI, No. 1—10. 1892/93. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1893/94. 4⁰ und 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Bd. IV, Heft 2. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band IX, Heft 3. 1893. 8⁰.

Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 36, afl. 4, 5, 6. 1893. 8⁰.
Notulen. Deel XXXI, No. 1, 2. 1893. 8⁰.
Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811. Deel XI. 1893. 8⁰.
Dagh-Register gehouden in't Casteel Batavia Anno 1664. 1893. 4⁰.

K. serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Geologija Srbije von Johann Schujowitsch. Heft 1. 1893. 4⁰.
Glas. No. 41, 42. 1894. 8⁰.
Godischniak (Jahrbuch) 1889 u. 1890. 1890/91. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Corpus inscriptionum latinarum. Vol. VIII. Supplementum, fasc. 3. 1893. fol.
Politische Korrespondenz König Friedrichs II. Bd. XX. 1894. 8⁰.
Sitzungsberichte. 1893. No. 39—53. gr. 8⁰.
Abhandlungen aus dem Jahre 1892. 4⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für das Jahr 1892. Bd. XIII. 1893. 8⁰.
Abhandlungen. Neue Folge. Heft 2 mit Atlas in 4⁰ und Heft 9, Theil II. 1893. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Berlin:

Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. I. 1894. 4⁰.
Ueber die Ziele und die Thätigkeit der phys.-techn. Reichsanstalt, von Dr. Lummer. 1894. 4⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Hermann Rietschel, Der Stand der wissenschaftlichen und praktischen Wohnungs-Hygiene in Beziehung zur Luft. 1894. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 26. Jahrg. No. 19, 20. 27. Jahrg. No. 1—11. 1893/94. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 45, Heft 3. 1893. 8⁰.

Medizinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Band XXIV. 1894. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Fortschritte der Physik im Jahre 1887. 43. Jahrg. 3 Bände. 1893. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. VII, No. 20—26. Bd. VIII, 1—6. 1893/94. 8⁰.

Verhandlungen der physiolog. Gesellschaft. Jahrg. 1893—94 No. 2—10.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band VIII, Heft 4. Bd. IX, Heft 1. 1894. 4⁰.

Geodätisches Institut in Berlin:

Jahresbericht für 1892/93. 1893. 8⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1890. Heft II, III. 1891—93. 4⁰.

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung. 1893, Heft II. 1894. 4⁰.

Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen im Jahre 1892. 1894. 4⁰.

Bericht über die Thätigkeit im Jahre 1893. 1894. 8⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 23. Heft 1, 2. 1894. 8⁰.

Commission für die Beobachtung des Venus-Durchganges in Berlin:

Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Band V. 1893. 4⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band 7, I. Hälfte. Leipzig 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band IX, Heft 1—6. 1894. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 13. Jahrg. 1893. Heft 12. 14. Jahrg. Heft 1—6. 1893/94. 4⁰.

Schweizerische geologische Commission in Bern:

Beiträge zu einer geologischen Karte der Schweiz. Lief. VII mit 1 Karte. Lief. XXI mit Atlas. Lief. XXII. Text. 1893. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus dem Jahre 1892. 1893. 8⁰.

Allgemeine schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. XXXIII, Abth. 1. Basel 1893. 4⁰.

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung in Basel den 5.—7. Septbr. 1892, mit französischer Uebersetzung. Basel 1892. 8⁰.

Gewerbeschule in Bistritz:

XVIII. Jahresbericht für das Schuljahr 1892/93. 1893. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Monumenti. Serie I. Statuti No. 3. Serie II. Carte No. 1. Appendice ai Monumenti Ravennati. Tom. II, disp. II. Ravenna 1884—86. 4⁰.

Atti e Memorie. III. Serie. Vol. XI, fasc. 4—6. 1894. 4⁰.

La R. Deputazione di storia patria per le provincie di Romagna dall' anno 1860 al 1894. 1894. 8⁰.

Universität in Bonn:

Wendelin Förster, Freundesbriefe von Friedrich Diez. 1894. 4°.

Naturhistorischer Verein der preuss. Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 50. Jahrgang, II. Hälfte. 1893. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1893. No. 23, 24. 1894. No. 1—10. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 28. 1893. 4°.

Public Library in Boston:

Annual Report 1893. 1894. 8°.

Boston Society of Natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 26, part 1. 1893. 8°.
Memoirs. Vol. IV, No. XI. 1893. 4°.
Occasional Papers. No. IV. 1893. 8°.

Meteorologische Station in Bremen:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. 4. Jahrg. 1894. fol.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XIII, 1 und Extrabeilage. 1893/94. 8°.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Bd. 31. 1892. 1893. 8°.
XI. Bericht der meteorologischen Commission. 1893. 8°.

Académie Royale de Médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tom. 7, No. 10, 11. Tom. 8, No. 1—5. 1893/94. 8°.

Académie Royale des Sciences in Brüssel:

Annuaire. 1894. 60e année. 8°.
Bulletin. 63e année. 3. Série. Tom. 26, No. 12. Tom. 27, No. 1—5. 1893/94. 8°.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XIII, fasc. 1, 2. 1894. 8°.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Ungarische Revue. 1893. Heft 10. 1894. Heft 1—4. gr. 8°.

K. Ungarisches geologisches Institut in Budapest:

Mittheilungen. Band X, Heft 4, 5. 1894. 8°.
A m. kir. Földtani intézet évkönyve. Bd. X, Heft 5. 1894. 8°.
Földtani Közlöny. Band XXXIII, Heft 9—12. Band XXXIV, 1—5. 1893/94. 8°.

Academia Romana in Bukarest:

Eudoriu de Hurmuzaki, Documente privitóre la Istoria Românilor. Suppl. I, Vol. 5. Suppl. II, Vol. 1. Vol. II, part 4 und Vol. 3. 1893—94. 4°.
Analele. Serie II, Tom. XIV. Sect. literar. u. Sect. scientif. Tom. XV. Part. administrat. und Sect. literar. 1893. 4°.
Etymologicum Magnum Romaniae. Tom. III, 2. 1894. 4°.

Instituto meteorologico in Bukarest:

Analele. Vol. VII, anul 1891. 1893. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Verslag omtrent den staat van's lands plantentuin te Buitenzorg over het jaar 1892. Batavia 1894. 8⁰.

Meteorological Departement of the Government of India in Calcutta:

Indian Meteorological Memoirs. Vol. VI, part 1. 1894. fol.
Rainfall Data of India 1892. 1893. fol.
Monthly Weather Review. August, September, October, November, December 1893, January 1894. fol.
Meteorological Observations. August, September, October, November, December 1893, January 1894. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Journal. New Series. Vol. 62, No. 323, 327—332. 8⁰.
Proceedings. 1893 No. 8, 9, 10. 1894 No. 1. 8⁰.
Annual Address. 7th February 1894. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXVI, No. 4. Vol. XXVII, part 1. 1893/94. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. 8, No. 2. 1894. 8⁰.
Transactions. Vol. XV, part 4. 1894. 4⁰.

Astronomical Observatory at Harvard College in Cambridge, Mass.:

48th annual Report for the year ending Oct. 31, 1893. 8⁰.
Annals. Vol. 25, 29. 1893. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. XXV, No. 2, 3, 5, 6. 1893/94. 8⁰.
Annual Report 1892—93. 1893. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 6. 1893. 4⁰.
Bullettino. Fasc. 33—35. 1893. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. VII, No. 325—350. Vol. VIII, 351—355. 1893/94. 4⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 4, No. 2, 3. 1894. 8⁰.

„Editorial Committee of Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878" in Christiania:

XXII. Zoologi Ophiuroidea ved James A. Grieg. 1893. fol.

Norske Gradmaalings-Kommission in Christiania:

Vandstandsobservationer. Heft 5. 1893. 4⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1893, No. 92—104. 1894, No. 1—41, 44—47, 50, 51. fol.

Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1894. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rectors am 4. Oktober 1893. 8⁰.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:
Quartalblätter. 1893 in 4 Heften. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Davenport, Jowa:
Proceedings. Vol. V, part 2. 1893. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:
3 kleine Schriften. 1893. 8⁰.
The Question of a Standard of Value, by O. J. Frost. 1893. 8⁰.
The Mode of occurrence of gold in the ores of the Cripple Creek District by Richard Pearce. 1894. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:
Mittheilungen. Band 6, Theil 4. 1893. 8⁰.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Dorpat:
Sitzungsberichte 1893. 1894. 8⁰.
Verhandlungen. Band XVI, 3. 1894. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:
Bulletin. Tom. 14. 3. et 4. trimestre 1893. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:
Proceedings. III. Ser. Vol. III, No. 1, 2. 1894. 8⁰.
Transactions. Vol. 30. part 5—12. 1893/94. 4⁰.

Royal Dublin Society in Dublin:
The scientific Transactions. Ser. II. Vol. IV, No. 14, Vol. V, No. 1—4 1892—93. 4⁰.
The scientific Proceedings. N. Ser. Vol. VII, part 5. Vol. VIII part 1, 2. 1892—93. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:
Proceedings. Session 1891—92 and 1892—93. 2 Hefte. 1891—93. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. XX, pag. 97—160. 1893. 8⁰.
Transactions. Vol. 37, part I, II. 1893. 4⁰.

Gymnasium in Eisenach:
Jahresbericht auf das Jahr 1893—94. 1894. 4⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:
Jahrbücher. N. F. Heft 20. 1894. 8⁰.

Reale Accademia de' Georgofili in Florenz:
Atti. Ser. IV. Vol. XVI, 3, 4. 1893. 8⁰.

R. Archivio di Stato in Florenz:
I Capitoli del Comune di Firenze, Inventario e Regesto. Tom. 2 1893. 4⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:
Abhandlungen. Band XVIII, No. 2. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a. M.:
Mittheilungen über römische Funde in Heddernheim. I. 1894. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:
Helios. 11. Jahrg. No. 6—12. 1893/94. 8⁰.
Societatum Litterae. 1893. No. 8—12. 1894. 1—3. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:
Berichte. Band VII, 1, 2. Band VIII. 1893/94. 8⁰.

Universität Freiburg i. d. Schweiz:
Index lectionum per menses aestivos 1894. 8⁰.

Oeffentliche Bibliothek in Genf:
Compte rendu pour l'année 1893. 1894. 8⁰.

Institut national Genevois in Genf:
Les Chroniques de Genève par Michel Roset. 1894. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:
Annali. Ser. 2a. Vol. XIII. 1893. 8⁰.

Geological Society in Glasgow:
Transactions. Vol. IX, part 2. 1893. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Band 69, Heft 2. 1893. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Gelehrte Anzeigen. 1893. No. 20—26. 1894. No. 1—6. 8⁰.
Nachrichten. 1893. No. 15—21. 1894. No. 1, 2. 8⁰.

Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha:
65. Rechenschaftsbericht für das Jahr 1893—1894. 4⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville:
Journal. Vol. III, p. 163—182. Vol. IV, p. 1—72, No. I—LXXX. 1893. 8⁰.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz:
Mittheilungen. 30. Jahrgang. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:
Mittheilungen. 25. Jahrgang. 1893. Berlin 1894. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:
Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.

Haag'sche Genootschap tot verdediging van de christelijke Godsdienst im Haag:
Werken. VI. Reeks. Deel V. Leiden 1894. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:
Bijdragen. V. Reeks. Deel X, aflev. 1, 2. 1894. 8⁰.

Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:
Leopoldina. Heft 29, No. 21—24. Heft 30, No. 1—10. 1893—94. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:
Zeitschrift. Band 47, Heft 4. Band 48, Heft 1. Leipzig 1893/94. 8⁰.

Universität Halle:
Index lectionum per aestatem 1894 habendarum, nebst Verzeichniss der Vorlesungen. 1894. 4⁰.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:
Neue Mittheilungen. Band 18. 2. Hälfte, Heft 1. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 66. Heft 3, 4. Leipzig. 1893. 8°.

Stadt-Bibliothek in Hamburg:
Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1892/93. 4°.
Handbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Arbeiten. IX. Jahrg. 1891. I. und II. Hälfte. X. Jahrg. 1892. I. Hälfte nebst Beiheft. 1891—93. 4°.
Mittheilungen aus der Stadtbibliothek. X, 1. 1893. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:
Verhandlungen III. Folge I. 1894. 8°.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:
Zeitschrift. Jahrgang 1893. 8°.

Teylers Godgeleerd Genootschap in Harlem:
Verhandelingen. Nieuwe Serie. Deel XIV. 1894. 8°.

Teylers tweede Genootschap in Harlem:
Verhandelingen. N. Reeks. Deel IV, stuk 2. 1893. 8°.
Jacob Dirks, Atlas behoorende bij de beschrijving der Nederlandsche Penningen. Stuk 4. 1893. fol.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:
Archives Néerlandaises. Tom. 27, livr. 4, 5. Tom. 28, livr. 1. 1894. 8°.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:
Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrgang 4. Heft 1. 1894. 8°.

Naturhistorisch-medicinischer Verein in Heidelberg:
Verhandlungen. N. F. Band V, Heft 2. 1894. 8°.

Institut météorologique central in Helsingfors:
Observations. Vol. VI—VIII, livr. I. Vol. XI, livr. I. 1893. 4°.
Observations météorologiques 1881—1888 in 4 Voll. Kuopio. 1893. fol.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:
Archiv. N. F. Band 25, Heft 1. 1894. 8°.
Jahresbericht für das Vereinsjahr 1892/93. 1893. 8°.
Die Kerzer Abtei, von Lud. Reissenberger. 1894. 4°.

Historischer Verein in und für Ingolstadt:
Sammelblatt. XVIII. Heft. 1893. 8°.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band 28, Heft 2, 3. 1893—94. 8°.

Kais. Universität in Kasan:
Utschenia Sapiski. Vol. 61, No. 1—3. 1894. 8°.
2 Dissertationen von Krasin und Agababon. 1893. 8°.

Verein für Naturkunde in Kassel:
39. Bericht über die Jahre 1892—94. 1894. 8°.

Universität in Kharkow:
Sapiski. Vol. 4. 1893. 8°.
Annales. 1894. Fasc. 1. 8°.

Section médicale de la Société des sciences expérim. in Kharkow:
Trudy. 1891. Teil II. 1892. Teil I. 1893. Heft I. 1892—94. 8⁰.
Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:
Zeitschrift. Band 23. 1893. 8⁰.

K. Universität in Kiew:
Iswestija 1893. Band 33, No. 12. Band 34, No. 1—4. 1893/94. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:
Ertesitö. 4 Hefte vom Jahre 1893. 8⁰.
" I. Abtheilung. Band 18. Heft 2, 3. 1894. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:
Mittheilungen. Heft 24. 1893. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:
Mémoires. 6. série. Section des Lettres. Vol. III, No. 3. 1894. 4⁰.
Regesta diplomatica historiae danicae. Ser. II, tom. 2, fasc. 2. 1893. 4⁰.
Oversigt. 1893, No. 2, 3. 1894, No. 1. 1893—1894. 8⁰.
Skrifter. Naturvidensk. Afdeling. Band VII, No. 8, 9. 1893. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:
Mémoires. Nouv. Série 1892. 1893. 8⁰.
Aarböger. II. Raakke. Band VIII, Heft 3, 4. Band IX, Heft 1. 1893/94. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:
Anzeiger. 1893, December. 1894, Januar, Februar, April, Mai. 8⁰.
Sprawozdania komisyi histor. Sztuki. Tom. V, fasc. 3. 1893. fol.
Rozprawy wydz. filolog. Tom. XIX. 1893. 4⁰.
Acta rectoralia universitatis Cracoviensis. Tom. I, fasc. 2. 1893. 4⁰.
Rocznik. Rok 1892/93. 1893. 8⁰.
Biblioteka pisarzów polskich. Tom. 25—27. 1893. 8⁰.

Botanischer Verein in Landshut:
13. Bericht über die Vereinsjahre 1892—93. 1894. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:
Bulletin. III. Sér. Vol. 29, No. 113. Vol. 30, No. 114. 1893. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:
Tijdschrift. Deel XIII, Aflev. 1, 2. 1894. 8⁰.

Observatorium in Leiden:
Catalogue de la Bibliothèque de l'Observatoire. Supplement III. 's Gravenhage 1893. 8⁰.
Verslag. 1891—92 et 1892—93. Leyde 1892—93. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:
Berichte. Mathem.-phys. Classe. 1893, No. VII, VIII, IX. 1894, I. 1894. 8⁰.
Berichte. Philolog.-histor. Classe. 1893. II, III. 1894. 8⁰.
Abhandlungen der mathem.-phys. Classe. Bd. XXI, 1. 1894. 4⁰.
" des philos.-hist. Classe. Bd. XIV, 5. 1894. 4⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:
Vierteljahrsschrift. Jahrgang 28. Heft 4.
" 29. " 1. 1893/94. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. Neue Folge. Band 48, Heft 8—12.
„ 49, „ 2—9. 1893/94. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen 1893. 1894. 8⁰.

Museum Franisco-Carolinum in Linz:

52. Bericht. 1894. 8⁰.

Société philosophique in Loewen:

Revue Néo-Scolatisque. I. Année, No. 1. 1894. 8⁰.

Université catholique in Loewen:

Annuaire 1894. 8⁰.
Recueil de travaux publiés par les membres de la conférence d'histoire. Fasc. 4, 5. 1891—1893. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule, Recueil de Cytologie et d'histologie générale. Tom. X, fasc. 1. 1894. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 14, part I. 1894. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Review. Vol. IX, No. 33, 34. 1894. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 54, No. 328, 329, 330. Vol. 55, No. 331, 332, 333. 1894. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 54, No. 2—7. 1893/94. 8⁰.

Chemical Society in London:

Proceedings. Session 1893—94. No. 131—140. 1894. 8⁰.
Journal 1893. Supplement Number. 1894. No. 374—379. (Jan. bis June.) 8⁰.
List of the Officers and Fellows, April 1894. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 49, part 1—4. 1893. 8⁰.
List. November 1st 1893. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 57. 1892. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1894, part 1—3. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1893, part IV. 1894, part I. 8⁰.
Transactions. Vol. 13, part 8. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 49, No. 1255—1267, 1269, 1271—1278. Vol. 50, No. 1279—1284. 1893/94. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Lucca:

Atti. Tom. 27. 1893. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:
Annales. Tom. 20, livr. 1. 2. 1892/93. 8⁰.

Universität in Lund:
Acta universitatis Lundensis. Tom. 29, Abth. I, II. 1892/93. 4⁰.

Institut Grand-Ducal in Luxemburg:
Publications. Tom. XXII. 1893. 8⁰.

Université in Lyon:
Annales. Tom. VI, fasc. 3, 4. Paris 1893 und Lyon 1894. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:
Transactions. Vol. IX, part 1, 2. 1893. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:
Publications. Vol. VIII. 1893. 4⁰.

The Government Astronomer in Madras:
Madras Meridian. Circle Observations. Vol. VII. 1894. 4⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:
Boletin. Tomo XXIV, No. 1—6. 1894. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:
Archivio storico Lombardo. Anno XX, fasc. 4. 1893.
" " " Serie III. Anno XXI, fasc. 1, 1894. 8⁰.

Società italiana di scienze naturali in Mailand:
Atti. Vol. 34, fasc. 4. 1894. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:
Memoirs and Proceedings. Vol. 7, No. 2, 3. Vol. 8, No. 1, 2. 1893/94. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:
Annales. Tom. 3, fasc. 4. 1894. 4⁰.

Tuft's College in Massachusetts:
Tufts College Studies No. 1. 1894. 8⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:
Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Alterthums. Lief. 12. 1893. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:
Festschrift zur Feier ihres 350jährigen Bestehens. 1894. 4⁰.

Scientific Association in Meriden:
Transactions. Vol. 5. 1893. 8⁰.

Académie in Metz:
Mémoires. 3. Série. Année 20. 1890—1891. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Lothringische Geschichte und Altertumskunde in Metz:
Jahrbuch. 5. Jahrg. 1893. I. Hälfte. 8⁰.

Observatorio meteorologico central in México:
El Clima de la ciudad de México por Mariano Bárcena. 1893. 8⁰.

Sociedad científica Antonio Alzate in Mexico:
Memorias y Revista. Vol. VII, No. 3—10. 1893/94. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:
La Naturaleza. II. Serie. Vol. II, cuad. 3 y 4. 1892. fol.

Regia Accademia di scienze in Modena:
Memorie. Serie II, Vol. 9. 1893. 4⁰.

Benediktiner-Abtei in Montecassino:
Pauli Warnefridi in sanctam regulam comment. 1880. 4⁰.
Spicilegium Casinense. Tomus I. 1893. fol.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:
Bulletin. Année 1893, No. 4. 1894, No. 1. 1894. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Korrespondenzblatt. 1893. No. 11, 12. 1894. No. 1—5. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:
Personalstand. Somm.-Sem. 1894. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel in München:
Amtsblatt für die Erzdiöcese. 1893. 1894. No. 1—12. 8⁰.
Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1894. 8⁰.

Universität in München:
Schriften der Universität München. 1893. 4⁰ u. 8⁰.

Historischer Verein von Oberbayern in München:
Monatsschrift. 1894. No. 1—5. (Jan.—Juni.) 8⁰.

Kaufmännischer Verein München:
20. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:
Zeitschrift. Band 51. 1893. 8⁰.
Ergänzungshefte. I. Lieferung 1. 1893. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Rendiconti. Serie 2a. Vol. VII, fasc. 8—12. Vol. VIII, fasc. 1—5. 1893/94. 4⁰.

Historischer Verein in Neuburg:
Neuburger Kollektaneen-Blatt. Jahrg. 56. 1892. 1893. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-upon-Tyne:
Transactions. Vol. 42, part 5. Vol. 43, part 2, 3, 4. 1893. 8⁰.
An Account of the Strata of Northumberland and Durham. S-T. 1894. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. Vol. 47, No. 277—282 (Jan.—June). 1894. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:
Journal. Vol. XVI, No. 1. 1894. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:
Annals. Vol. VIII, No. 1—3. Vol. VII, 6—12.
Vol. VI. Index 1894. 1893/94. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Bulletin. Vol. V. 1893. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

The Journal. Vol. XV, No. 12. XVI, No. 1—5. Easton. 1893/94. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXV, No. 4, part 1, 2.
Vol. XXVI, No. 1. 1893/94. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. 1893. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrg. 1893. 8⁰.
Katalog der Gemälde. 3. Auflage. 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Jahresbericht für das Jahr 1892. 1893. 8⁰.
Mittheilungen. Heft 10. 1893. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Band XVIII, 1, und Mathematische Abtheilung, Band XV. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Osnabrück:

Osnabrücker Geschichtsquellen. Band II. 1894. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Anual Report 1890—91. N. S. Vol. V, part 1, 2 and Maps. 1893. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. IX. 1893. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Serie II. Vol. 1, fasc. 2. Anno 1894. 8⁰.
Bullettino. Tom. V, No. 4. 1894. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VII, fasc. 6. VIII, 1—4. 1893/94. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Anno XVI. 1893. Maggio—Agosto. 1893. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1893, No. 51. 1894, No. 1—26. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 117, No. 26. Tom. 118, No. 1—21, 23—26. 1893/94. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 626—630. Février—Juin 1894. 4⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus 1893, No. 17, 18. 1894, No. 1—13. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tom. 14. 1893. 3. et 4. trimestre. 1894. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XXI, No. 8, 9 et table des 20 premiers volumes.
Tom. XXII, No. 1, 2, 3, 4. 1893/94. 8⁰.

Zeitschrift „L'Électricien" in Paris:

L'Électricien. Tom. VI, No. 157, 158. Tom. VII, 159—183. 1893/94. 4⁰.

Kaiserl. Russ. Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg:

Mémoires. Tom. 41, No. 2–5. 1893. 4⁰.
Repertorium für Meteorologie. Band XVI. 1893. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. 13, fasc. 1. 1893. 8⁰.
Scripta botanica. Tom. IV, fasc. 1. 1893. 8⁰.

Kais. russ. archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Vol. 6. Heft 1—4. Vol. 8. Heft 1, 2. 1892/93. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der k. Universität in St. Petersburg

Schurnal. Tom. 25, No. 9. Tom. 26, No. 1—3. 1893/94. 8⁰.
Zum 25jähr. Jubiläum der chem. Abteilung der physikalisch-chem. Gesellschaft (in russ. Sprache). 1894. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1892. Theil I, II. 1893. 4⁰.

Société des naturalistes in St. Petersburg:

Travaux. Tom. 24, Heft 1, 2. 1894. 8⁰.

Sternwarte in St. Petersburg:

Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II, Vol. I. 1893. fol.
Observations de Poulkova. Vol. 10. 1893. fol.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Protokoly No. 48, 49. 1893/94. 8⁰.
Goditschnyi akt (Jahres-Akt) 8. Februar 1894. 8⁰.
P. Kokowzow, Zur Geschichte der mittelalterlichen Philologie und arab.-hebräischen Literatur. Band I. 1893. 8⁰.
A. Domogarow, Von der freien Bewegung des Gyroskops. 1893. 8⁰.
(Beide Schriften in russischer Sprache.)

Historisch-philolog. Fakultät der Universität St. Petersburg:

Sapiski. Tom. 33. Tom. 25, pars II. 1893 u. 1894. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1893. Part II, III. 8⁰.
Journal. II. Ser. Vol. X, part 1. 1894. gr. 4⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings at the 41th annual Meeting, Chicago August 1893. 8⁰.

The Geographical Club of Philadelphia:

Charter, By-laws, List of Members. Bulletin Vol. 1, No. 2. 1894. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine. Vol. XVII, No. 3, 4. 1893/94. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 31, No. 142. 1893. 8⁰.

University of Pennsylvania in Philadelphia:

Catalogue 1893—1894. 1893. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Memorie. Vol. XIII. 1894. 4⁰.
Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 1—61. 1894. 4⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht über d. J. 1893/94. 4⁰.

Historische Gesellschaft für die Provinz Posen in Posen:

Zeitschrift. Jahrg. 7 u. 8. 1892—93. 8⁰.
Sonder-Veröffentlichungen. I, 1, 2. II. 1892—93. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band IX. 1894. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef Akademie der Wissenschaften, Litteratur und Kunst in Prag:

Almanach. Ročník IV. 1894. 8⁰.
Rozprawy (Sitzungsberichte). 1893. Abth. I, II, III. 1894. Třída I. Ročník 3. Číslo 1, 2. Třída II. Ročník 3. 4⁰.
Rozprawy (Abhandlungen). Abth. III. 1893. I. 1894. 4⁰.
Historický Archiv. Číslo 2. 1893/94. 4⁰.
Věstník. Band II. Heft 1—9. Band III. Heft 1—5. 1893/94. 8⁰.
Antonín Pavlíček, Právo listů zástavních (Das Recht der Hypothekenbriefe). 1893. 8⁰.
Sbírka pramenův ku poznáni literárního života (Sammlung der Quellen zur Kenntniss des literar. Lebens in Böhmen, Mähren und Schlesien). No. 1. 1893. 8⁰.
Otakar Kukula, O lithiasi (Von der Steinoperation). 1894. 8⁰.
Bulletin international. Classe des sciences mathématiques. I. 1894. 4⁰.
Antonín Veselý. Medicinská Rus. 1894. 4⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Sitzungsberichte: a) Klasse für Philosophie 1893.
b) Mathem.-naturwissensch. Klasse 1893. 1894. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen zu Prag:

Rechenschaftsbericht vom 11. Dezember 1893. 8⁰.
Georg Bruder, Die Gegend um Saaz. Saaz 1893. 8⁰.
Aliscans mit Berücksichtigung von Wolframs von Eschenbach Willehalm, hsg. von Gustaf Rollin. Leipzig. 1894. 8⁰.
Mittheilung. No. II. 1894. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Casopis. Band 23, No. 1, 2. 1893/94. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht. Jahr 1893. 1894. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:

Casopis. Band 67. Heft 1—4. 1893. 8⁰.

K. K. deutsche Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Somm.-Sem. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:
Mittheilungen. 31. Jahrg. No. 1—4. 1892—93. 8⁰.

Instituto historico e geographico in Rio de Janeiro:
Revista trimensal. Tom. 55, parte II. 1893. 8⁰.
Homenagem. Sessão extraordinaria em commemoração do fallecimento de S. M. o. Snr. D. Pedro II. 1892. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:
Annuario 1893. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:
Bulletin. Vol. IV. 1893. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:
Annuario 1894. 8⁰.
Atti. Serie IV. Classe di scienze morali. Vol. IX, parte 1 e Vol. X, p. I. Memorie. 1893. 4⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. I, parte 2. Notizie degli scavi 1893, Agosto—Dicembre e Indice per l'anno 1893. 1893. 4⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Vol. II, semestre II, fasc. 1, 2 Vol. III, semestre I, fasc. 1—11. 1893/94. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. II, fasc. 11, 12 Vol. III, fasc. 1—4. 1894. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:
Atti. Anno 45, Sessione III—VI. Anno 46, Sessione I—VIII. 1892/93. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:
Bollettino. 1893, No. 4. 1894, 1. 1893/94. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut, röm. Abtheilung, in Rom:
Mittheilungen. Band 8, No. 4. Band 9, No. 1. 1894. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:
Le Opere di Galileo Galilei. Vol. IV. Firenze 1894. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:
Archivio. Vol. XVI, fasc. 3, 4. 1893. 8⁰.

Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte in Rotterdam:
Nieuwe Verhandelingen. II. Reeks, IV. Deel. Stuk I. 1893. 4⁰.

Accademia degli Agiati in Rovereto:
Atti. Anno I—XI. (1883—1893.) 1893/94. 8⁰.
L'Accademia di Rovereto dal 1750 al 1880. 1882. 8⁰

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:
Bericht über d. J. 1892/93. 1893. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):
Annales. Seccion II. Año 1892. 1893. fol.

California Academy of sciences in San Francisco:
Memoirs. Vol. II, No. 3. 1894. 4⁰.

Société scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tom. III, livr. 1—3. 1893/94. 4⁰.

Bosnisch-Herzegowinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Wissenschaftliche Mittheilungen. Band I, II. Wien. 1893—94. 8⁰.

Verein für meklenburgische Geschichte in Schwerin:

Mecklenburgisches Urkundenbuch. Band XVI. 1893. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bulletino di archeologia. Anno XVI, No. 11, 12. XVII, No. 1—4. 1893/94. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speier:

Mittheilungen. XVII. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Stettin:

Baltische Studien. 43. Jahrg. 1893. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Observations du magnétisme terrestre faites à Upsala en 1882—1883. 1893. 4⁰.

Meteorologiska iakttagelser i Sverige. Band 31 (1889). 1893. 4⁰.

Öfversigt. Årgang 50 (1893). 1894. 8⁰.

Carl von Linnés brefvexling, af Ewald Ährling. 1894. 8⁰.

Institut Royal Géologique de Suède in Stockholm:

Carte géologique de la Suède. Série Aa, No. 108, 109. Série Ab, No. 13—15, Série Bb, No. 7, Série C, No. 112.

Nordisches Museum in Stockholm:

Samfundet för Nordiska Museets främjando 1891 och 1892. 1894. 8⁰.

Träsniderimönster i Allmogestil af Wilhelm Oldenburg. 1893. fol.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. XXVII, 1893, No. 10. Tom XXVIII, 1894. Fasc. 1—4. 8⁰.

K. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher. Jahrg. 1893. 4⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. II. Jahrg. 1893. Heft 1—4. 1893. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture in Sydney:

Records of the Geological Survey of N.-South-Wales. Vol. III, part 4. 1893. 4⁰.

Annual Report for 1893. 1894. fol.

The New-South Wales Government Bard for international exchanges in Sydney:

The year Book of Australia 1894. 8⁰.

Royal Society of New-South Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. XXVII. 1893. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):

Anuario. Año de 1894.

Boletín. Tom. I, No. 15. 16. 1893/94. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio (Japan):

Mittheilungen. Heft 53. 1894. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. IV, part 1. 1894. 8⁰.
7th annual Report. 1894. 8⁰.

Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XI, fasc. 2. 1893. 8⁰.

Società Adriatica di scienze naturali in Triest:

Bolletino. Vol. XV. 1893. 8⁰.

Korrespondenzblatt für die Gelehrten und Realschulen Württembergs in Tübingen:

Korrespondenzblatt. 40. Jahrg. Heft 7, 8. Tübingen 1893. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Memorie. Ser. II, Vol. 43. 1893. 4⁰.
Osservazioni meteorologiche, anno 1893. 1894. 8⁰.
Atti. Vol. 29, disp. 1—10. 1893—94. 8⁰.

Universität in Upsala:

De l'emploi des photogrammètres pour mesurer la hauteur des nuages, par Ph. Akerblom. 1894. 8⁰.
Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique. Vol. 25, année 1893. 1893—94. fol.

Historisch Genootschap in Utrecht:

F. de Bas, Brieven van Prins Willelm V. s'Gravenhage 1893. 8⁰.
Werken. III. Serie, No. 1. s'Gravenhage 1893. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen, IV. Reeks. Deel 3, aflev. 1. 1894. 8⁰.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Temi di premio proclamati il 20 maggio 1894. 8⁰.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. VI, part I, II. 1893. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report for 1889—1890. 2 Vols. 1893. 8⁰.

Bureau of Ethnology in Washington:

Bibliography of the Salishan Languages, by F. Const. Pilling. 1893. 8⁰.
Ninth annual Report 1887—1888. 1892. 4⁰.
Museum of comparative zoology. Vol. 25, No. 4. 1894. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report for the year 1890/91. 1893. 8⁰.
The internal Work of the Wind. By S. P. Langley. 1893. 4⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year 1892—93. 1893. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Bulletin No. 28—30. 1893—94. 8⁰.
Annual Report for the year 1891. Part II. 1892. 8⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 26. Jahrg. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes in Wernigerode:

Schriften. 8. Jahrgang 1893. 8⁰.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte, philos.-hist. Classe. Bd. 129. 1893. 8⁰.
" mathem.-naturwissensch. Classe.
Abtheilung I, 1893. No. 1—7. Abth. IIa, 1893. No. 1—7. } 1893. 8⁰.
IIb, 1893. „ 1—7. „ III, 1893. „ 1—7. }
Denkschriften. Philosophisch-historische Classe, Bd. 42. 1893. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 78, II. 79, I, II. 80, I. 1893. 8⁰.
Almanach. 43. Jahrg. 1893. 8⁰.
Mittheilungen der prähistor. Kommission. Bd. I, No. 3. 1893. 4⁰.
14 Stück Separat-Abdrücke aus den Sitzungsberichten der philos.-hist. Classe. 1893. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1891, Heft 4. 1893. Band 43, Heft 2—4.
1894, Heft 4. 1893/94. 4⁰.
Abhandlungen. Band XV, Heft 4—6.
„ VI, II. Hälfte: Text und Tafeln.
„ XVIII, Heft 3. 1893. fol.
Verhandlungen. 1893. No. 11—18. 1894. No. 1—4. 4⁰.

K. K. Gradmessungs-Bureau in Wien:

Astronomische Arbeiten. Band V. 1893. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1894. No. 1—26. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXIII, Heft 6. Bd. XXIV, Heft 1, 2. 1893/94. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 36. 1893. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Jahrg. 1893. Bd. 43, Quartal III u. IV. 1893. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band VIII, No. 3, 4. Band IX, No. 1. 1893/94. 4⁰.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. Band VIII u. IX. 1892/93. 4⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde in Wiesbaden:

Annalen. Band 26. 1894. 8⁰.

Magnetisches Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven:

Beobachtungen. Band I, II, III. Berlin, 1890-93. 4⁰.
Bestimmung der erdmagnetischen Elemente, von M. Eschenhagen. Berlin, 1890. 4⁰.
Erdmagnetische Beobachtungen zu Wilhelmshaven, von E. Eschenhagen. Hamburg, 1893. 4⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:
Sitzungsberichte. Jahrg. 1893. No. 7—9, 11, 12. 1894. No. 1—4. 8°.
Verhandlungen. N. F., Band 27, No. 5. Band 28, No. 1. 1893/94. 8°.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:
Annalen. 28. Jahrgang 1891. (1894.) 4°.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:
Mittheilungen. Band 23, Heft 6. Leipzig 1894. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Zürich:
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 19. Band. 1894. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:
Vierteljahrschrift. Jahrg. 38, Heft 3, 4. Jahrg. 39, Heft 1. 1893/94. 8°.

Schweizerische geodätische Kommission in Zürich:
Das schweizerische Dreiecksnetz. Band VI. 1894. 4°.

Universität Zürich:
Schriften der Universität aus dem Jahre 1893/94. 4° u. 8°.

Von folgenden Privatpersonen:

Gabriel Arnoux in Paris:
Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques. 1894. 8°.

Dr. Beck in Klosterwald, Post Ottobeuren:
Die römischen Strassen Regensburgs. Ottobeuren 1894. 8°.

Constantin Chiru in Bukarest:
Canalisarca rîurilor si irigatiunič. 1893. 8°.

Hermann Escher in Zürich:
Georg v. Wyss, Zwei Nekrologe von Paul Schweizer und Hermann Escher. 1894. 8°.

H. Fritsche in St. Petersburg:
Die magnetischen Lokalabweichungen bei Moskau. 1893. 8°.

Paul Galopin in Genf:
Effets thermiques dus à la compression. Thèse. 1893. 4°.

Hugo Gyldén in Stockholm:
Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales. Tom. I. 1893. 4°.

H. Haug in Gotha:
Vergleichende Erdkunde und alttestamentlich geographische Weltgeschichte. Text- und Kartenheft. 1894. 4°.

J. G. Isola in Genua:
Storia delle lingue e litterature romanze. Parte III, disp. 2. Genova 1894. 8°.

Joseph B. Jack in Konstanz:
Carl Moriz Gottsche. 1893. 8°.
Stephaniella paraphyllina Jack nov. gen. Hepaticarum. 1894. 8°.

Georges Jacquemin in Malzéville bei Nancy:

Emploi rationnel des levures pures sélectionnées pour l'amélioration des boissons alcooliques. Nancy 1894. 8⁰.

James E. Keeler in London:

Physical Observations of Mars. 1893, 8⁰.

J. V. Kull in München:

Repertorium zur Münzkunde Bayerns. Heft IV. 1894. 8⁰.

A. Kurz in Augsburg:

1. Der Mittelpunkt des hydrostatischen Druckes in ebenen Figuren. 2. Zur Theorie der Ausdehnung von Hohlkörpern. 3. Die kleinste Ablenkung im Prisma. 4. Ballistische und Stoss-Versuche. (4 Ausschnitte.)

Die thermischen Capacitäten der festen und tropfbar flüssigen Körper. (Ausschnitt.) 1894. 8⁰.

Ueber die gleitende und rollende Reibung bei der Fallmaschine. Leipzig 1894. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

The ecclesiastical Treatment of Usury. s. l. 1894. 8⁰.

Occult Compensation. Philadelphia. 1894. 8⁰.

Giuseppe de Leva in Padua:

Storia documentata di Carlo V. Vol. V. 1894. 8⁰.

Mrs. Carvill Lewis in London:

The glacial Geology of Great Britain and Ireland, by the late Henry Carvill Lewis. 1894. 8⁰.

L. Martin in Bindjei, Deli:

Neue Lepidopteren aus Sumatra. Batavia 1893. 8⁰.

Marc Micheli in Genf:

Alphonse de Candolle et son oeuvre scientifique. 1893. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 54, No. 1, 2. Tom. 55, No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Charles A. Oliver in Philadelphia:

A Correlation theory of Color-Perception. 1884. 8⁰.

3d and 4th annual Report of the ophthalmological Department of the State Hospital et Norristown. PA. 1888—89. 8⁰.

Emil Pallioppi in Pontresina:

Dizionari dels idioms romauntschs. Fasc. II, III. Samedan. 1894. 8⁰.

Ed. Piette in Saint Quentin:

L'époque éburnéenne et les races humaines de la période glyptique. Saint-Quentin 1894. 8⁰.

J. de Rey-Pailhade in Toulouse:

Le temps décimal. Paris 1894. 8⁰.

Eugenio Ruidiaz y Caravia in Madrid:

La Florida. Su conquista y colonizacion por Pedro Menéndez de Aviles. 2 tom. 1894. 8⁰.

B. Schwalbe in Berlin:

Die wissenschaftliche Fachliteratur. 1894. 8°.

Ferdinando Colonna dei Principi di Stigliano in Neapel:

Le grotte del Monte Taburno. Memoria 2da. 1889. 8°.

Noticie storiche di Castelnuove in Napoli. 1892. 4°.

V. Thomsen in Kopenhagen:

Déchiffrement des inscriptions de l'Orkhon. 1894. 8°.

August Tischner in Leipzig:

Le Mouvement universel. 1893. 8°.

Victor Ritter von Tschusi zu Schmidhoffen in Hallein:

Meine bisherige literarische Thätigkeit 1865—1893. 1894. 8°.

Giuseppe Vincenti in Ivrea:

L'insegnamento del sistema fonografico universale a mano. Torino 1890. 8°.

La fonografia universale Michela. Torino 1893. 4°.

M. E. Wadsworth in Houghton:

A Paper on the Michigan Mining School. Lansing 1894. 8°.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. No. 83. 1894. 4°.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. November 1894.

1. Herr ROBERT HARTIG hält einen Vortrag: „über die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes".

2. Herr E. v. LOMMEL legt eine Notiz des Herrn Professor MAX PLANCK in Berlin: „über den Beweis des Maxwellschen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen" vor.

3. Herr P. GROTH bespricht und überreicht eine Arbeit des Herrn Privatdocenten Dr. ERNST WEINSCHENK: „Beiträge zur Petrographie der östlichen Centralalpen speciell des Gross-Venedigerstockes".

a) Ueber die Peridotite und die aus ihnen hervorgegangenen Serpentingesteine. Genetischer Zusammenhang derselben mit den sie begleitenden Minerallagerstätten,

b) Ueber das granitische Centralmassiv und die Beziehungen von Granit und Gneiss.

Beide Abhandlungen sollen in den Denkschriften veröffentlicht werden.

Ueber die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von Robert Hartig.

(Eingelaufen 8. November.)

Im Anschlusse an meine Untersuchungen des Holzes der Traubeneiche[1]) unterzog ich im Laufe dieses Jahres das Holz der Stieleiche einer eingehenden Bearbeitung und liess zu dem Zweck theils im Guttenberger- und Gramschatzer Walde bei Würzburg, theils in mehreren Waldungen Oberbayerns etwa 30 Bäume fällen, welche ein reiches Untersuchungsmaterial darboten.

Die ausserordentlich grossen Verschiedenheiten, die die Vertheilung des Leitungs-, Festigungs- und Speichergewebes zu erkennen gaben, beruhen einerseits auf Eigenthümlichkeiten des Baumalters und Baumtheiles, andererseits auf Einwirkung äusserer Factoren. In demselben Baumindividuum kann Holz von 0.40 und solches von 0.82 specif. Trockengewicht auftreten.

Das in der Jugend des Baumes und im jugendlichen Alter jedes Baumtheiles gebildete Holz zeichnet sich durch geringe Grösse der Elementarorgane aus. Bis zum achtzigsten

1) Untersuchungen über die Entstehung und die Eigenschaften des Eichenholzes. Forstlich-naturwissenschaftliche Zeitschrift Bd. III, Heft 1. 2. 4. 5. 1894.

Lebensjahre nimmt die Grösse der neu entstehenden Organe zu. Da nun besonders das Lumen der Gefässe an Grösse zunimmt, so erklärt sich schon daraus theilweise die Abnahme des Holzgewichtes mit zunehmendem Baumalter. Der Antheil, den das Markstrahlgewebe am Holze nimmt, ist in der Jugend ein geringer, er wächst bis über das hundertste Lebensjahr und bleibt von da an mehrere Jahrhunderte hindurch ziemlich gleich gross. Der Vorrath an aufgespeicherten Reservestoffen erreicht also etwa im hundertsten Jahre ein Maximum. Wahrscheinlich steht damit der so späte Eintritt der Mannbarkeit der Eiche im Zusammenhange.

Das meiste Festigungsgewebe entsteht im Baume da, wo dieser den grössten Widerstand gegen Sturm u. s. w. leisten muss, d. h. am untersten Stammende und im Wurzelanlaufe. Stammaufwärts vermindert sich der procentische Antheil, den das Festigungsgewebe am Holzringe ausmacht, bis zum Kronenansatze dann, wenn der Querschnitt des Jahrringes nach oben kleiner wird. Das Leitungsgewebe bleibt sich in den verschiedenen Baumhöhen bis zur Krone mit Schwankungen ziemlich gleich und so muss, wenn der Querschnitt des Ringes sich verkleinert, das Festigungsgewebe abnehmen.

Aehnliches habe ich schon früher für andere Holzarten nachgewiesen. Es wird dadurch erklärt, dass bei Windbruchschäden die Bäume meist unterhalb der Krone abbrechen.

Die grossen Markstrahlen nehmen im Baume von oben nach unten zu und erreichen ihr Maximum in den Wurzeln. So betragen dieselben z. B. in dem Gipfel des Baumes 3%, am Stammende 12% und in den Wurzeln 22% vom ganzen Holzkörper. Mit Ausschluss des Wurzelanlaufes enthalten die Wurzeln nur Speicher- und Leitungsgewebe. Das Festigungsgewebe fehlt ganz. Sie bleiben auch stets ohne Kern und sind in Folge dessen für Speicherung

von Reservestoffen und für Wasserleitung ganz besonders geeignet.

Zahl und Breite der Markstrahlen sind bei den Eichen derselben Art ausserordentlich verschieden und hängt deren procentischer Antheil am Holze von der Grösse der Baumkrone und dem Maasse der Lichtwirkung auf diese ab. Eine grosskronige 270jährige Eiche des Mittelwaldes in freier Stellung besass 22% Ast- und Reisigholz und im Holz des unteren Stammtheiles 11% Markstrahlen, eine ebenso alte schwachkronige Eiche mit nur 7.5% Ast- und Reisholz dagegen nur 5% Markstrahlen. Eine völlig freistehende 70jährige Eiche hatte 11% Markstrahlen, eine fast ebenso alte Eiche im geschlossenen Bestande nur 4%. Erfahrungsgemäss tragen freistehende Eichen mit grossen Kronen häufiger und reichlicher Eicheln, als schwachkronige Bäume im geschlossenen Bestande, da sie einen grösseren Procentantheil ihrer jährlichen Production in Form von Ueberschüssen als Reservestoffe aufzuspeichern vermögen.

Die Entwicklung des Leitungsgewebes hängt von der Verdunstungsgrösse des Baumes ab. Erzeugt ein Baum nur so viel organische Substanz, als erforderlich für die Ausbildung des Leitungsgewebes ist, so entsteht überhaupt kein Festigungsgewebe. Je günstiger der Ernährungszustand des Baumes im Vergleich zu seiner Verdunstungsgrösse ist, um so mehr Festigungsgewebe wird von ihm erzeugt. Das Festigungsgewebe stellt gewissermassen den Ueberschuss der Production an Bildungsstoffen über den Bedarf an Leitungsgewebe dar, insoweit derselbe nicht zur Herstellung von Speichergewebe und Reservestoffen verbraucht wird. Auf nahrkräftigem Boden wird desshalb mehr Festigungsgewebe gebildet, als auf magerem Boden. Die Breitringigkeit ist desshalb aber noch kein sicheres Zeichen für die Güte des Holzes. Freistehende Bäume mit sehr grosser Krone und Blattmenge verdunsten so viel Wasser, dass oft der grösste

Theil der erzeugten Bildungsstoffe zur Ausbildung von Leitungsgewebe verwendet werden muss. In einem geschlossenen Eichenbestande besitzen die breitringigen, am schnellsten gewachsenen Bäume fast nie das schwerste Holz, vielmehr findet sich dies bei denjenigen Eichen, deren Krone seitlich eingeengt ist und desshalb weniger verdunstet. Die Bäume mit voller, hoher Krone besitzen in der Regel einen Ueberfluss an verdunstenden Blättern, deren Assimilationsenergie durch Mangel an Nährstoffzufuhr aus dem Boden nicht zur Maximalhöhe gesteigert ist. Durch eine nicht zu weit gehende Entnahme belaubter Aeste wird die verbleibende Blattmenge zu voller Productionsthätigkeit befähigt. Die Menge der erzeugten Substanz bleibt dieselbe, die sie vor der Ausästung war, das nunmehr entstehende Holz zeigt aber weniger Leitungsgewebe und entsprechend mehr Festigungsgewebe, da mit der Entnahme von Blättern die Verdunstungsgrösse sich vermindert hat.

Specifische Verschiedenheiten im anatomischen Bau des Holzes der Traubeneiche und der Stieleiche liessen sich nicht erkennen, da alle Merkmale, die man bisher benutzt hat, um solche festzustellen, innerhalb derselben Art den grössten Schwankungen unterworfen sind.

Substanzielle Verschiedenheiten im Holze beider Eichenarten waren ebenfalls nicht nachweisbar, da auch in dieser Beziehung innerhalb derselben Species grosse Schwankungen vorkommen. Beim Uebergange aus dem Splintzustande in den des Kernes wird die Reservestärke der innersten Splintringe zur Entwicklung von Thyllen in den Gefässen grossentheils verbraucht. Durch Zufuhr von Gerbstoff, durch Ablagerung desselben und seiner Spaltungsproducte vermehrt sich die Substanzmenge im Durchschnitt um etwa 6 Gewichtsprocente. Zugleich vermehrt sich das specifische Gewicht der Wandungssubstanz erheblich. Bei der Traubeneiche des Spessartes und bei der

Stieleiche in Oberbayern schwankt das Gewicht der Wandungssubstanz im Splinte zwischen 1.55 und 1.565. Dasselbe steigert sich in Folge der Verkernung auf 1.59 bis 1.60. Der Umstand, dass bei der Kernbildung die Substanzmenge und zugleich das specifische Gewicht der Substanz sich vermehrt, berechtigt zu dem Schlusse, dass die Zunahme des specifischen Substanzgewichtes der Zufuhr einer Substanz von sehr hohem specifischen Gewichte zuzuschreiben sei, womit aber die Möglichkeit nicht ausgeschlossen sein soll, dass auch die Holzwandungssubstanz selbst bei der Verkernung Veränderungen unterworfen sei.

In den bei Würzburg gefällten Eichen ergab die Untersuchung sehr verschiedene specifische Gewichte der Substanz, nämlich 1.55 bis 1.66 für den Splint und 1.56 bis 1.71 für den Kern. Die Untersuchung, welchen Umständen diese grossen substanziellen Verschiedenheiten zuzuschreiben sind, hat noch nicht zu befriedigenden Resultaten geführt.

---

ber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen.

Von Max Planck.

(Eingelaufen 8. November.)

Unter obigem Titel hat Herr L. Boltzmann in den itzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der . b. Akademie der Wissenschaften vom 5. Mai 1894 gegen en Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes, wie er sich in den von mir herausgegebenen Kirchhoff'schen Vorlesungen über die Theorie der Wärme, S. 142 ff., findet, einen Einwand geltend gemacht. Da sich die Spitze des Angriffs zum grossen Theil gegen den Herausgeber jener Vorlesungen richtet, indem von Ungenauigkeiten der Darstellung gesprochen und sogar die Stellung des Herausgebers zur kinetischen Gastheorie damit in Verbindung gebracht wird, so liegt mir daran, mich gegen diesen Vorwurf zu vertheidigen. Es könnte nämlich durch ihn leicht die Meinung erweckt werden, als ob in die Darstellung des genannten Beweises sich irgend ein Mangel in der Form eingeschlichen habe, der durch Anwendung grösserer Sorgfalt und Genauigkeit von Seiten des Herausgebers hätte vermieden werden können.

Eine solche Meinung wäre aber durchaus irrig. Bei keiner anderen Stelle des Kirchhoff'schen Buches bietet das

vom Verfasser hinterlassene Manuscript mehr Garantieen dafür, dass die Vorlesung thatsächlich genau so gehalten wurde, wie sie gedruckt vorliegt, und in der That handelt es sich bei dem Boltzmann'schen Einwand keineswegs um ein mögliches Missverständniss oder um eine Unklarheit in der Ausdrucksweise, sondern der Einwand trifft gerade den Kern des ganzen Beweises; es ist nicht denkbar, demselben Rechnung zu tragen, ohne dass der Ideengang vollständig abgeschnitten wird. Von einem Mangel in der Darstellung kann also gar nicht die Rede sein, und damit halte ich die Aufgabe des Herausgebers für erledigt, wie das auch in meinem Vorwort ausdrücklich hervorgehoben ist. Eine Kritik des vorgetragenen Gedankenganges und an Stelle eines unvollkommenen Beweises womöglich einen besseren verlangen heisst doch nicht weniger, als vom Herausgeber ein neues Buch fordern. Wer würde dann wohl die Verantwortung übernehmen können, ein nachgelassenes Werk herauszugeben?

Nach der formellen Rechtfertigung sei mir auch noch ein Wort zum Inhalt verstattet. Den Boltzmann'schen Einwand habe ich mir seinerzeit ebenfalls gemacht, wenn auch in etwas anderer, doch in so wenig abweichender Form, dass ich hier nicht mehr darauf zurückkomme und mich einfach auf die Anerkennung seiner sachlichen Berechtigung beschränke. Ich habe aber daran noch eine weitere Ueberlegung geknüpft, die ich bei dieser Gelegenheit hier anfügen möchte, obwohl ich nicht sicher weiss, ob sie nicht schon einmal angestellt worden ist. In dem Maxwell-Kirchhoff'schen Beweis wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Moleküle nach Beendigung eines Zusammenstosses in bestimmter Weise auseinanderfliegen, aus dem Satze von der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer unabhängiger Ereignisse auf zwei verschiedene Weisen berechnet: einmal direct durch Betrachtung des Zustandes nach dem Stoss, das andere Mal durch Betrachtung des Zustandes vor

dem Stoss. Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke resultirt dann das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz. Die erste Berechnungsart ist aber im Allgemeinen nicht zulässig, da die Zustände der Moleküle nach dem Stoss nicht mehr unabhängige Ereignisse sind im Sinne jenes benutzten Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nur bei Gültigkeit des Maxwell'schen Gesetzes wird also jene Berechnung richtig, oder mit anderen Worten: wenn das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz gilt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Moleküle mit bestimmten Geschwindigkeiten auseinanderfliegen, ebenso gross als die, dass zwei Moleküle mit denselben Geschwindigkeiten zusammentreffen. Bei allen anderen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzen gilt dieser Satz nicht.

Wenn man nun in einem in vollständigem Gleichgewicht befindlichen Gas die Geschwindigkeiten sämmtlicher Moleküle plötzlich gerade umgekehrt denkt, so verwandelt sich je ein Paar gerade vor einem Zusammenstoss befindlicher Moleküle in ein Paar gerade auseinanderfliegender Moleküle und umgekehrt; dann vertauschen sich also auch die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Gilt nun das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz, bei welchem diese Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind, so befindet sich auch nach dem Verwandlungsakt das Gas in einem Zustand dynamischen Gleichgewichts; gilt aber ein anderes Vertheilungsgesetz, so kann dies offenbar nicht mehr zutreffen.

Nun besagt aber ein allgemeiner, aus dem Hamilton'schen Princip abzuleitender Satz der Mechanik, dass in einem Punktsystem mit conservativen Kräften, welches sich im dynamischen Gleichgewicht befindet, eine plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten abermals einen dynamischen Gleichgewichtszustand bedingt. Demzufolge muss man schliessen: „Das Maxwell'sche Gesetz ist das einzige Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz, welches im Einklang steht

mit dem Satze der Mechanik, dass der dynamische Gleichgewichtszustand eines Punktsystems durch ein plötzliches Umkehren aller Geschwindigkeiten nicht gestört wird.“ Durch diese Ueberlegung wird, so viel ich sehe, der Boltzmann'sche Einwand ganz vermieden und das Maxwell'sche Gesetz auf einen festeren Boden gestellt. Hervorheben möchte ich noch besonders, dass die Frage, ob eine solche plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten physikalisch ausführbar ist, hiebei ganz ausser Betracht bleibt.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1894.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Entsprechend der Geschäftsordnung der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften finden jährlich zwei öffentliche Sitzungen statt, zu welchen nicht nur Eingeladene, sondern Jedermann Zutritt hat; die eine an einem sogenannten Königstage, zu Ehren ihres Protectors, die andere an ihrem Stiftungstage. Die heutige Festsitzung gilt unserm durchlauchtigsten derzeitigen Protector, Seiner königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten Luitpold von Bayern, der in diesem Saale ebenso wohlwollend zu uns niederschaut, wie wir alle ehrfurchtsvoll und dankbar zu ihm aufschauen.

Zunächst sei mir gestattet, einige Thatsachen mitzutheilen, aus welchen hervorgeht, wie unablässig unser Protector und seine Staatsregierung für die Akademie und für die wissenschaftlichen Sammlungen, welche mit der Akademie verbunden sind, Sorge tragen, und nebstdem auch zu erwähnen, was von anderen Seiten geschehen ist, die Zwecke der Akademie und des Generalconservatoriums zu fördern.

Dann wird durch die HH. Classensecretäre die Verkündigung der von Seiner königlichen Hoheit bestätigten Wahlen neuer Mitglieder folgen und schliesslich Hr. College Professor Dr. Sohncke die Festrede über einen allgemein interessirenden Gegenstand, über die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten, halten.

Als ich im vorigen Jahre an dieser Stelle über akademische Ereignisse der vorangegangenen Zeit berichtete, gedachte ich auch unseres an den damals versammelten Landtag gerichteten Antrages, der Akademie ein Capital von etwa 500 000 ℳ oder einen jährlichen Zuschuss von 20 000 ℳ zu bewilligen, um damit wissenschaftliche Unternehmungen der drei Classen unserer Akademie zu ermöglichen. Regierung und Landtag haben in dankenswerther Weise wenigstens einen Theil dieses Antrages sich angeeignet und einen auf 20 Jahre berechneten jährlichen Zuschuss von 5000 ℳ bewilligt, um damit die Kosten der von unserer Akademie im Bunde mit den anderen grossen wissenschaftlichen Körperschaften Deutschlands und Oesterreichs geplanten und bereits begonnenen Bearbeitung eines neuen grossen lateinischen Wörterbuches (Thesaurus linguae latinae) zu bestreiten. Seither haben die hiefür verbundenen fünf Körperschaften eine eigene Commission für dieses Unternehmen gebildet, zu deren thätigsten Mitgliedern eines der Mitglieder unserer philosophisch-philologischen Classe, Prof. Dr. v. Wölfflin, gehört.

Wir erneuern den Ausdruck unseres lebhaften Wunsches, dass insbesondere den naturwissenschaftlichen Disciplinen weitere hochherzige Spenden des künftigen Budgetlandtages zu Hülfe kommen möchten.

Der neu begründete Verband wissenschaftlicher Körperschaften hat seither zwei weitere Delegirten-Versammlungen gehalten, die erste im Mai dieses Jahres in Göttingen, die andere im September in Innsbruck. Auf beiden wurde

namentlich der Plan eines weiteren gemeinsamen wissenschaftlichen Unternehmens, gleichartig organisirte Untersuchungen über den Zusammenhang der Erdschwere mit den tektonischen Verhältnissen der Erdrinde, berathen. In Göttingen wurde beschlossen, zu diesem Zwecke mit der seit Jahren bestehenden internationalen Commission für Erdmessung, an der auch unsere Akademie durch eine eigene ständige Commission betheiligt ist, in Verbindung zu treten. Das ist nun auch in Innsbruck geschehen und hat dahin geführt, dass die vom 5. bis 12. September dort tagende permanente Commission der internationalen Erdmessung sich bereit erklärte, dahin zu wirken, dass aus ihrem Schoosse eine eigene Section für das Studium der Schwere sowohl nach ihrer Intensität, wie auch nach ihrer Richtung gebildet werde, von welcher Section durch Beiziehung von Geologen auch die einschlägigen geologischen und geophysischen Probleme bearbeitet werden könnten.

Von den vom bayerischen Landtag für die Zwecke der Akademie und der mit ihr verbundenen wissenschaftlichen Sammlungen des Staates weiterhin neubewilligten Summen sind besonders hervorzuheben: der Betrag von 168000 ℳ für den vollständigen Umbau der Gewächshäuser im Botanischen Garten und für die neue Einrichtung des Botanischen Instituts, weiter die für den Neubau des Physiologischen Hörsaales und den Umbau des Physiologischen Instituts bewilligte Summe von 162000 ℳ.

Kleinere Beträge, zusammen etwa 9400 ℳ, wurden für Einrichtung oder Ausstattung des Botanischen Instituts, dann der mathematisch-physikalischen, der geologischen und der mineralogischen Sammlung im ausserordentlichen Etat bewilligt. Der ordentliche Etat der zoologischen Sammlung wurde um jährlich 1714 ℳ erhöht.

Mit Bedauern muss ich erwähnen, dass der Conservator der mathematisch-physikalischen Sammlung, Geheimrath

Professor Dr. v. Boltzmann, schon nach einer Wirksamkeit von drei Jahren uns wieder verlassen hat, um einem höchst ehrenvollen Ruf in seine Heimath, nach Wien, zu folgen. Die Akademie kann, gleich der mit ihr zu einträchtigem Wirken verbundenen Ludwigs-Maximilians-Universität, nur den Wunsch und die Hoffnung aussprechen, dass recht bald ein dieses Vorgängers würdiger Nachfolger sich finden möge.

Eine wesentliche Aenderung ist auch bei dem bis zu die jüngste Zeit mit dem k. Münzcabinet durch eine Art von Personalunion verbundenen Museum von Abgüssen classischer Bildwerke erfolgt, indem nach dem Rücktritt des inzwischen verstorbenen Conservators der beiden Sammlungen, des Geheimen Raths Professor Dr. v. Brunn, das von ihm begründete Museum von Gypsabgüssen unter dem neuen Professor der Archäologie an der Universität München, Professor Dr. Furtwängler, zum Range eines selbständigen Conservatoriums erhoben und damit einem von seinem Gründer seit langen Jahren gehegten Wunsch entsprochen wurde.

Aus dem der Akademie gehörenden, hauptsächlich der Vermehrung unserer wissenschaftlichen Sammlungen dienenden, leider nur allzu kleinen sogen. Mannheimer Reservefonds haben seit meinem letzten Bericht die paläontologische Sammlung, das Botanische Institut, das Antiquarium und die mathematisch-physikalische Sammlung bescheidene Zuschüsse erhalten, theils zur Vermehrung der Sammlungen, theils zur Anschaffung von Instrumenten. Sollte der nächste Landtag unserer Bitte um Gründung eines neuen akademischen Fonds Gehör schenken, so würde uns damit die Möglichkeit geboten, diese und andere ebensosehr der allgemeinen Volksbildung wie dem strengen wissenschaftlichen Studium dienende Sammlungen auf eine Stufe zu heben, welche den verwandten Instituten anderer Staaten entspricht

Inzwischen freuen wir uns, wenn hin und wieder — und geschähe es nur in zehnfach höherem Maassstab! — der patriotische und wissenschaftliche Eifer von einzelnen Privaten unsere Staatssammlungen bedenkt. Von dem, was im letzten Jahre auf diese Weise denselben zugekommen ist, gedenke ich dankbar der Geschenke, welche unsere Landsleute, der kaiserliche Gouverneur von Kamerun, Eugen v. Zimmerer, dann Herr Hofrath Dr. Martin in Sumatra, weiter der Afrikareisende Dr. Holub in Wien dem ethnographischen Museum und der zoologischen Sammlung gemacht haben. — Hochwillkommen waren auch schöne Geschenke, mit welchen die HH. Apotheker Burger und Zeichnungslehrer Heinrich Morin dahier, sodann Professor Selenka in Erlangen und Apotheker Wispauer in Singapore die zoologische Sammlung bedacht haben.

Die zoologische Sammlung hat ihrerseits gern zur weiteren Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse im Lande beigetragen dadurch, dass sie entbehrliche Doubletten verschiedenen Gymnasien und anderen Mittelschulen zutheilte.

Auf ihrem engeren Arbeitsgebiet hat die Akademie auch im vergangenen Jahre besonders nach zwei Richtungen hin sich thätig erwiesen: einerseits durch eigene wissenschaftliche Publicationen philosophisch-philologischer, mathematisch-physikalischer und historischer Art, andererseits durch Pflege eines sehr ausgedehnten Schriftentausches mit zahlreichen anderen wissenschaftlichen Instituten und Körperschaften — ein Tausch, welcher insbesondere der kgl. Hof- und Staatsbibliothek zu gute kommt, der wir nach altem Herkommen alle uns nicht doppelt zugehenden Publicationen überreichen.

Von den speciellen Unternehmungen unserer Akademie gedenke ich heute auch noch des seit einer Reihe von Jahren theils durch Geldmittel, theils durch Arbeitskräfte der Aka-

demie geförderten Werkes, der Herstellung einer hydrographischen Karte des Bodensees, eines Unternehmens, zu dem sich die fünf Uferstaaten verbunden hatten und welches nun Anfangs dieses Jahres zu einem gewissen Abschluss gelangt ist. Die gemeinsamen Kosten beliefen sich bis dahin auf etwa 56 000 Francs; auf Bayern, d. h. auf unsere Akademie, trafen davon etwa 7300 Francs oder 5800 ℳ, ungerechnet die von uns besonders gedeckten Reisekosten einzelner Mitarbeiter an dem schönen Unternehmen. Wenn wir uns dabei erinnern, wie schwer es uns manchmal gewesen ist, einen an sich so kleinen Betrag an unsern laufenden jährlichen Ausgaben gleichsam abzusparen, so müssen wir immer wieder mit einem gewissen Neid unsern Genossinnen zu Berlin und Wien gedenken, welche für sich allein zehnmal grössere wissenschaftliche Unternehmungen in die Hand nehmen und zu Ende führen können.

Ich möchte desshalb schliesslich hier noch beifügen, dass die reichen Mittel, welche anderen Akademien zu Gebote stehen, nicht allein vom Staate kommen, sondern dass ansehnliche Theile auch aus Schenkungen von Personen stammen, welche unaufgefordert wissenschaftliche Forschungen und Werke grossmüthig zu unterstützen streben. So besitzt z. B. die Wiener Akademie durch mehrere testamentarische Verfügungen ein Capital von nahezu 200 000 Gulden österreichischer Währung, d. i. gegen 400 000 ℳ, dessen Zinsen sie im Sinne der Stifter für verschiedene wissenschaftliche Zwecke verwenden kann. Unsere Akademie hat nur ein einziges Mal einen reichen Geber gefunden, der aber kein Münchener, auch kein Bayer, noch aus einem anderen Theile von Deutschland ist. Im Jahre 1877 schenkte uns ein Grieche, der Bankier Hr. Christakis Zographos, zur Förderung des Studiums der griechischen Sprache und Literatur ein Capital im Betrage von 25 000 Francs oder 20 000 ℳ. Mit den Zinsen von diesem Capitale konnten Preisaufgaben

gestellt und die rühmlichst gelösten honorirt werden. Zwei der Preisträger, die HH. Oberhummer und Krumbacher, wurden dadurch veranlasst, Reisen nach Griechenland und in den Orient zu unternehmen und seltene Handschriften in auswärtigen Bibliotheken zu untersuchen. Der Zographos-Fonds gehört ausschliesslich unserer philosophisch-philologischen Classe zur Verwendung; aber auch die historische Classe und namentlich die mathematisch-physikalische hätte viele Wünsche und Aufgaben, die weder durch den Zographos-Fonds, noch durch den Thesaurus linguae latinae gefördert werden können.

Wahlen.

Der Classensekretär, Herr C. v. Voit, giebt sodann die von der Akademie vorgenommenen und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigten Wahlen bekannt. Es wurden in der mathematisch-physikalischen Classe gewählt:

zum ordentlichen Mitgliede:

Herr Generalmajor a. D. Dr. Carl v. Orff, bisher ausserordentliches Mitglied;

zu ausserordentlichen Mitgliedern:

Herr Dr. Ferdinand Lindemann, o. Professor der Mathematik an der Universität München;

Herr Dr. Alfred Pringsheim, a. o. Professor der Mathematik an der Universität München.

Sitzung vom 1. Dezember 1894.

1. Herr H. SEELIGER legt eine Abhandlung: „übe Schatten eines Planeten" vor.

2. Herr FERD. LINDEMANN spricht: „über die con: Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusa= hängendes Flächenstück, das von einer algebra:: Curve begrenzt wird."

3. Herr A. v. BAEYER hält einen Vortrag: „ü:- Natur der Terpentinöle und verwandter Subst:

Die Resultate dieser Untersuchungen werden a: anderen Orte veröffentlicht werden.

er die conforme Abbildung der Halbebene auf einfach zusammenhängendes Flächenstück, das n einer algebraischen Curve begrenzt wird.

Von F. Lindemann.

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

Schon 1869 hatte Schwarz gelehrt, wie man das Innere Parabel und das Innere einer Ellipse auf das Innere Kreises (oder auf die Halbebene) conform abbilden ; bald darauf fügte er die Abbildung des Aeusseren Parabel oder Ellipse hinzu.[2]) Auch für ein Flächen-, das durch eine endliche Anzahl von geradlinigen ken oder Kreisbögen begrenzt wird, kann man die Abng nach Schwarz leisten,[3]) d. h. auf die Lösung einer ssen Differentialgleichung (dritter Ordnung) zurückführen. o hat dann in seiner Dissertation[4]) einen Ansatz zur ng für den Fall gegeben, dass es sich um ein Polygon

1) Borchardt's Journal Bd. 70 und Annali di matematica II. Serie Vgl. Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 77 und 102.

2) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, hrg. 1870. Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 141.

3) Borchardt's Journal Bd. 70 und 75; vgl. für geradlinig be-te Flächen Christoffel, Annali di matematica, II. Serie Bd. 1, und Bd. 4.

4) Die Abbildung des Aeusseren eines Kreisbogenpolygons auf reisfläche. Königsberg, 1885.

handelt, das von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkte begrenzt wird; doch lässt dieser Ansatz nicht die Richtung erkennen, in welcher eine Verallgemeinerung zu erwarten sei.

Andere Beispiele, in denen die Fläche durch einen stetig gekrümmten Curvenzug begrenzt wird, waren nicht bekannt. Kürzlich habe ich nun eine Methode angegeben[1] nach der das fragliche Problem gelöst werden kann, wenn sich eine rationale Function von x und y mit reellen Coëfficienten derartig bestimmen lässt, dass eine passende Potenz des Quotienten (wo Φ eine rationale Function bezeichnet

$$\frac{\Phi(z, z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}$$

eine rationale Function von z wird, vorausgesetzt, dass die Gleichung der begrenzenden Curve in der Form

$$(1) \qquad f(z, z_1) = 0$$

gegeben ward, und dass $z = x + i y$, $z_1 = x - i y$ gesetzt wird, wobei x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten. Dieser Fall liegt in den von Schwarz behandelten Beispielen (Ellipse und Parabel) vor, ferner bei der Hyperbel, bei jeder Curve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgeht, bei jeder Curve vierter Ordnung, welche in jedem der imaginären Kreispunkte einen Doppelpunkt hat, und bei vielen Curven $n$ter Ordnung, z. B. allen, deren Gleichung in der Form

$$a z^n z_1^n + b z^n + b_1 z_1^n + c = 0$$[2]

1) Sitzungsberichte der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., 7. Juni 1894.

2) Früher hatte ich nur den Fall $a = 0$ erwähnt; Herr A. Löwy machte mich darauf aufmerksam, dass man das Beispiel in der jetzt gegebenen Weise verallgemeinern kann.

geschrieben werden kann, wo a und c reell, b und b_1 zu einander conjugirt sind.

Wird dagegen der Rand des abzubildenden Flächenstückes durch eine beliebige algebraische Curve gebildet, so soll durch die folgenden Ueberlegungen ein Ansatz für das betreffende Problem gegeben werden.

1. Wir setzen $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$, wo x und y die orthogonalen Coordinaten eines Punktes des Randes seien, und schreiben die Gleichung der begrenzenden Curve $n$ter Ordnung wieder in der Form (1); dieselbe möge keine singulären Punkte besitzen.

Wir benutzen im Folgenden vielfach diejenige Function η, durch welche sich die Coordinaten eines Punktes der Curve nach Schottky, Poincaré und Klein als eindeutige Functionen darstellen lassen. Es werde allgemein

$$(2) \qquad \{\varphi, z\} = \frac{d^2 \log \varphi'}{d z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \varphi'}{d z}\right)^2$$

gesetzt, wo $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$; dann ist bekanntlich nach Schottky und Cayley[1]), wenn z als Function von Z gedacht wird:

$$(3) \qquad \{\varphi, Z\} = \{z, Z\} + \{\varphi, z\}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2.$$

Ersetzt man hierin φ und z durch z_1, so wird

$$(4) \qquad \{z, z_1\}\left(\frac{dz_1}{dX}\right)^2 = -\{z_1, z\}\left(\frac{dz}{dX}\right)^2.$$

Durch die complexe Variable $Z = X + iY$ werde ein Punkt der Halbebene $Y > 0$ dargestellt, auf welche das von der Curve (1) umschlossene Oval abgebildet werden soll. Auf dem Rande ist dann $Z = X$ reell, während $z = x + iy$

1) Vgl. z. B. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. II, p. 362.

und $z_1 = x - iy$ einander conjugirt sind. Man erkennt demnach aus (4), dass die linke Seite nur ihr Zeichen wechselt, wenn man i mit $-i$ vertauscht; diese linke Seite ist also auf dem Rande rein imaginär.[1])

2. Vermöge der Gleichung (1) fassen wir z_1 als Function von z auf. Ueber der z-Ebene haben wir dann eine Riemann'sche Fläche, deren Verzweigungspunkte mit den Brennpunkten der Curve $f = 0$ zusammenfallen.[2]) Die Ausdehnung der Abbildungs-Aufgabe auf diese ganze Fläche führte mich in den eben bezeichneten einfachen Fällen zur Lösung und wird uns auch jetzt zum Ziele führen.

Das auf die Halbebene abzubildende Flächenstück wird durch ein Oval der Curve $f = 0$ begrenzt. Das Blatt der Fläche, in welchem das Oval liegt, bezeichnen wir als erstes Blatt. Dasselbe ist in der Regel durch mindestens zwei Brennpunkte, die im Innern des Ovals liegen, mit einem zweiten Blatte verbunden (wie man durch Grenzübergang erkennt, wenn man einen Doppelpunkt auflöst). Ausserdem hängt das erste oder zweite Blatt vielleicht durch andere Brennpunkte mit noch weiteren Blättern der Fläche zusammen. Alle Brennpunkte, zu denen man von einem im

---

1) Man zeigt leicht, dass sie gleich $4i\frac{dk}{dX}\cdot\frac{ds}{dX}$ ist, wenn k das Krümmungsmaass, und ds das Bogenelement der Curve bezeichnet.

2) Bei Construction dieser Fläche ist es nützlich, sich derjenigen Vorstellungen zu bedienen, welche ich in den „Vorlesungen über Geometrie" (Bd. II, Theil 1, p. 621 ff., 1891) über die Interpretation der complexen Zahl z entwickelt habe, und welche den Zusammenhang mit den imaginären Kreispunkten und sonach mit den Brennpunkten sofort erkennen lassen. Klein erwähnt neuerdings in einem Berichte über seine Vorlesungen (1891—92), dass er sich derselben Art Riemann'scher Flächen bedient habe (Math. Annalen Bd. 43, p. 143); es sei bemerkt, dass ich die oben erwähnten Beispiele der Abbildungsaufgabe schon 1892 vorgetragen habe, vgl. auch Sitzungsbericht der phys.-ökon. Ges. zu Königsberg i. Pr. vom 6. Oktober 1892.

ersten Blatte und innerhalb des Ovals gewählten Punkte gelangen kann, ohne das Oval oder eine in anderen Blättern über dem Oval liegende Curve zu überschreiten, bezeichnen wir als innere Brennpunkte, alle anderen als äussere Brennpunkte. Ein Verzweigungspunkt, der zwar im Innern des Ovals liegt, aber nicht in einem Blatte, in das man ohne das Oval zu überschreiten aus dem Innern des Ovals (im ersten Blatte genommen) gelangen könnte, ist also auch ein äusserer Brennpunkt.

Betrachten wir eine Function, welche von dem Punkte z, z_1 innerhalb dieser untereinander verzweigten Blätter eindeutig abhängt (wobei z, z_1 weder den Rand des Ovals noch eine darüber liegende Curve überschreitet), als Function von $Z = X + iY$ (wo $Y > 0$ die als Bild dienende Halbebene definirt), so erhalten wir über der Z-Ebene eine Riemann'sche Fläche, in welcher jedem „inneren" Brennpunkte der Curve $f = 0$ ein Verzweigungspunkt der oberen Halbebene entspricht, und bei der vermöge dieser Verzweigungspunkte ebenso viele Blätter zusammenhängen als bei der gegebenen Fläche im Innern des Ovals. Es fragt sich nun, wie ist diese Riemann'sche Fläche über die reelle X-Axe hinaus in jedem der fraglichen Blätter fortzusetzen, wenn der Punkt z, z_1 den Rand des Ovals in einem der über der z-Ebene liegenden Blätter überschreitet?

Geschieht dies im ersten Blatte, so ist klar (da die betrachtete Function für reelle Werthe von X im ersten Blatte reell sein muss, um für das Abbildungsproblem verwandt werden zu können), dass sich über die untere Halbebene eine symmetrische Riemann'sche Fläche als Fortsetzung des zuerst betrachteten Theiles ausbreiten wird; dieselbe besteht aus einer gleichen Anzahl von Blättern, und in ihnen nimmt die betrachtete Function Werthe an, welche denjenigen conjugirt sind, die ihr in den entsprechenden Punkten der

Blätter über der oberen Halbebene zukommen. Wie sich aber die so über der unteren Halbebene ausgebreiteten Blätter nun wieder in die obere Halbebene fortsetzen, bleibt zu erörtern.[5])

3. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Curve $f=0$ aus $p+1$ reellen Zügen besteht, wenn p das Geschlecht der Curve bezeichnet. Nach Schottky[1]) kann man die vom Punkte z, z_1 gebildete Riemann'sche Fläche auf einen durch $2p$ Kreise (von denen etwa einer die übrigen umschliesst) begrenzten Theil der Ebene conform und eindeutig abbilden. Ist ein Punkt der letzteren durch die complexe Zahl η bestimmt, so geschieht die Abbildung durch Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$(5) \qquad \{\eta, z\} = \varphi(z, z_1),$$

wo φ eine gewisse rationale Function von z und z_1 bezeichnet; es wird η als Quotient der beiden particulären Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coëfficienten gefunden.

Die $2p$ Kreise sind einander paarweise zugeordnet, so dass der Punkt η von dem einen Kreise eines Paares zu dem zugeordneten springt, wenn der Punkt z, z_1 einen bestimmten von den $p+1$ reellen Zügen der Curve überschreitet. Jedem reellen Zuge (einen zunächst ausgenommen) entspricht so ein Paar von Kreisen; jedes Paar besteht aus

1) Bei den früher von mir behandelten Beispielen geschah dies einfach, indem die über $Y>0$ liegenden Halbblätter sich sämmtlich direct in die über $Y<0$ liegenden Halbblätter fortsetzten. Im Allgemeinen geschieht dies indessen nur im ersten Blatte.

2) Vgl. Borchardt's Journ. Bd. 83. 1877 und die 1875 erschienene Inaugural-Dissertation. Schottky und Klein machen darauf aufmerksam: Math. Annalen Bd. 30. p. 300 und Bd. 21. p. 143, dass sich in dem 1876 veröffentlichten Riemann'schen Nachlasse (Ges. Werke p. 413) bereits ähnliche Untersuchungen finden.

zwei Kreisen, die einander in Bezug auf einen und denselben $(2p+1)$ten Kreis zugeordnet sind und durch eine solche lineare Transformation von η (eigentlich durch eine „Spiegelung") aus einander entstehen, welche diesen $(2p+1)$ten Kreis ungeändert lässt. Der letztere geht aus dem $(p+1)$ten reellen Zuge der Curve bei der Abbildung hervor. Die Function η kann über jeden Kreis hinaus durch den bekannten Process der „Spiegelung" fortgesetzt werden; dadurch wird die Unsymmetrie beseitigt, welche in Bezug auf den $(p+1)$ten reellen Zug nach der soeben gegebenen Darlegung zu bestehen scheinen würde. Auf jedem Kreise, also auch auf jedem reellen Zuge der Curve $f=0$, nimmt eine gewisse lineare Function von η reelle Werthe an.

4. Denjenigen Kreis, welcher dem Rande des gegebenen Ovals entspricht, denken wir uns als reelle Axe einer H-Ebene, auf welche wir die η-Ebene mittelst einer linearen Transformation abbilden. Die anderen $2p$ Kreise liegen dann paarweise symmetrisch zu dieser Axe.

Die Function $\{H, Z\}$ ist hiernach reell auf dem Rande des Ovals; für sie denken wir uns über der Z-Ebene die in Nr. 2 erwähnte mehrblättrige Fläche construirt.

Die reellen Coordinaten x, y eines reellen Punktes der Curve lassen sich nach Schottky als eindeutige automorphe Functionen von H darstellen:

$$x = \varphi(H), \quad y = \psi(H),$$

welche für reelle Werthe von H reell sind, also für conjugirte Werthe von H auch einander conjugirte Werthe annehmen. In den Veränderlichen z und z_1 haben wir die Parameter-Darstellung

$$(6) \qquad z = \varphi(H) + i\psi(H), \quad z_1 = \varphi(H) - i\psi(H).$$

Es sei nun $u_r + i v_r = \varphi(H_r)$, $w_r + i\omega_r = \psi(H_r)$; und es

mögen $H_1, H_2, \ldots H_\mu$ (wo $\mu \leqq n$ bei einer n-blättrigen Fläche) einen und denselben Werth von z (also über einander liegende Punkte der Fläche) ergeben, so dass:

$$u_1 - \omega_1 = u_2 - \omega_2 = \ldots\ldots = u_\mu - \omega_\mu,$$
$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2 = \ldots\ldots = v_\mu + w_\mu.$$

Wir behaupten, dass dann die den conjugirten Werthen von $H_1, \ldots H_\mu$ zugeordneten Punkte der Fläche nicht ebenfalls über einander liegen können, falls $\mu > 2$ ist. In der That, sollte dieses der Fall sein, so hätten wir für zwei verschiedene Werthe der Indices r und s

$$u_r - i\,v_r + i\,(w_r - i\,\omega_r) = u_s - i\,v_s + i\,(w_s - i\,\omega_s),$$

also:

$$u_1 + \omega_1 = u_2 + \omega_2 = \ldots\ldots = u_n + \omega_\mu,$$
$$v_1 - w_1 = v_2 - w_2 = \ldots\ldots = v_n - w_\mu;$$

und es würde sich ergeben

$$u_1 = u_2 = \ldots\ldots = u_\mu,\ v_1 = v_2 = \ldots\ldots = v_\mu,$$
$$w_1 = w_2 = \ldots\ldots = w_\mu,\ \omega_1 = \omega_2 = \ldots\ldots = \omega_\mu.$$

Es würden also auch die zugehörigen Werthe von z_1 (nemlich $u_r - \omega_r + i\,(v_r + w_r)$) sämmtlich einander gleich, und der fragliche Punkt wäre ein $(\mu-1)$-facher Verzweigungspunkt der Curve $f = 0$; das Auftreten eines solchen aber können wir, falls $\mu > 2$, vorläufig ausschliessen. Der Fall $\mu = n = 2$ ist durch die früher von mir behandelten Beispiele schon vollständig erledigt.

5. Kehren wir jetzt zu dem Probleme der Fortsetzung unserer über der Z-Ebene ausgebreiteten Fläche zurück. Mit dem ersten Blatte der ursprünglichen Fläche (in dem das gegebene Oval liegt) mögen μ Blätter in der geschilderten Weise zusammenhängen; wir denken sie uns durch Ränder $r_1, r_2, \ldots r_\mu$ begrenzt, die über dem Ovale liegen, während

r_1 mit dem Ovale zusammenfällt. Letzteren entsprechen μ geradlinige Ränder über der reellen X-Axe: $R_1, R_2, \ldots R_\mu$, welche ebenso viele Halbebenen $(Y > 0)$ begrenzen. Die conjugirten Halbebenen $(Y < 0)$ werden durch die Ränder $R_1', R_2', \ldots R_\mu'$ begrenzt, die ebenfalls über der X-Axe liegen, und von denen R_1 mit R_1' identisch ist. Diesen neuen Randcurven entsprechen wieder in der ursprünglichen Fläche geschlossene Curven $r_2', r_3', \ldots r_\mu'$, die zu den Curven $r_2, r_3, \ldots r_\mu$ conjugirt sind, deren Bilder in der H-Ebene daher leicht zu bestimmen sind; sie können, wie soeben in Nr. 4 gezeigt wurde, nicht übereinander liegen. Wir wählen diejenige Curve r' aus, welche am weitesten über die anderen Curven r' hinübergreift;[1]) in dem ganzen durch sie begrenzten Gebiete ist dann z als Function von Z definirt, also auch jede algebraische Function von z, und zwar letztere zugleich in allen darüber oder darunter liegenden Theilen von Blättern der ursprünglichen Riemann'schen Fläche. Diese Curve r' und die $\mu - 1$ über oder unter ihr in den anderen Blättern der Fläche liegenden Curven geben neue Ränder, welche das ursprünglich für die Variable z gegebene Gebiet wesentlich erweitern. In entsprechender Weise ist damit auch über der Z-Ebene das Gebiet der Variabeln Z und der zur Darstellung von $\{H, Z\}$ dienenden Fläche bis an neue Ränder $R_2'', R_3'', \ldots R_\mu''$ über die Ränder $R_2', R_3', \ldots R_\mu'$ hinaus fortgesetzt. Dasselbe gilt von den conjugirt imaginären Gebieten der Fläche; sie sind über die Ränder $R_2, R_3, \ldots R_\mu$ hinaus in die untere Halbebene bis an neue Ränder $P_2, P_3, \ldots P_\mu$ fortgesetzt; vielleicht haben einige dieser Ränder dabei bereits die ganze untere Halbebene überstrichen und befinden sich in neuen Blättern über der oberen Halbebene, in welchem Falle die entsprechenden (conjugirten) Ränder R'' in

1) Statt dessen könnte man eine neue Curve construiren, welche sich aus möglichst günstig gewählten Theilen der verschiedenen Curven $r_2', r_3', \ldots$ zusammensetzt.

der unteren Halbebene verlaufen. Den Rändern P_2, P_3, ... P_μ entsprechen über der z-Ebene in der ursprünglichen Fläche Curven ϱ_2, ϱ_3, ... ϱ_μ, welche der Curve r' und den direct über oder unter ihr liegenden Curven conjugirt sind (immer in dem Sinne, dass einander entsprechende Punkte durch conjugirte Werthe von H gemäss (6) dargestellt werden), und welche daher selbst nach Nr. 4 nicht übereinander liegen können. Mit ihnen kann man in gleicher Weise die gemachten Schlüsse fortsetzen. Jedem von z beschriebenen Wege entspricht gemäss diesen Ueberlegungen ein angebbarer Weg der Variabeln Z und umgekehrt.

6. Es fragt sich zunächst, ob die Variable z sich vielleicht einer Grenzcurve nähern kann, über die hinaus eine Fortsetzung nicht mehr möglich ist. Sollte dies geschehen, so müsste der zum conjugirten Werthe von H gehörige Punkt z' sich ebenfalls einer natürlichen Grenze nähern; und dasselbe müsste für alle zugehörigen $\mu - 1$ Punkte in der zur Darstellung von $\{\eta, z\}$ dienenden Fläche der Fall sein. In jedem Blatte hätte man eine solche Grenzcurve über derjenigen, welche in einem Blatte als natürliche Grenze von z auftritt; die conjugirten Punkte müssten dann in den verschiedenen Blättern die conjugirten Grenzcurven bilden, also alle übereinander liegen, was nach Nr. 4 nicht möglich ist.

Das Gebiet der Variabeln z ist also, wenn z als Function von Z betrachtet wird, in keiner Weise durch eine natürliche Grenze beschränkt.

7. In analoger Weise zeigt man, dass z als Function von Z keinen wesentlich singulären Punkt haben kann, wenn die Variable η auf das in Nr. 3 geschilderte, von $2p$ Kreisen begrenzte Gebiet beschränkt bleibt.

Sollte nemlich an irgend einer Stelle z die Function Z

wesentlich singulär sein, so müsste auch $\{\eta, Z\}$ dort eine wesentliche Singularität haben, und es müsste dasselbe für alle über z gelegenen Stellen der zur Darstellung von $\{\eta, z\}$ dienenden Fläche gelten, ebenso für alle conjugirten Stellen. Die letzteren aber liegen nicht übereinander, jede von ihnen gibt also zu weiteren Punkten der zuletzt erwähnten Riemann'schen Fläche Veranlassung, die ebenfalls wesentlich singulär sind, u. s. f. Einer der so erhaltenen singulären Punkte müsste dann in das Innere des ursprünglichen Ovals fallen, wie folgende Schlussweise lehrt.

Nehmen wir z. B. an, ein solcher Punkt Z_0 läge im Innern eines durch die in Nr. 5 benutzten Ränder P_1, P_2, $\ldots P_\mu$ und R_1, R_2, $\ldots R_\mu$ begrenzten Gebietes; der entsprechende Punkt z_0 liegt dann innerhalb des durch die Curve r' begrenzten Gebietes, und zwar als wesentlich singulär in allen übereinanderliegenden Blättern; die gleiche Singularität muss dann in den conjugirten Gebieten, d. h. auch innerhalb des ursprünglichen Ovals vorkommen, was nicht möglich ist. Liegt der Punkt Z_0 ausserhalb der Ränder P, so hat man die frühere Schlussweise in gleicher Weise rückwärts fortzusetzen. Wesentliche Singularitäten sind also bei der Abhängigkeit der Grössen Z und z von einander ausgeschlossen, soweit solche nicht schon bei der Abhängigkeit der Function η von z vorkommen, d. h. so lange η (oder H) keinen der früher besprochenen $2p$ Kreise überschreitet.

8. Wir untersuchen noch, wie sich die reellen Züge der gegebenen Curve über der Z-Ebene abbilden, d. h. wie sich Z ändert, wenn H einen der $2p$ Kreise überschreitet.

Geht H von einem Punkte der reellen Axe aus in der oberen Halbebene zu einem Punkte des Kreises K, so läuft gleichzeitig der conjugirte Punkt H_1 in der unteren Halb-

ebene dem entsprechenden Punkte des conjugirten Kreises K_1 zu. Diesen beiden Wegen entsprechen zwei Wege in der ursprünglichen (über der z-Ebene ausgebreiteten) Riemann'schen Fläche, welche vom Punkte z, z_1 der Randcurve des ersten Ovals zum Punkte z', z_1' eines zweiten reellen Zuges hinführen, und ebenso zwei Wege in der über der Z-Ebene ausgebreiteten Fläche, welche vom ursprünglichen Punkte der reellen X-Axe aus zu einem (in einem anderen Blatte gelegenen) Punkte Z' bezw. zu dem Punkte Z_1' im conjugirten Blatte führen. Dabei ist Z' eine Function von z' und umgekehrt; ebenso ist z_1' eine Function von Z_1', also auch (da z_1' eine Function von z' ist) von Z', und nach Gleichung (3) haben wir identisch:

$$[\{z', Z'\} - \{z_1', Z'\}] \left(\frac{d Z'}{d t}\right)^2 = \{z', z_1'\} \left(\frac{d z_1'}{d t}\right)^2.$$

Bedeutet t einen reellen Parameter, so ist die rechte Seite rein imaginär (vgl. oben Nr. 1); es ist folglich $\{z', Z'\} (d Z')^2$ conjugirt zu $\{z_1', Z'\} (d Z')^2$; andererseits ist derselbe Ausdruck conjugirt zu $\{z_1', Z_1'\} (d Z_1')^2$; es folgt also

$$\{z_1', Z'\} (d Z')^2 - \{z_1', Z_1'\} (d Z_1')^2 = 0.$$

Ferner ist nach (3) die linke Seite der letzten Gleichung identisch gleich $-\{Z', Z_1'\} (d Z_1')^2$; es ist somit $\{Z', Z_1'\} = 0$, d. h. es besteht eine Relation der Form

$$(7) \qquad \alpha Z' Z_1' + \beta Z' + \gamma Z_1' + \delta = 0.$$

Dieses aber ist die Gleichung eines Kreises. **Auf der über der Z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche entspricht daher jedem reellen Zuge der Curve $f = 0$ ein Paar von einander zugeordneten Kreisen.** Entweder muss das Innere oder das Aeussere eines solchen Kreises als durch ihn begrenzt betrachtet werden.

Ueber diese Kreise hinaus kann man den Verlauf der

Function Z durch den Process der „Spiegelung" verfolgen, genau wie es mit der Function H durch Spiegelung an den $2p$ Kreisen der H-Ebene geschieht. Bei wiederholter Anwendung des Processes wird man schliesslich eine Fläche mit unendlich vielen Blättern und unendlich vielen Verzweigungen construiren. Nähert sich der Punkt Z einer Stelle, wo sich diese Verzweigungen unendlich häufen, so wird der Punkt z unendlich oft die reellen Züge der Curve $f = 0$ überschreiten, also einen unendlich langen Weg beschreiben. Durch dieses Verhalten ist die Abhängigkeit der Grössen z und Z von einander als eine im Allgemeinen transscendente charakterisirt.

9. Es erübrigt noch, die Verzweigungspunkte der für $\{H, Z\}$ construirten Fläche näher zu untersuchen. Als solche treten, wie wir bereits wissen (Nr. 2), die den inneren Brennpunkten von $f = 0$ entsprechenden Punkte und die ihnen conjugirten Punkte auf. Um die Frage allgemein in Angriff zu nehmen, setzen wir wie in Nr. 4

$$z = u + i v + i(w + i\omega) = u - \omega + i(v + w),$$
$$z_1 = u + i v - i(w + i\omega) = u + \omega + i(v - w).$$

Der conjugirte Punkt hat dann die Coordinaten

$$z' = u - i v + i(w - i\omega) = u + \omega - i(v - w),$$
$$z_1' = u - i v - i(w - i\omega) = u - \omega - i(v + w).$$

Seien nun $z = a$, $z_1 = a_1$ die Coordinaten eines Punktes der ursprünglichen Fläche und

$$(8) \qquad z = a + (Z - A)^{\lambda}\,\mathfrak{P}, \quad z_1 = a_1 + (Z - A)^{\mu}\,\mathfrak{P}^0,$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^0$ Potenzreihen bedeuten. Dann wird, da z_1' zu z, z' zu z_1 conjugirt imaginär ist

$$(9) \quad z' = a_1' + (Z_1 - A_1)^{\mu}\,\mathfrak{P}_1^0, \; z_1' = a' + (Z_1 - A_1)^{\lambda}\,\mathfrak{P}_1,$$

wenn a', a_1', $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1^0$ bezw. zu a, a_1, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^0$ conjugirt imaginär sind.

Für einen Punkt, dem derselbe Werth von z, aber ein anderer von z_1 zukommt, sei

$$\zeta = u' - \omega' + i(v' + w') = z = u - \omega + i(v + w)$$
$$\zeta_1 = u' + \omega' + i(v' + w').$$

Ihm ist dann der Punkt

$$\zeta' = u' + \omega' - i(v' - w'), \quad \zeta_1' = u' - \omega' - i(v' + w')$$

conjugirt; es ist also, da $u' - \omega' = u - \omega$ und $v' + w' = v + w$ war, ζ_1' identisch mit z_1'. Werde $\zeta' = \alpha$ für $Z_1 = A_1$, so haben wir

$$(10) \quad \zeta' = \alpha + (Z_1 - A_1)^\nu \mathfrak{P}_2, \quad \zeta_1' = \alpha' + (Z_1 - A_1)^\lambda \mathfrak{P}_1.$$

Sei nun erstens der Punkt a, a_1 kein ausgezeichneter Punkt der Fläche $f = 0$, so ist $\lambda = \mu$. Ist der Punkt ζ', ζ_1' ebenfalls nicht ausgezeichnet, so ist auch $\nu = \lambda = \mu$. Sei λ von 1 verschieden, so haben wir nach (8) und (9) sowohl in A als in A_1 einen Verzweigungspunkt, nach (10) aber auch in jedem Punkte, welcher in der ursprünglichen Fläche über einem zu a, a_1 conjugirten Punkte liegt; das aber ist unmöglich, wie die in Nr. 7 angewandte Schlussweise sofort erkennen lässt. Wäre der Punkt α, α' zufällig ein Brennpunkt, so ist in der folgenden Betrachtung nur ζ, ζ_1 durch a, a_1 zu ersetzen.

Sei zweitens a, a_1 ein Brennpunkt von $f = 0$. Dann haben wir $\lambda = 2\mu$. Ist auch $\nu = \lambda = 2\mu$, so ergibt sich für $\lambda \gtrless 1$ dieselbe Unmöglichkeit, wie vorhin. Für $\lambda = 1$ folgt aus (9)

$$z_1 - a' = (z - a_1)^2 \mathfrak{P}_3;$$

diese Gleichung sagt aus, dass der zum Brennpunkte a conjugirte Punkt der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ genügt, wie es auch direct einleuchtet. Aus (10) ergibt sich kein Widerspruch

$\lambda = 1$ ist also die einzig mögliche Annahme. Wäre ν von λ verschieden, so wäre der Punkt α, a' zufällig selbst auch ein Brennpunkt oder ein Nullpunkt der Function $\frac{\partial f}{\partial z}$; dann wird man einen anderen über z, z_1 liegenden Punkt benutzen können, dessen conjugirter kein Brennpunkt ist, und analoge Schlüsse wiederholen.

Nicht nur die „inneren", sondern auch die „äusseren" Brennpunkte der Curve $f = 0$ gehen also bei unserer Abbildung in Verzweigungspunkte der für $\{H, Z\}$ construirten Fläche über. Letztere hat ausserdem nur in den conjugirten Punkten Verzweigungspunkte.

10. Wir haben jetzt alle Mittel bereit, um die Lösung unseres Abbildungsproblems auszuführen. Die Function $\{H, Z\}$ ist in der ursprünglichen Riemann'schen Fläche überall holomorph, so lange der Punkt z, z_1 keinen der $p+1$ reellen Curvenzüge überschreitet.

Beim Uebergange über einen solchen Zug aber springt H auf den conjugirten Werth H_1, gleichzeitig Z auf den conjugirten Werth Z_1 über; dabei ist nach (7)

$$Z_1 = \frac{a\,Z + b}{c\,Z + d} \text{ und ebenso } H_1 = \frac{a'\,Z + b'}{c'\,Z + d'}$$

also nach (3) in bekannter Weise

$$\{H_1, Z_1\} = \{H, Z_1\} = \{H, Z\} \left(\frac{d\,Z}{d\,Z_1}\right)^2.$$

Die Function $\{H, Z\}$ ist ferner reell auf dem Rande des abzubildenden Ovals. Auf demselben Rande ist die Function

$$i\,\frac{d\,z}{d\,Z}\,\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = -\,i\,\frac{d\,z_1}{d\,Z}\cdot\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

reell. Das Quadrat der letzteren Function, dividirt durch

$\{H, Z\}$, gibt daher einen Quotienten, der ungeändert bleibt, wenn der Punkt z, z_1 einen reellen Zug von $f = 0$ auf der Riemann'schen Fläche überschreitet, und welcher auf dem Rande des abzubildenden Ovals reell ist. Auch $\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$ ist überall holomorph, so lange die reellen Züge nicht überschritten werden. Es besteht daher eine Gleichung der Form

$$(11) \qquad \{H, Z\} = \Phi(z, z_1) \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2} \left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$$

wo Φ eine rationale Function von z und z_1 bedeutet, die auf dem Rande des abzubildenden Ovals reelle Werthe annimmt, sich also als rationale Function von x und y mit reellen Coëfficenten darstellt.

Die nähere Bestimmung der Function Φ wird von transcendenten Bedingungen abhängen, deren Aufstellung in explicirter Form grosse Schwierigkeiten bereitet, wie dies ja auch für die entsprechende Function φ in der Differentialgleichung (5) eintritt[1]). Wir können aber das Verhalten der Function Φ an den singulären Stellen angeben.

Für einen Brennpunkt a, a_1 ist nach Nr. 9

$$z_1 - a_1 = \sqrt{z - a}\,\mathfrak{P}, \qquad z - a = (Z - A)\,\mathfrak{P}_1,$$
$$H - H_0 = \sqrt{z - a}\,\mathfrak{P}_2,$$

also

$$\{H, Z\} = \frac{3}{8}\frac{1}{(Z - A)^2} + \cdots = \frac{C}{(z - a)^2} + \cdots,$$

wenn C eine Constante bedeutet. Ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = C'(z_1 - a_1) + \cdots;$$

1) Vgl. Poincaré, Acta matematica Bd. 4, p. 292 ff. und (für das Verhalten von φ an den singulären Stellen) Bd. 1, p. 278.

die Function Φ muss daher der Bedingung genügen:

$$\lim_{z=a} \Phi \cdot (z-a) = \text{Const.} \tag{12}$$

Handelt es sich um einen Punkt α, α_1, welcher zu einem Brennpunkte conjugirt ist (d. h. einen Nullpunkt der Function $\frac{\partial f}{\partial z}$), so haben wir nach Nr. 9:

$$z_1 - \alpha_1 = (z-\alpha)^2 \mathfrak{P}_3, \qquad z - \alpha = \sqrt{Z - A_1}\, \mathfrak{P}_4,$$
$$H - H_0' = (z-\alpha)\, \mathfrak{P}_5,$$

also

$$\{H, Z\} = \frac{3}{8} \frac{1}{(Z-A_1)^2} + \cdots = \frac{\text{Const.}}{(z-\alpha)^4} + \cdots;$$

ferner $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \text{Const.}$; für Φ ergibt sich also die Bedingung:

$$\lim_{z=\alpha} \Phi \cdot (z_1 - \alpha_1) = \text{Const.}$$

Dieselbe entspricht genau der Bedingung (12); in der That hätte sie auch aus der Realität der Function Φ direct geschlossen werden können.

Die Gleichung (11) können wir noch in bemerkenswerther Weise umformen. Ersetzen wir nemlich in (3) φ durch H, so ergibt sich mit Hülfe von (11) unter Benutzung von (4):

$$\{Z, z\} = \varphi(z, z_1) - \frac{\Phi(z, z_1)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}. \tag{13}$$

Auf diese Differentialgleichung dritter Ordnung, in der φ und Φ die in (5) und (11) vorkommenden rationalen Functionen von z und z_1 bedeuten, ist hiernach das Problem zurückgeführt, ein durch ein Oval einer algebraischen Curve $f = 0$ (die keine Doppelpunkte hat) begrenztes einfach zusammen-

hängendes Flächenstück auf die E
bilden.

11. Insbesondere kann es vorkommen
welche nach Nr. 8 in der Z-Ebene den
Curve $f = 0$ entsprechen, paarweise mit
der reellen Axe zusammenfallen. Dann
für $\{H, Z\}$ construirte mehrblättrige Fläche
eine algebraische Function von Z. Die Gl
dann von der Form

$$\psi\left(\frac{d\,z}{d\,Z}\right)^2 = \Psi,$$

wo ψ eine algebraische Function von z, Ψ
Function von Z bedeutet.

Von dieser Form war die Lösung i
mir behandelten Fällen. Bei denselben trit
Besonderheit ein, dass die Riemann'sch
z-Ebene mehrfach von dem Bilde der
construirten Fläche überdeckt wird. Es
dass die ursprüngliche Riemann'sche Flä
spielen nicht nur in Bezug auf den reellen,
zug, sondern auch in Bezug auf die über
anderen Blättern gelegenen Curvenzüge, g
Verhältnisse zeigt. Aehnliche Besonde
immer auftreten, wenn die zu der
hörige Fläche solche besondere Syn
nisse aufweist.

In dem einfachsten Falle, der Abbi
einer Ellipse auf die Halbebene, gestalten

Zwei von diesen liegen in der Halbebene $Y > 0$, die beiden anderen sind die conjugirten Punkte der Halbebene $Y < 0$. Den beiden Blättern der oberen Halbebene entsprechen die beiden Blätter des Innern der Ellipse, begrenzt durch die Ellipse selbst und durch die darüber liegende Curve. Den conjugirten Blättern der unteren Halbebene ($Y < 0$) entspricht über der z-Ebene ein Streifen, der von der gegebenen Ellipse und einer zu ihr confocalen Ellipse E_1 begrenzt wird; überschreitet man die letztere, so kommt man wieder in die beiden über der Halbebene $Y > 0$ gelegenen Blätter, denen nun in der z-Ebene ein weiterer, von der Ellipse E_1 und einer zu ihr confocalen Ellipse E_2 begrenzter Streifen entspricht; u. s. f. Sowohl im oberen, als im unteren Blatte erhält man so unendlich viele, von confocalen Ellipsen begrenzte, ringförmige Streifen, deren jeder auf zwei über einander liegende Halbblätter derjenigen Fläche abgebildet wird, welche über der Z-Ebene construirt wurde.

Auf diese und andere Einzelheiten werde ich bei anderer Gelegenheit näher eingehen. Es mögen hier nur noch folgende Bemerkungen Platz finden.

12. Wir setzten bei unserer Ableitung voraus, dass die Curve $f = 0$ das Maximum von reellen Zügen besitze. Hat sie weniger als $p + 1$ reelle Züge, so hat man statt der Schottky'schen Untersuchungen diejenigen allgemeineren Hülfsmittel anzuwenden, die wir Poincaré verdanken;[1]) man wird dann ganz analoge Schlüsse durchführen können.

Ist das Geschlecht $p = 1$, so hat man statt $\{\eta, Z\}$ die Function $\frac{d \log \eta'}{d Z}$ zu untersuchen, wo η das zugehörige elliptische Integral erster Gattung bezeichnet. Die in Nr. 8 auftretenden Kreise sind dann durch gerade Linien zu ersetzen.

1) Vgl. Acta Matematica, a. a. O.

Das Auftreten von Doppelpunkten muss vorläufig ausgeschlossen bleiben; es scheint, dass man es nicht einfach durch Grenzübergang (d. h. durch Zusammenfallen von Brennpunkten) erledigen kann. Man würde dann weiter zum Zerfallen der Curve $f = 0$ fortschreiten können und dadurch zu Abbildungsfunctionen mit sehr bemerkenswerthen Eigenschaften geführt werden. Ich hoffe, hierauf bald zurückkommen zu können. Erledigt habe ich zunächst nur den Fall, wo der Rand des abzubildenden Flächenstückes durch eine endliche Anzahl von Kegelschnitten gebildet wird, denen die Brennpunkte gemeinsam sind. Auf diese Aufgaben soll hier nicht mehr eingegangen werden.

Ueber den Schatten eines Planeten.

Von H. Seeliger.

(*Eingelaufen 1. December.*)

Für einen leuchtenden Punkt ist die Schattenfläche eines Planeten, der als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid angesehen werden darf, ein Kegel zweiter Ordnung. Infolge der Ausdehnung der kugelförmigen Sonne entsteht das Phänomen des Halbschattens. Die Schattenfläche giebt in diesem Falle die Grenze des Kern- bezw. des Halbschattens an und ist die Einhüllende aller gemeinschaftlichen Tangentialebenen an die Kugel und das Ellipsoid. Die Gleichung dieser Fläche, welche vom 8. Grade ist, ist bekannt und u. A. in dem verbreiteten Lehrbuche der analytischen Geometrie von Salmon gegeben, auch besitzt man Modelle, welche ihre wesentlichen Gestaltungsverhältnisse zur Anschauung bringen. Zu Verwendungen auf astronomische Aufgaben, bei denen es sich um wirkliche numerische Ausrechnungen handelt, wird indessen diese Gleichung nicht sehr geeignet sein. Laplace hat in der Méc. cél.[1]) angegeben, wie man die Gleichung der Schattenfläche als das Resultat der Elimination eines Parameters aus 2 Gleichungen erhält und es ist bei vielen Anwendungen bequemer an diesen Gleichungen die erlaubten

1) Livre VIII, Chap. VIII.

und erwünschten Vereinfachungen auszuführen. Laplace hat nur einen verhältnissmässig einfachen Fall, der sich bei den Verfinsterungen der Jupitertrabanten darbietet, wirklich im Einzelnen verfolgt. Es blieb hier demnach noch manche Lücke auszufüllen und dies ist zum Theil durch die Arbeiten von Hall[1]), Souillart[2]), Bruns[3]) geschehen. Die folgenden Zeilen verfolgen auf anderer Grundlage dasselbe Ziel, nämlich die Vorschriften für die Berechnung von einigen Phänomenen, die mit der Schattenfläche zusammenhängen, möglichst einfach zu gestalten und die bereits bekannten auf einfachem Wege zu begründen. —

Es werde in den Mittelpunkt der Sonne der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystemes gelegt. Seine xz Ebene sei parallel zum Aequator des Planeten, dessen Mittelpunkt in der xz Ebene liegen und die Coordinaten A und C haben möge. Es sei ferner R der Radius der Sonne, R' der äquatoreale und R'_1 der polare Radius des Planeten. Nennt man noch e die Ellipticität $e = \frac{R' - R'_1}{R'_1}$, so wird die Gleichung der Sonnen- bezw. der Planetenoberfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

$$(x - A)^2 + y^2 + (1 + e)^2 [(z - C)^2 - R'^2_1] = 0$$

Eine gemeinsame Tangentialebene an Sonne und Planet wird offenbar ausgedrückt durch

$$x\gamma - y\alpha - z\beta - R = 0$$

wo $\gamma, -\alpha, -\beta$ die Richtungscosinus der Normale der Tangentenebene sind, welche parallel sein muss zur Normale des Ellipsoides.

1) Astron. Nachr. Band 90 S. 305 ff.

2) Astron. Nachr. Band 91 S. 129.

3) Vergl. J. Hartmann, die Vergrösserung des Erdschatten bei Mondfinsternissen. Abhandlungen der sächs. Gesellsch. d. Wiss. Leipzig 1891 S. 13. (375).

ı hat also

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= N(x - A); \quad \alpha = -N.y; \\ \beta &= -N(1+e)^2(z - C) \\ \frac{1}{N^2} &= (x - A)^2 + y^2 + (1+e)^4(z - C)^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Schreibt man die Ebenengleichung so:

$$\gamma(x - A) - \alpha y - \beta(z - C) = R - \gamma A + \beta C,$$

ergiebt sich mit Hülfe von (2):

$$\frac{1}{N}\left\{\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2}\right\} = R - \gamma A + \beta C$$

Setzt man andererseits (2) in die Ellipsoidgleichung (1) so wird:

$$\frac{1}{N^2}\left\{\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2}\right\} = R'^2$$

Man kommt also zu den zwei Gleichungen

$$\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2} = \frac{(R - \gamma A + \beta C)^2}{R'^2}$$

$$\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

man kann demnach α und γ durch β ausdrücken.

Behält man β als einen Parameter bei, so wird die ·ttenfläche, d. i. die Einhüllende aller Tangentenebenen, ergeben durch Elimination von β aus den Gleichungen:

$$\gamma x - \alpha y - \beta z - R = 0$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} x - \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} y - z = 0$$

was dasselbe ist, durch Elimination von β aus:

$$F = (\gamma x - \beta z - R)^2 - \alpha^2 y^2 = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0 \quad (3)$$

Indem man nun γ und α durch β ausgedrückt in (3) einsetzt, ist es vortheilhaft die Grösse

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{(1+e)^2}$$

einzuführen. Es ist auch ε oder das Quadrat der Excentricität $= 2\alpha_1 - \alpha_1^2$, wo α_1 die Abplattung im gewöhnlichen Sinne bedeutet. Die obigen Gleichungen geben nun:

$$R - A\gamma + \beta C = R'\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}$$

$$\alpha^2 = \left[1 - \frac{R^2}{A^2} - \frac{R'^2}{A^2}\right] - 2\beta\frac{RC}{A^2} - \beta^2\left[1 + \frac{C^2}{A^2} - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon\right]$$
$$+ 2\frac{RR'}{A^2}\sqrt{1-\beta^2\varepsilon} + 2\frac{CR'}{A^2}\beta\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}$$

Führt man nun die Hülfsgrössen ein:

$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{R^2}{A^2}(x-A)^2 + \frac{R'^2x^2}{A^2} - y^2\left[1 - \frac{R^2+R'^2}{A^2}\right] \\
n &= 2\frac{R}{A}\left\{(x-A)\left(\frac{C}{A}x - z\right) + \frac{C}{A}y^2\right\} \\
p &= \left(\frac{C}{A}x - z\right)^2 + y^2\left(1 + \frac{C^2}{A^2}\right) - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2+y^2) \\
\mu &= \frac{2RR'}{A^2}\left[x(x-A) + y^2\right] \\
\nu &= 2\frac{R'}{A}\left\{x\left(\frac{C}{A}x - z\right) + \frac{C}{A}y^2\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

so werden die Gleichungen (3) sich so darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
m + n\beta + p\beta^2 &= (\mu + \beta\nu)\sqrt{1-\beta^2\varepsilon} \\
n + 2p\beta &= \frac{d}{d\beta}\left\{(\mu+\beta\nu)\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Elimination von β macht nun keine Schwierigkeit und man könnte das Resultat in Form einer Determinante, welche die Gleichung der gesuchten Schattenfläche darstellt, sofort hinschreiben. Diese Gleichung hat aber einen viel zu hohen Grad und die Absonderung der unnöthigen Factoren ist verwickelt. In mathematischer Beziehung ist demnach die Form (5) nicht befriedigend. Für die zur Anwendung kommenden Fälle aber ist sie, wie aus dem Folgenden hervorgehen dürfte, recht geeignet. Wenigstens gelangt man durch verhältnissmässig nicht sehr complicirte Rechnungen zu den Resultaten, welche abgeleitet werden sollen.

Die Schattenfläche wird gebraucht, wenn man die Verfinsterungen der Trabanten in unserem Sonnensystem genauer zu verfolgen hat. Suchen wir die speciellen Erfordernisse auf, welche hier auftreten. Bei der Verfinsterung des Erdmondes ist eine ziemlich weit gehende Genauigkeit in den Angaben über den Verlauf der Schattenfläche erwünscht. Hier ist aber ε rund $\frac{1}{150}$, also eine sehr kleine Grösse und man wird demzufolge mit Vortheil nach Potenzen von ε entwickeln und wie sich leicht ergiebt mit der Mitnahme nur der ersten Potenz ausreichen. Unter diesen Voraussetzungen ist die Aufgabe von den Herren Hall, Souillart und besonders im Anschluss an Herrn Bruns von Herrn Hartmann vollständig gelöst worden. Im Folgenden wird das Resultat des Herrn Hartmann ebenfalls auftreten.

Bei den Jupitertrabanten ist ε nicht so klein, dass man hier ohne Weiteres ε^2 vernachlässigen kann. Hier tritt aber der Fall ein, dass die Trabanten sich sehr nahe in der Aequatorebene bewegen und demzufolge der Verlauf der Schattenfläche nur in der Nähe dieser Ebene gebraucht wird. Die Aufgabe ist von Laplace a. a. O. behandelt worden und die dort gegebene Lösung wird wohl den Anforderungen der Praxis genügen.

Es bleibt noch die Schattenfläche des Saturn zu be-

trachten übrig. ε ist hier (rund $\frac{1}{5}$) durchaus nicht klein: eine Entwicklung nach Potenzen von ε ist jedenfalls nicht einwurfsfrei, wenn man schon die zweiten Potenzen fortlassen will. Thut man Letzteres aber nicht, so werden die Entwicklungen äusserst complicirt, wenn sie auch durchführbar sind. Es finden bei den Saturntrabanten aber andere Umstände statt, die sehr weitgehende Vernachlässigungen gestatten, besonders da hier eine grosse Genauigkeit der Formeln für die Praxis ziemlich bedeutungslos sein dürfte.

Nach dem Gesagten werden also die Verfinsterungen des Erdmondes und der Saturntrabanten zu behandeln sein.

Zuerst soll die Entwicklung von (5) nach Potenzen von ε vorgenommen werden.

Setzt man

$$\Phi(\beta) = -(\mu + \nu\beta)\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\varepsilon + \tfrac{1}{8}\beta^4\varepsilon^2 + \ldots\right)$$

so wird (5):

$$(m - \mu) + (n - \nu)\beta + p\beta^2 = \Phi(\beta)$$

$$(n - \nu) + 2p\beta = \frac{d\Phi}{d\beta}$$

Wird nun noch gesetzt:

$$\beta_0 = -\frac{n - \nu}{2p}; \quad \beta = \beta_0 + \Delta\beta$$

so ist $\Delta\beta$ eine Grösse vom Range ε. Nimmt man zunächst überall noch ε^2 mit, so erhält man

$$4p(m - \mu) - (n - \nu)^2 = 4p\{\Phi(\beta_0) + \Phi'(\beta_0)\Delta\beta - p\Delta\beta^2\}$$

und da bis auf Glieder vom Range ε

$$\Delta\beta = \frac{1}{2p}\Phi'(\beta_0)$$

ist, so wird die Gleichung der Schattenfläche

$$4p(m - \mu) - (n - \nu)^2 = 4p\Phi(\beta_0) + [\Phi'(\beta_0)]^2 \quad (6)$$

Wenn man nun die Glieder vom Range ε^2 fortlässt, so ist das zweite Glied rechts zu streichen und zu setzen

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}(\mu + \nu\beta_0)\,\beta_0^2\,\varepsilon$$

Den Grössen μ und ν kann man auch durchweg das negative Vorzeichen vorsetzen.

Dieses doppelte Vorzeichen bezieht sich, wie leicht zu sehen, auf die beiden Schalen der Schattenfläche, welche den Kern- und Halbschatten begrenzen. Man braucht nur das eine Vorzeichen zu berücksichtigen und dann im Resultat R' mit $-R'$ zu vertauschen. Für die Anwendung auf Mondfinsternisse ist es am zweckmässigsten, wenn man den Durchschnitt der Schattenfläche mit einer Ebene aufsucht, die senkrecht auf der Verbindungslinie Sonne-Erde steht und nicht weit vom Mondmittelpunkte entfernt ist. Nennt man die Entfernung Sonne-Erde D, lässt in diese Richtung die ξ-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems fallen, dessen Anfang im Erdmittelpunkte sich befindet, dessen y-Axe zu der früheren parallel läuft und dessen ζ-Axe senkrecht darauf nach Norden zeigt, so hat man:

$$x = A + \xi\frac{A}{D} - \zeta\frac{C}{D}$$

$$z = C + \xi\frac{C}{D} + \zeta\frac{A}{D}$$

Wird noch zur Abkürzung gesetzt

$$\sigma = \frac{R - R'}{A};\ \chi = x\sigma - R$$

so wird

$$m - \mu = \chi^2 - y^2(1 - \sigma^2)$$

$$n - \nu = -2\chi\zeta\frac{D}{A} + 2\frac{C}{A}y^2\sigma$$

$$\nu = 2\frac{R'}{A}\left[\frac{C}{A}y^2 - x\zeta\frac{D}{A}\right]$$

$$p = \frac{D^2}{A^2}(y^2 + \zeta^2) - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2 + y^2)$$

$$+ 4y^2 \left[\left(\chi + \zeta \frac{C}{A} \sigma \right)^2 - (y^2 + \right.$$

$$= - (\mu + \nu\beta_0) \cdot 2p$$

In den mit ε multiplicirten Glie
nommen werden:

$$\beta_0^2 = \frac{(n - \nu)^2}{4p^2} = m -$$

p

und es wird also, wenn der Ausdruck in
für den Augenblick mit I bezeichnet w

$$4y^2 I = \varepsilon p \beta_0^2 \left\{ 4 \frac{R'^2}{A^2} (x^2 + y^2) - \right.$$

was man nach leichter Zwischenrechn
nachlässigung von ε^2 schreiben kann:

$$I = \frac{D^2}{A^2} \cdot \frac{R'}{A} \left\{ - \xi^2 \sigma - x^2 \sigma + Rx - \frac{A}{D} \right.$$

$$\left. + R \frac{C}{D} \zeta \right\} \cdot \beta_0^2 \varepsilon$$

In dem Ausdrucke I ist aber weite

$$\chi + \zeta \frac{C}{D} \sigma = \xi \frac{R - R'}{D} - R'$$

wenn man mit ϱ_0 den Radius der Ku
mit dem Mittelpunkt in ξ den im Falle

kann sich nun überaus leicht davon überzeugen, von der Erde gesehen die Schattenfläche in der ng des Mondes nur um einige hundertstel Secunden en kann, wenn man einfach setzt

$$\beta_0^2 = \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2},$$

in der Klammer der Formel (7) als unmerklich cht das erste, vierte und sechste Glied, schliesslich $\frac{D^2}{A^2}$ im Ausdrucke von I vernachlässigt. Auf diese wird

$$(y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon \left\{ Rx - x^2\sigma - 2x\sigma \frac{C}{D} \zeta \right\}$$

Hülfe der im Vorigen enthaltenen Gleichungen kann s auch schreiben

$$y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \cdot \varepsilon x \varrho_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\zeta}{\varrho_0} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{R - R'}{A} \right\}$$

ch, ohne Fehler zu begehen, die mehr als wie die stel der Secunde alteriren können,

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon x \varrho_0 \tag{9}$$

x kann man für alle Fälle genügend genau

$$x = A + \xi \frac{A}{D}$$

Die Gleichungen (8) und (9) geben nunmehr die fläche bei Mondfinsternissen in der Nähe des Mondes vollkommener Strenge.

Durchschnitt derselben mit der Ebene $\xi =$ const. man sofort sieht, eine Ellipse. Die beiden Halbaxen B liegen in der Richtung der y bezw. der ζ. Und bt sich sofort

Die Gleichung (6) wird jetzt:

$$4p(m-\mu)-(n-\nu)^2 = -4\varepsilon\frac{R'^2}{A^2}(x^2+y^2)(m-\mu)$$
$$+4y^2\left[\left(\chi\frac{D}{A}+\zeta\frac{C}{A}\sigma\right)^2-(y^2+\zeta^2)\left(\frac{D^2}{A^2}-\sigma^2\right)\right]$$
$$=-(\mu+\nu\beta_0)\cdot 2p\beta_0^2\varepsilon$$

In den mit ε multiplicirten Gliedern darf aber angenommen werden:

$$\beta_0^2=\frac{(n-\nu)^2}{4p^2}=\frac{m-\mu}{p}$$

und es wird also, wenn der Ausdruck in der eckigen Klamme für den Augenblick mit I bezeichnet wird,

$$4y^2 I=\varepsilon p\beta_0^2\left\{4\frac{R'^2}{A^2}(x^2+y^2)-2(\mu+\nu\beta_0)\right\},$$

was man nach leichter Zwischenrechnung und mit Vernachlässigung von ε^2 schreiben kann:

$$I=\frac{D^2}{A^2}\cdot\frac{R'}{A}\left\{-\zeta^2\sigma-x^2\sigma+Rx-\frac{A^2}{D^2}y^2\sigma-2x\sigma\frac{C}{D}\zeta\right.$$
$$\left.+R\frac{C}{D}\zeta\right\}\cdot\beta_0^2\varepsilon \qquad (6)$$

In dem Ausdrucke I ist aber weiter

$$\chi+\zeta\frac{C}{D}\sigma=\xi\frac{R-R'}{D}-R'=-\varrho_0, \qquad (8)$$

wenn man mit ϱ_0 den Radius der Kugel bezeichnet, die mit dem Mittelpunkt in ξ den im Falle $\varepsilon=0$ entstehenden Schattenkegel berührt; ferner ist in (7) einzusetzen:

$$\beta_0^2=\frac{m-\mu}{p}=\frac{\left(\varrho_0+\zeta\frac{C}{D}\sigma\right)^2-y^2(1-\sigma^2)}{\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2}$$

Man kann sich nun überaus leicht davon überzeugen, dass man von der Erde gesehen die Schattenfläche in der Entfernung des Mondes nur um einige hundertstel Secunden verschieben kann, wenn man einfach setzt

$$\beta_0^2 = \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2},$$

ferner in der Klammer der Formel (7) als unmerklich fortstreicht das erste, vierte und sechste Glied, schliesslich σ^2 gegen $\frac{D^2}{A^2}$ im Ausdrucke von I vernachlässigt. Auf diese Weise wird

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon \left\{ Rx - x^2\sigma - 2x\sigma \frac{C}{D} \zeta \right\}$$

Mit Hülfe der im Vorigen enthaltenen Gleichungen kann man dies auch schreiben

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \cdot \varepsilon x \varrho_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\zeta}{\varrho_0} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{R - R'}{A} \right\}$$

oder auch, ohne Fehler zu begehen, die mehr als wie die Hundertstel der Secunde alteriren können,

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon x \varrho_0 \tag{9}$$

und für x kann man für alle Fälle genügend genau

$$x = A + \xi \frac{A}{D}$$

setzen. Die Gleichungen (8) und (9) geben nunmehr die Schattenfläche bei Mondfinsternissen in der Nähe des Mondes mit fast vollkommener Strenge.

Der Durchschnitt derselben mit der Ebene $\xi =$ const. ist, wie man sofort sieht, eine Ellipse. Die beiden Halbaxen A und B liegen in der Richtung der y bezw. der ζ. Und es ergiebt sich sofort

und da man bei den Saturntrabanten hierdurch den Verlauf der Schattenfläche (vom Saturn aus gesehen) auf einige Secunden genau erhält, so wird man, wie noch erörtert werden soll, dabei stehen bleiben können. Es soll nur diese Näherungsformel entwickelt werden.

Die ϱ_0 und β_0 werden aus den beiden Gleichungen bestimmt:

$$m_0 + p\beta_0^2 = \beta_0 \nu \sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon}$$

$$2p\beta_0 = \frac{\nu(1 - 2\beta_0^2 \varepsilon)}{\sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon}}$$

Hieraus folgt:

$$\beta_0^2 = \frac{2m_0^2}{\nu^2 - 2m_0 p} = \frac{\nu^2 - 2m_0 p}{2(\nu^2 \varepsilon + p^2)}$$

Die Gleichung des Tangentialkegels ist hiernach

$$\nu^2 = 4m_0(p + m_0 \varepsilon) \tag{14}$$

Für die weiteren Reductionen sind noch von Werth die Relationen:

$$\beta_0^2 = \frac{m_0}{p + 2m_0\varepsilon}; \quad \sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon} = \frac{\nu}{2m_0}\beta_0; \quad 1 - \beta_0^2 \varepsilon = \frac{p + m_0}{p + 2m_0}$$

Will man (14) vollständig entwickelt hinschreiben, so muss man die Hülfsgrössen m_0, m_1, n etc. nach (4) einführen. Man kann diese aber so schreiben:

$$m_0 = \frac{R'^2}{A^2}(x^2 + y^2) - y^2; \quad m_1 = \frac{R^2}{A^2}\left\{(x - A)^2 + y^2\right\}$$

$$n = \frac{2R}{A}\left(\frac{C}{A}\varrho^2 - \xi\zeta\right); \quad p = \frac{D^2}{A^2}\varrho^2 - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2 + y^2)$$

$$u = \frac{2RR'}{A^2} \cdot \left\{y^2 + x\xi\frac{A}{D} - x\zeta\frac{C}{D}\right\};$$

$$v = \frac{2R}{A} \cdot \left\{\frac{C}{A}\varrho^2 - \xi D - \zeta\zeta\right\}$$

Die Gleichung (14) gestaltet sich jetzt so:

$$\left(1 - \frac{R'^2}{A^2}\right)\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2 - \varepsilon y^2 =$$

$$\frac{R'^2}{A^2}\left\{\left(\frac{D^2}{A^2} - \varepsilon\right)x^2 - \varepsilon y^2 - \frac{C^2}{A^2}y^2 + 2\frac{C}{A}\cdot\frac{D}{A}x\zeta\right\}$$

Wenn man aber bedenkt, dass für Saturn $\frac{R'}{A}$ sehr klein ist ($< \frac{1}{20000}$) und y sowohl als auch ζ gegen x ebenfalls, so wird man mit hinreichender Genauigkeit setzen dürfen

$$\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2 - \varepsilon y^2 = \frac{R'^2}{A^2}\left(\frac{D^2}{A^2} - \varepsilon\right)x^2 \tag{15}$$

Hierdurch ist nun ϱ_0 bestimmt. Um auch (13) vollständig zu entwickeln, wäre jetzt eine etwas umständlichere Rechnung auszuführen. Man vereinfacht aber die Sachlage durch weitere Vernachlässigungen, welche die Schattenfläche in dem betrachteten Falle, wo es sich um die Verfinsterung der Saturntrabanten handelt, ebenfalls höchstens um einige Bogensecunden verschieben können. Diese Vernachlässigungen und deren Berechtigung ergeben sich aus den folgenden Werthen, die man den Hülfsgrössen m_0, m_1 etc. geben kann:

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \frac{R'^2}{A^2}x^2 - y^2; \quad m_1 = 0; \quad n = -2\frac{R}{A}\cdot\xi\zeta \\ p &= \frac{D^2}{A^2}\varrho^2 - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon x^2; \quad \mu = \frac{2RR'}{A^2}x\xi\frac{A}{D}; \\ \nu &= -\frac{2R'}{A}\cdot\frac{D}{A}x\zeta \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hierdurch wird, weil auch x in den vorstehenden Gleichungen nahezu unabhängig von ϱ_0 ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0} = \frac{1}{\varrho_0} \cdot \left\{ -2y^2 + 2\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2\beta_0^2 - \nu\beta_0\sqrt{1-\beta_0^2\varepsilon} \right\}$$

Man kann aber die rechte Seite mit Hülfe der oben angegebenen Relationen so darstellen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0} = -\frac{2y^2}{\varrho_0} \cdot \frac{\frac{R'^2}{A^2}\left(\frac{D^2}{A^2} - \varepsilon\right)x^2}{\frac{R'^2}{A^2} \cdot \frac{D^2}{A^2}x^2 - \varepsilon y^2}$$

Für die rechte Seite von (13) ergiebt sich zunächst:

$$\lambda(\beta_0) = \frac{\beta_0}{2m_0} \cdot (\mu\nu - 2nm_0)$$

und wenn man (16) benutzt, so wird schliesslich mit ausreichender Genauigkeit

$$\Delta\varrho = \pm \frac{R}{D}\xi\frac{\varrho_0}{R'}\sqrt{\frac{D^2R'^2 - \varepsilon A^2y^2}{R'^2(D^2 - A^2\varepsilon)}} \qquad (17)$$

Diese Formel lässt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig. Wollte man auch noch die zweiten Potenzen von ε fortlassen, so ergäbe sich einfach $\Delta\varrho = \pm\frac{R}{D}\xi$, was eigentlich auch schon der Genauigkeit, welche die hier in Frage kommenden Beobachtungen verlangen, voraussichtlich genügen dürfte.

Was den letzteren Punkt betrifft, so ist vor allem zu bemerken, dass die Grenze sowohl des Kernschattens als auch des Halbschattens eine rein mathematische Fiction ist, welche in den Beobachtungen nicht klar hervortreten kann. Wie der Halbschatten in unmerklichen Abstufungen in die volle Helligkeit übergeht, so bedeutet die Grenze des Kernschattens nichts anderes, als den Ort, wo der Halbschatten

anfängt, sich in stetiger Weise aufzuhellen. Ich habe die Verhältnisse, wie sie sich in Folge dieser Umstände bei Mondfinsternissen darstellen, an einem anderen Orte[1]) besprochen und gezeigt, dass sich die Grenze des Kernschattens in Folge physiologischer Einwirkungen für das beobachtende Auge in den Halbschatten hinaus scheinbar verschieben muss. Es entsteht so das bekannte Phänomen der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens. Ich habe dort einen Ausdruck abgeleitet für das Verhältniss der Helligkeit J, welche in der scheinbaren Entfernung x (hier gesehen von Saturn aus) von der Grenze des Kernschattens stattfindet, zu der ungeschwächten Helligkeit J_0 und den Ausdruck gefunden:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{5\lambda + 1}{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}} \cdot \left(\frac{Dx}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$$

worin $\lambda = \frac{R'}{R} \cdot \frac{D}{\xi}$. Nimmt man, was in runden Zahlen ungefähr den Verhältnissen entspricht, wie sie bei den Verfinsterungen des Japetus durch Saturn stattfinden, $\frac{\xi}{R'} = 60$, $\frac{R}{D} = \frac{1}{1800}$, so wird $\lambda = 30$ und wenn x'' den Werth von x in Bogensecunden bedeutet:

$$\frac{J}{J_0} = [6 \cdot 672 - 10]\,(x'')^{\frac{3}{2}}$$

Hieraus folgt für $x'' = 5$: $\frac{J}{J_0} = 0.005$ und für $x'' = 10$: $\frac{J}{J_0} = 0.015$.

Mit Hülfe dieser Zahlen wird man leicht ermessen können, dass die Beobachtung des Eintritts nicht sehr sicher sein kann — bei Japetus entspricht einer Zeitminute ein

1) Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrgang 27. S. 197 ff.

Bogen von 11″ vom Saturn aus gesehen — und dass auf die Feststellung der Schattengrenze auf einige Bogensecunden auch dann nicht ankommen kann, wenn sehr grosse Fernrohre zur Verfügung stehen. Wesentlicher Einfluss kommt hierbei auch noch dem Umstande zu, dass die Trabanten keine Punkte, sondern ausgedehnte Massen sind. Doch ist hier nicht der Ort, auf diese Gegenstände näher einzugehen.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1894.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XVIII for 1893/94. 1894. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Deel I, No. 3.
Afd. Natuurkunde. Deel II, No. 1—6. 8.
„ III, No. 1—14. 1893. 8⁰.
Zittingsverlagen. Natuurkunde. Jahrg. 1893/94. 1894. 8⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Letterkunde. 3e Reeks. Deel 10. 1894. 8⁰.
Jaarboek 1893. 8⁰.
Prijsvers Phidyle. 1894. 8⁰.

Universität Athen:

Vorlesungsverzeichniss 1893/94 und 5 Schriften in griech. Sprache 1885/93. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

27. annual Report. June 1, 1894. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIII, No. 113. 114. 1894. 4⁰.
American Chemical Journal. Vol. 15, No. 8. Vol. 16, No. 1—6. 1893/94. 8⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 14, No. 4. Vol. 15, No. 1. 1893/94. 8⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XVI, No. 1—3. 1894. 4⁰.
Studies in historical and political science. XI. Series, No. 11. 12. XII. Ser., No. 1—7. 1893/94. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Verhandelingen. Deel 47, 2. Stuk. Deel 48, 1. Stuk. 1893. 4⁰.
Tijdschrift. Deel 37, afl. 1. 2. 3. 1893/94. 8⁰.
Notulen. Deel 31, afl. 3. 4. 1893/94. 8⁰.

Koninkl. natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indie zu Batavia:
Natuurkundig Tijdschrift. Deel 53. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:
Archiv für Geschichte von Oberfranken. Band 19. Heft 1. 1893. 8⁰.

Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:
Godischnjak. V—VII. 1891—93. 1892—94. 8⁰.
Glas. No. 43. 44. 1894. 8⁰.
Spomenik. No. 23. 24. 1894. 4⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:
Sitzungsberichte. 1894. No. 1—38. 1894. gr. 8⁰.
Acta Borussica. Band I der Behördenorganisation. 1894. 8⁰.
Abhandlungen aus dem Jahre 1893. 1893. 4⁰.
Politische Korrespondenz Friedrichs des Grossen. Bd. XXI. 1894. 8⁰.
Corpus inscriptionum latinarum. Tom. VIII. pars II. Suppl. 1894. fol.
Tom. VI, pars 4, fasc. 1. 1894. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:
Abhandlungen zur geologischen Spezialkarte von Preussen. Band X. Heft 6 u. 7. 1894. 4⁰.

Permanente Commission der internationalen Erdmessung in Berlin.
Verhandlungen der 1893 in Genf abgehaltenen Conferenz. Berlin 1894. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:
Berichte. 27. Jahrg., No. 12—18. 1894. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:
Zeitschrift. Bd. 45, Heft 4. Bd. 46, Heft 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:
Centralblatt für Physiologie. Bd. VIII, No. 7—19. 1894. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1893/94, No. 11—18. 1894. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:
Jahrbuch. Band IX, Heft 2. 3. 1894. 4⁰.

K. Geodätisches Institut in Berlin:
Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.
Feier des 100jährigen Geburtstages des Generallieutenants Dr J. Baeyer. 1894. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung 1894, Heft 1.
Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam in den Jahren 1890 u. 1891. 1894. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:
Jahrbuch. Bd. XXIII, Heft 3. 1894. 8⁰.

Curatorium der Savigny-Stiftung in Berlin:
Vocabularium jurisprudentiae Romanae jussu instituti Savigniani Fasc. I. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:
Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band VII, 2. Hälfte. Leipzig 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:
Wochenschrift. Bd. IX, Heft 7—10. Juli bis Oktober. Berlin 1894. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:
XIV. Jahrgang 1894. Heft 7—11. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:
Quellen zur Schweizer Geschichte. Band XIV. Basel 1894. 8⁰.

Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Bern:
Verhandlungen. 76. Jahresversammlung in Lausanne 1893. Nebst französischer Uebersetzung. Lausanne 1893. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:
Mittheilungen. Jahrg. 1893. 1894. 8⁰.

Schweizerische geologische Kommission in Bern:
Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lief. VIII, Suppl. I. Lief. XXIV, Theil 3. 1893/94. 4⁰.

Historischer Verein des Cantons Bern:
Archiv. Band XIV, 2. 1894. 8⁰.

Gewerbeschule in Bistritz:
XIX. Jahresbericht für 1893/94. 1894. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:
Atti e Memorie. III. Serie. Vol. XII, fasc. 1—3. 1894. 8⁰.

Universität in Bonn:
Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande zu Bonn:
Jahrbücher. Heft 95. 1894. 4⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:
Bulletin. 1894. No. 11—22. 8⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:
71. Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 8⁰.

Historisch-statistische Sektion der mährischen Ackerbau-Gesellschaft in Brünn:
Schriften. Band 28. 1894. 8⁰.
Notizenblatt 1893. No. 1—12. 4⁰.
Kunstarchäologische Aufnahmen aus Mähren von Alois Franz. 1894. 4⁰.

Académie Royale de Médecine in Brüssel:
Bulletin. IV. Série. Tome 8, No. 6—10. 1894. 8⁰.
Mémoires couronnés. Collection in 8⁰. Tome XIII. 1894. 8⁰.

Académie Royale des Sciences in Brüssel:
Bulletin. 3e Sér. Tome 27, No. 6. Tome 28, No. 7—11. 1894. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:
Analecta Bollandiana. Tom. XIII, fasc. 3, 4. 1894. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 37. 1893. 8⁰.
Mémoires II. E. Brenske, Die Melolonthiden. 1894. 8⁰.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Mathematische u. naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XI. 2. Berlin 1894. 8⁰.
Ungarische Revue. 1894. Heft 5—8. 8⁰.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Földtani Közlöny. Band XXIV, Heft 6—10. 1894. 8⁰.
Evkönyo. Band X, 6. XI, 1. 2. 1894. 8⁰.
Mittheilungen aus den Jahrbüchern. Band X, 6. 1894. 8⁰.

Statistisches Bureau der Hauptstadt Budapest:

Publikationen. XIX. XXV, 1. 1894. 4⁰.
Gust. Thirring, Geschichte des statistischen Bureaus von Budapest. Berlin 1894. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg:

Verslag over het jaar 1893. 1894. 4⁰.
Mededeelingen uit'slands Plantentuin. No. XI—XIII. 1894. 4⁰.

Institut Météorologique de Roumanie in Bukarest:

Analele. Tom 8, anul 1892. 1894. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. 18, fasc. 1. 1894. 4⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta

Monthly Weather Review. February—June. 1894. fol.
Meteorolog. Observations. February—June. 1894. fol.
Memorandum on the snowfall in the mountain districts. Simla 1894. fol.
India Weather Review. Annual Summary 1893. 1894. fol.
Report on the Administration 1893—94. 1894. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. N. Ser. No. 834—846. 1893/94. 8⁰.
Proceedings. 1894. No. II—VII. 1894. 8⁰.
Journal. New Series. No. 333—337. 1894. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 27, part 2. Vol. XXVIII, part 3. 1894. 8⁰.
Memoirs. Palaeontologia Indica. Series IX, Vol. II, part 1. 1893. fol.
Manual of the Geology by R. D. Oldham. 2. Edition. 1893. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VIII, part 3. 1894. 8⁰.

Museum of comparative zoology in Cambridge, Mass:

Bulletin. Vol. 25, No. 7—11. 1894. 8⁰.

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1893. Abtheilung I u. II. 1894. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Guide. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. VIII, No. 356—363, 365—381. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. IV, No. 4. Vol. V, No. 1. 1894. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlinger for 1893. No. 1—21. 1894. 8⁰.
Oversigt i 1893. 1894. 8⁰.

Norwegische Commission der Europäischen Gradmessung in Christiania:

O. E. Schlötz, Resultate der 1893 ausgeführten Pendelbeobachtungen. 1894. 8⁰.

Universität in Christiania:

Aarsberetning 1891—92. 1892 93. 1893—94. 8⁰.
Jahrbuch des meteorolog. Instituts für 1891. 1893. 4⁰.
Archiv for Mathematik. Band XV, 4. XVI, 1—4. 1892—93. 8⁰.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Vol. 33, Heft 1—5. Vol. 34, Heft 1 u. 2. 1892—93. 8⁰.
Annaler 1892, 1893. 8⁰.
Th. Kjerulf, En Raekke norske Bergarter. 1892. 4⁰.
A. Chr. Bang, Dokumenter og Studier, den lutherske Katekismus' historie. I. 1893. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Chur:

23. Jahresbericht. 1893. 8.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. 37. Band. 1894. 8⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1894. 48. 49. 52. 58—75. 78—101. fol.

Academia nacional de ciencias in Córdoba (Rep. Argentina):

Boletin. Tom XII, 1. 3. 4. XIII, 1—4. Buenos Aires. 1890. 1892/93. 8⁰.

Oficina meteorologica Argentina in Córdoba (Rep. Argent.):

Anales. Tom IX. parte 1. 2. Buenos Aires 1893/94. 4⁰.

Universität Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. W. S. 1894/95. 1894. 8⁰.
Uebersicht der akadem. Behörden im Studienjahre 1894/95. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. VIII, Heft 3. 4. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. N. F. Band I, Heft 2. 1894. 8⁰.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tome VIII, livre 1. 2. Leide 1894. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver:

R. C. Hills, Ore deposits of Camp Floyd District, Tooele County, Utah 1894. 8⁰.

F. C. Knight, A suspected new mineral from Cripple Creek. 1894. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Band VII, 1. 1894. 8⁰.

Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Turjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Bd. X, 2. 1893. 1894. 8⁰.

Archiv für die Naturkunde Liv-, Esth- und Kurlands. Bd. X. 3; 1893—94. 8⁰.

Universität Turjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1893/94. 4⁰ u. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome XV. trimestre 1. 2. 1894. 8⁰.

K. Sächsischer Alterthumsverein in Dresden:

Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.

Neues Archiv für sächsische Geschichte und Alterthumskunde. Bd. XV 1894. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:

XXIV. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

K. norske Videnskabers Selskab in Drontheim:

Skrifter. 1892. 1893. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

The Transactions. Vol. 30, part 13. 14. 1894. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein Pollichia in Dürkheim:

Mittheilungen. 51. Jahrgang, No. 7. 1893. 8⁰.

Der Drachenfels bei Dürkheim a. d. H. von C. Mehlis. Neustadt 1894. 8⁰.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports. Vol. V. 1894. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 20, pag. 161—304. 1894. 8⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VII, 1. 1894. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1893—94. 1894. 8⁰.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1892—93 u. 1893—94. 1893/94. 8⁰.

Lehr- und Erziehungsanstalt in Maria-Einsiedeln:

Jahresbericht für das Jahr 1893/94. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthümer der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 8. Jahrg. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

78. Jahresbericht pro 1892/93. 1894. 8⁰.

Universität Erlangen:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1893—94 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Ser. Vol. 17, disp. 1. 2. 1894. 8⁰.

Biblioteca nazionale centrale in Florenz:

Catalogo dei manoscritti 'gianici della Biblioteca nazionale centrale di Firenze per Franc. L. Pullé. No. 1—4. 1894. 4⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Bericht. 1894. 8⁰.
Abhandlungen. Band XVIII, 3. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.:

Inventare des Frankfurter Stadtarchivs. Band IV. 1894. gr. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für das Jahr 1892/93. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. 1894. No. 1—6. 8⁰.
Societatum Literae. 1894. No. 4—9. 8⁰.

Universität Freiburg i. Br.:

Schriften der Universität. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau in's Land in Freiburg:

Schau in's Land. 20. Jahrlauf, Heft 1. 2. 1894. fol.

Institut National Genévois in Genf:

Bulletin. Tome 32. 1894. 8⁰.

Observatoire in Genf:

Résumé météorologique de l'année 1893 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. 1894. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1893/94.

Botanischer Garten in Gent:

Botanisch Jaarboek. VI. Jaargang. 1894. 8⁰.

Universitäts-Bibliothek in Giessen:

Schriften der Universität Giessen aus dem Jahre 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 70, Heft 1. 1894. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Abhandlungen. Band 39.
a) Historisch-philologische Classe.
b) Mathem.-phys. Classe. 1894. 4⁰.
Gelehrte Anzeigen. 1894. No. 7—12. Juli bis Dezember. 1894. 4⁰.
Nachrichten. Mathem.-phys. Classe. 1894. No. 3. 4⁰.
" Philol.-hist. Classe. 1894. No. 2. 3. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothenburg:

Handlingar. Heft 26—29. 1891—94. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (Ohio)

The Journal. Vol. IV, p. 73—192. 1894. 8⁰.

Steiermärkischer Landesausschuss in Graz:

82. Jahresbericht des Steiermärk. Landesmuseums Joanneum. 1894. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Heft 42. 1894. 8⁰.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 26. Jahrg. 1894. 8⁰.

Uebersicht der in den periodischen Schriften des historischen Vereins für Steiermark bis 1892 veröffentlichten Aufsätze. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1893. (Heft 30.) 1894. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Greifswald:

Pommersche Genealogien. Bd. 4. Herausg. von Th. Pyl. 1895. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

A. Weinhold, Bemerkungen zu Platons Gorgias als Schullektüre (Programm.) 1894. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indie im Haag:

Bijdragen. V. Reeks. Deel X, afl. 3, 4. 1894. 8⁰.

Naamlijst der leden op 1. Juni. 1894. 8⁰.

Alb. C. Kruyt, Woordenlijst van de Bareë-Taal. 1894. 8⁰.

Ministerie van Kolonien im Haag:

Pithecanthropus erectus: Eine menschenähnliche Uebergangsform aus Java. Von Eug. Dubois. Batavia 1894. 4⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. II. Series. Vol. I, part 3. 1893 8⁰.

Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 30, No. 11—20. 1894. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 48, Heft 2. 3. Leipzig 1894. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften der Universität a. d J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Thüring.-Sächs. Verein für Erforschung des vaterländischen Alterthums in Halle:

Neue Mittheilungen. Band XVIII, der II. Hälfte Schlussheft. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 66. Heft 5. 6. Band 67. Heft 1—4. Leipzig. 1894. 8⁰.

Stadt-Bibliothek in Hamburg:

Von den Hamburger wissenschaftlichen Anstalten im J. 1893 herausgegebene Schriften in 4⁰ und 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg.

Zeitschrift. Band IX, 3. 1894. 8⁰.

Geschichtsverein in Hanau:
Festschrift zu seiner 50jährigen Jubelfeier. 1894. 4⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:
42. und 43. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:
Zeitschrift. Jahrgang 1894. 8⁰.

Teylers tweede Genootschap in Harlem:
Verhandelingen. N. R. deel III, stuk 3 in 8⁰ und Atlas, 5e stuk in fol. 1894.

Musée Teyler in Harlem:
Archives. Ser. II. Vol. IV, Partie 2. 1894. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:
Archives Néerlandaises. Tome 28, livre 2—4. 1894. 8⁰.

Universitäts-Bibliothek in Heidelberg:
Schriften der Universität a. d. J. 1893/94 in 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:
Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. IV, Heft 2. 1894. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:
Carte géologique de la Finlande. Livr. 25. 26. avec 2 cartes. 1894. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:
Acta societatis scientiarum fennicae. Tom. XIX. 1893. 4⁰.
Oefversigt af Förhandlingar. XXXV. 1892—93. 1893. 8⁰.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 52. 53. 1893. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:
Fennia. IX. XI. 1894. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium zu Herény (Ungarn):
Meteorologische Beobachtungen im Jahr 1891. Budapest 1894. 4⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:
Jahresbericht für das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.
Archiv des Vereins. N. F. Band XXVI, 1. 2. 1894. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:
Verhandlungen und Mittheilungen. 43. Jahrgang. 1894. 8⁰.

Vogtländischer Alterthumsforschender Verein in Hohenleuben:
61.—64. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:
Jahrbuch. 21. Jahrgang. 1894. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:
Zeitschrift. 3. Folge. Heft 38. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:
Berichte. XXI. Jahrg. 1892/93. 1894. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 28, Heft 4. Bd. 29, Heft 1. 1894. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie in Baden zu Karlsruhe:
Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:
Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:
Bulletin. 2e Serie. Tom. IV, No 1. 2. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Universität in Kasan:
Jubiläumsschrift zu der hundertjährigen Geburtstagsfeier N. Lobatschewski's. 1894. 4⁰.
Utschenia Sapiski. Tom. 61, Heft 4—6. 1894. 8⁰.
2 Dissertationen (von Troizky und Goluben) in russischer Sprache. 1894. 8⁰.

Universität in Kiel:
Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Universität in Kiew:
Iswestija. Tom. 34. No. 6—10. 1894. 8⁰.

Université Imperiale in Kharkow:
Annales. Tome 3. 1894. 8⁰.
Annales. 1894. Heft 2. Nebst 2 Abhandlungen in russ. Sprache. 1894.

Geschichtsverein für Kärnthen in Klagenfurt:
Jahresbericht für 1893. 1894. 8⁰.
Archiv für vaterländische Geschichte. 17. Jahrg. 1894. 8⁰.
Carinthia. I. 84. Jahrg., No. 1—6. 1894. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg.
Ertesitö. II. Abth. Band 19, Heft 1. 2. 1894. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:
Mittheilungen. Heft 25. 1894. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:
Schriften. 34. Jahrgang. 1893. 4⁰.

Universität Königsberg:
Schriften der Universität aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:
Oversigt. 1894. No. 2. 8⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:
Aarböger. II. Raekke. 9. Band, 2. Hälfte. 1894. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:
L. H. F. de Fine Olivarius, Stamtavler over Slaegterne Olivarius de Fine. 1894. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:
Monumenta medii aevi historica. Tom. XIII. 1894. 4⁰.
Sprawozd. komisyi fizyograf. Tom. 28. 1893. 8⁰.
Rozprawy wydz. matemat. Tom. 26. 1893. 8⁰.
Zbior wiad. do Antropologii Tom. 17. 1893. 8⁰.
Anzeiger. 1894. Juni, Juli, Oktober, November. 8⁰.
Biblioteka pisarzów polskich. Tom. 28. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. Band 30. 1894. 8⁰.

Société d'histoire de la Suisse Romande in Lausanne:

Mémoires et Documents. Tome 38. 1894. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. XIII. Deel. Aflev. 3, 4. und Register zu Deel I—XII. 1894. 8⁰.
Handelingen en Mededeelingen 1893—1894. 1894. 8⁰.
Levensberichten der afgestorven medeleden. 1894. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil XIII, Heft 1. 2. 1894. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. Jahrgang 29, Heft 2. 1894. 8⁰.
Katalog der astronom. Gesellschaft. I. Abth., 6 Stück. 1894. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft zur Erforschung vaterländischer Sprache und Alterthümer in Leipzig:

Mittheilungen. Band IX, Heft 1. 1894. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen: a) Philol.-hist. Classe. Band XIV, 6. 7. XV, 1.
b) math.-phys. Classe. Band XXI, 2. 1894. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. 1894. I. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. Folge. Band 49, Heft 10—12. Band 50. Heft 1—12. 1894. 8⁰.

K. K. Bergakademie in Leoben:

Programm für das Jahr 1894/95. 1894. 8⁰.

Agricultural-Experiment Station, University of Nebraska in Lincoln:

7th annual Report for 1893. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome X, 2. 1894. 4⁰.

The Agent-general for New South-Wales in London:

An Australian Language as spoken by the Awabakal, by L. E. Threlkeld. Sydney 1892. 8⁰.

British Association for the Advancement of Science in London:

Report on the 63th Meeting. 1894. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Histor. Review. Vol. IX, No. 35, 36. July and October 1894. 8⁰.

Royal Society in London:

Philosophical Transactions. Vol. 184. A. B. 1894. 4⁰.
List of Fellows. 30. Novbr. 1893. 4⁰.
Catalogue of Scientific Papers. Vol. X. 1894. 4⁰.
Proceedings. Vol. 55, No. 334, 335. Vol. 56, No. 336—339. 1894. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 54, No. 89. Vol. 55, No. 1. 1894. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 380—385. July—December 1894. 8⁰.
Proceedings. No. 141. 142. Session 1893—94 and 1894—95. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal: a) Zoology, No. 155—157.
b) Botany, No. 177 und 205—208. 1894. 8⁰.
The Transactions: IIᵈ Serie:
a) Zoology. Vol. V, part 9—11. Vol. VI, part 1. 2.
b) Botany. Vol. III, part 9—11. Vol. IV, part 1. 1893—94. 4⁰.
Proceedings. October 1893, May 1894. 1893/94. 8⁰.
List 1893/94. 8⁰.
Catalogue of the Library. Part II. Periodicals. 1893. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-Chirurgical Transactions. Vol. 76. 77. 1893/94. 8⁰.
Catalogue of the Library. Supplement VII. 1893. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1894. part 4. 5. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1894. Part II. III. 8⁰.
Transactions. Vol. XIII, 9. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 50, No. 1285—1308. 1894. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 21, livr. 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. 49. Band. Stans 1894. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 25, cuad. 1—6. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen. 1893/94. I. Halbjahr. 1894. 8⁰.
Festschrift zur Feier des 25jähr. Stiftungstages des Vereins. 1894. 8⁰.

Fondazione scientifica Cagnola in Mailand:

Atti. Vol. XI, 1891/92. 1893. 8⁰.

Reale Istituto Lombardo di Scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II. Vol. 25. 1892. 8⁰.
Memorie: a) Classe di scienze storiche. Vol. 19, fasc. 1.
b) Classe di scienze matematiche. Vol. 17, fasc. 2. 1892. 4⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio storico Lombardo. Ser. III. Anno XXI, fasc. 2. 3. 1894. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. IV. Ser. Vol. 8, No. 3. 1894. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Mannheim:
56.—60. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Universitäts-Bibliothek in Marburg:
Schriften der Universität Marburg a. d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:
Neue Beiträge. Lieferung XIII. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:
Mittheilungen. Band 3, Heft 2. 3. 1893. 8⁰.

Académie in Metz:
Mémoires. 73e année 1891/92. 1894. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:
Jahrbuch. 5. Jahrgang, 2. Hälfte. 1894. 4⁰.

Observatorio meteorologico central in Mexico:
Boletin. Mensual. Tomo III, No. 5. 1894. 4⁰.

Sociedad cientifica Antonio Alzate in Mexico:
Memorias. Tomo VII, No. 11—12. 1894. 8⁰.

Sociedad de geografia y estadistica in Mexico:
Boletin. IVa época. Tomo 2, No. 11. 12. Tomo 3, No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Società dei naturalisti in Modena:
Atti. Ser. III. Vol. XII, Anno 27, fasc. 3. 1894. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:
Bulletin. 1894. No. 2. 8⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:
Die Büchersammlung der städtischen Kollegien Münchens. 1894. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie und Urgeschichte in Berlin und München.
Correspondenzblatt. 1894. No. 6—8. München. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:
Programm für das Studienjahr 1894/95. 1894. 8⁰.
Bericht für das Studienjahr 1893/94. 1894. 4⁰.
Personalstand. Winter.-Sem. 1894/95. 1894. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:
Amtsblatt der Erzdiöcese München und Freising. No. 15—23. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:
Geognostische Jahreshefte. Jahrg. VI. 1893. Cassel 1894. gr. 8⁰.
5. Bericht über die Thätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt. Berlin 1894. 8⁰.

Universität in München:
Schriften der Universität aus dem Jahre 1894 in 4⁰ u. 8⁰.

Aerztlicher Verein München:
Sitzungsberichte. III. 1893. 1894. 8⁰.

Bayerischer Dampfkessel-Revisions-Verein in München.

21. Jahresbericht 1893. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Monatsschrift. 1894. No. 7—12. Juli—Dezember. 8⁰.
Oberbayerisches Archiv. Band 48, Heft 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Westfälischer Provinzialverein in Münster:

21. Jahresbericht für 1892/93. 1893. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche in Neapel:

Rendiconto. Serie II. Vol. VIII, fasc. 8—10. 1894. 4⁰.

Società Reale in Neapel:

Atti della R. Accademia di scienze morali e politiche. Vol. 25. 1893/94. 8⁰.
Rendiconto dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 31. 32. 1892/93. 8⁰.
Atti della R. Accademia delle scienze fisiche. Ser. II. Vol. 6. 1894. 4⁰.
Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche. Ser. II. Vol. 8. fasc. 6 e 7. 1894. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. XI, 3. Berlin 1894. 8⁰.

American Journal in New-Haven:

The American Journal of Science. Vol. 48, No. 283—288. July December. 1894. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:

Report for the year 1893/94. 1894. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Proceedings at New-York. March 29—31. 1894. 8⁰.

North of England Institute of Mining and Mechanical Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. 43, No. 5. 6. Vol. 44. No. 1. 1893 94. 8⁰.
Annual Report of the Council for 1893/94. 1894. 8⁰.
Report of the Proceedings of the flameless explosives Committee. Part I. 1894. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VIII, No. 4. 1894. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Annual Report for the year 1893. 1894. 8⁰.

State Museum in New-York:

45th and 46th annual Report for the year 1891 and 1892. Albany 1892/93. 8⁰.
Bulletin. Vol. 3, No. 11. Albany 1893. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

The Journal. Vol. XVI, No. 6—12. Easton 1894. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 26, No. 2, 3. 1894. 8⁰.

Nederlandsch Botanische Vereeniging in Nijmegen:
Nederlandsch kruidkundig Archief. II. Ser. Deel VI, Stuk 3. 1894. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:
Abhandlungen. Band X, Heft 2. 1894. 8⁰.

Komité für die Hans-Sachs-Feier in Nürnberg:
Hans Sachs zum 400jährigen Geburtsjubiläum des Dichters. Von Ernst Mumenhoff. 1894. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:
Sapiski. Tom. XVIII, 2. 1894. 8⁰.
Organisation de l'étude climaterique de la Russie par Klossovsky. 1894. 4⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:
Proceedings and Transactions. Vol. XI, for the year 1893. 1894. 4⁰.

The Radcliffe Observatory in Oxford:
Radcliffe Catalogue of Stars 1890. 1894. 4⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:
Atti. Ser. II. Vol. 2, fasc. 1. 1895. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:
Rendiconti. Tom. VIII, 5. 6. 1894. gr. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:
Atti. Annata 17. 1894. Gennaio—Aprile. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:
Bulletin. 1894, No. 27—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:
Comptes rendus. Tome 119, No. 1—25. 1894. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:
Bulletin. Tome XXII, No. 5—8. 1894. 8⁰.

Société de géographie in Paris:
Bulletin. VII. Sér. Tom. 15. 1er et 2e trimestre. 1894. 8⁰.
Comptes rendus 1894, No. 14—17. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:
Moniteur. 4e Sér. Tome VIII, 2e partie, livre 631—636. Juillet—Déc. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „L'Électricien" in Paris:
L'Électricien. 2e Sér. Tome VIII, No. 184—208. Paris 1894. 4⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:
Bulletin. Nouv. Sér. Tome IV, No. 1. 2. 1894. 4⁰.
Bulletin. Ve Série. Tome I, No. 1—3. 1894. 4⁰.
Mémoires. Tom. 39. 41, No. 6—9. 42, No. 1—11. 1893/94. 4⁰.
Byzantina Chronika. Tom. 1, Heft 1. 1894. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:
Bulletins. Vol. XII, No. 3—7 et Supplement au T. XII. 1893. 8⁰.
Mémoires. Vol. IV, No. 3. 1893. 4⁰.

Kais. russ. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:
Verhandlungen. II. Serie. Band XIII. 1893. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:
Schurnal. Tom. XXVI, 4—7. 1894. 8⁰.

Société des naturalistes in St. Petersburg:
Travaux. Section de Botanique. Vol. XXIV. 1893/94. 8⁰.
Chemitscheskaja Laboratoria. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:
Sapiski. Tom. 34. 1894. 8⁰.
Uebersicht der Wirksamkeit der naturwissenschaftlichen Gesellschaft in St. Petersburg 1868—1893. (In russ. Sprache.) 1893. 8⁰.
Oboscenie. (Vorlesungskatalog 1894/95.) 1894. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:
Proceedings. 1894, part I. 1894. 8⁰.

The Oriental Club of Philadelphia:
Oriental Studies. 1888—1894. Boston 1894. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:
The Pennsylvania Magazine. Vol. 18, No. 1. 1894. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:
Proceedings. Vol. 33, No. 144. 145. 1894. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:
Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 63—132. 1894. 4⁰.

Alterthums-Verein in Plauen:
Mittheilungen. 10. Jahresschrift auf die Jahre 1893/94. 1893. 8⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:
Polhöhenbestimmungen im Harzgebiet. 1887—1891. Berlin 1894. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josefs Akademie in Prag:
Rozprawy. Třida II. Ročník III, číslo 1. 2. 1894. 4⁰.
„ III. „ III. „ 2.
Historický Archiv. Číslo 4. 5. 1894. 4⁰.
Bulletin international. Cl. des sciences mathém. I. 1894. 4⁰.
Věstník. Ročník III. číslo 6. 1894. 4⁰.
Sbírka pramenův etc. Skupina I. Rada 2. Číslo 1. 1894. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen in Prag:
Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens im Jahre 1893. 1894. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:
Časopis. Band 23, Heft 3—5. 1894. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:
Památky archaeologické a místopisné. Bd. XVI, 3—6. 1893. 4⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:
Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1893. 54. Jahrg. 1894. 4⁰.

K. K. deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:
Ordnung der Vorlesungen. Winter-Sem. 1894/95. 8⁰.
Personalstand. Studienjahr 1894/95. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:
Mittheilungen. Jahrg. 32. No. 1—4. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:
Verhandlungen. Bd. 46. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:
Berichte. IV. Heft. 1894. 8⁰.

Instituto historico e geographico in Rio de Janeiro:
Revista trimensal. Tomo 56, parte 1. 1893. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:
Bulletin. Vol. 5. 1894. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. II, parte 2. Notizie degli scavi. Gennaio—Agosto. 1894. 4⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. III. Semestre 1, fasc. 12, Semestre 2, fasc. 1—8. 1894. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol 3, fasc. 5—9. 1894. 8⁰.
Rendiconti dell' adunanza solenne del 3 Giugno. 1894. 4⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:
Atti. Anno 47. Sessione I. II. III. 1894. 4⁰.

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:
Studi e documenti di storia e diritto. Anno XIV, fasc. 1—4. 1893. 4⁰.
Codices manuscripti graeci Ottoboniani Bibliothecae Vaticanae, recensuerunt E. Feron et F. Battaglini. 1893. 4⁰.

Comitato geologico d'Italia in Rom:
Bollettino. Anno 1894, No. 2. 3. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut in Rom:
Mittheilungen. Römische Abtheilung. Band IX, 2. 3. 1894. 8⁰.

Società Italiana delle scienze in Rom:
Memorie di Matematica. Serie III. Vol. 8. 9. Napoli 1892/93. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:
Archivio. Vol. XVII, fasc. 1. 2. 1894. 8⁰.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:
Annali. Vol. XXII, parte 1. 1890. Vol. XIV, p. 1. 1892. Vol XV, p. 1. 1893. 1894. 4⁰.

Universität Rostock:
Schriften aus dem Jahre 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Lick Observatory of the University of California in Sacramento:
Publications. Vol. II. 1894. 4⁰.

Academy of Science in St. Louis:
Transactions. Vol. VI, No. 9—17. 1893/94. 8⁰.

Essex Institute in Salem:
Bulletin. Vol. 26. 1894. 8⁰.

K. K. Staats-Gymnasium in Salzburg:
Programm für das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:
Mittheilungen. 34. Vereinsjahr. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:
Mittheilungen zur vaterländischen Geschichte. XXV. 1894. 8⁰.
Urkundenbuch der Abtei St. Gallen. Theil IV, 3. 1894. 4⁰.
Abt Berchtold von Falkenstein von Placid Bütler. 1894. 4⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadiz:
Almanaque náutico para 1895. Madrid 1894. 8⁰.

Geographical Society of California in San Francisco:
Bulletin. Vol. II. 1894. May. 8⁰.

Observatorio astronómico in San Salvador:
Observaciones meteorologicas. Oct.—Dez. 1892. 1894. 8⁰.

Société scientifique du Chili in Santiago:
Actes. Tome 3, livr. 4. 5. Tome 4, livr. 1. 2. 1894. 4⁰.

Commissão geographica e geologica i São Paulo (Brasilien):
Boletin. Dados climatologicos. 1890—1892. 3 Hefte. 1893. 8.
Contribuções para a archeologia. Heft 1. 1893. 8⁰.

Histor. Verein für das Württembergische Franken in Schwäbisch-Hall:
Württembergisch Franken. Neue Folge V. 1894. 8⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:
Jahrbücher. 59. Jahrgang. 1894. 8⁰.

China Branch of the Royal Asiatic Society in Shanghai:
Journal. N. S. Vol. 26. 1891/92. 1894. 8⁰.

Meteorologische Centralstation in Sophia (Bulgarien):
Bulletin mensuel météorologique de Bulgarie. 1894. Jan.—Sept. 4

Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum in Sarajevo:
Die prähistorischen Fundstätten von V. Radimský. 1891. 4⁰.
Römische Strassen in Bosnien und der Hercegovina von Ph. Ball.
Th. I. Wien 1893. fol.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:
Bullettino di archeologia. Anno 17. 1894. No. 5—7. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speier:
Mittheilungen. XVIII. 1894. 8⁰.

Schwedische Akademie der Wissenschaften in Stockholm:
Handlingar. Band 25. Heft 1. 2. 1892—94. 4⁰.
Bihang till Handlingar Band XIX in 4 Abtheil. 1894. 8⁰.
Meteorologiska iakttagelser. Bd. 32. (1890.) 1894. 4⁰.
Lefnadstockningar. Band III, 2. 1894. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stockholm:
Sveriges offentliga bibliotek Accessions-Katalog VIII. 1893. 1894. 8⁰.

Société des sciences in Strassburg:
Bulletin mensuel. Tome 28, fasc. 5. 6. 1894. 8⁰.

Universität Strassburg:
Schriften aus dem Jahre 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Australasian Association for the Advancement of Science in Sydney:
Report. Vol. V. Adelaide Session. 1893. 8⁰.

Department of Mines in Sydney:
Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. IV, part 1. 1894. 4⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:
Records. Vol. IV, part 2. 1894. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):
Boletin. Tom. I, No. 17—19. 1894. 4⁰.
Anuario. Año XV. México. 1894. 4⁰.

College of Science, Imperial University, Japan, Tokio.
The Journal. Vol. VI, 4. VII, 1. VIII, 1. 1894. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio:
Mittheilungen. Band VI. Suppl. Heft 1. Heft 54. 1894. fol.

Tufts College Mass.:
Tufts College Studies No. III. 1894. 4⁰.

Universitäts-Bibliothek in Tübingen:
Schriften der Universität Tübingen a. d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:
Atti. Vol. 29, disp. 11—15. 1894. 8⁰.
Memorie. Ser. II, tom. 44. 1894. 4⁰.

Comité météorologique international in Upsala:
Extrait des procès-verbaux de la Ire réunion à Upsal en Août 1894. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Upsala:
Nova Acta. Ser. III. Vol. XVI. 1893. 4⁰.

Universität in Upsala:
Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Société provinciale des Arts et Sciences in Utrecht:
Verslag. 1893. 8⁰.
Aanteckeningen van Sectie-vergaderingen. 1893. 8⁰.
L. A. van Langeraad, De Nederlandsche Ambassade-Kapel te Parijs. 2. Voll. s'Gravenhage. 1893. 8⁰.

American Historical Association in Washington:
Annual Report for the year 1892 and 1893. 1893/94. 8⁰.

Bureau of Ethnology in Washington:
Tenth annual Report 1888—89, by J. W. Powell. 1893. 4⁰.
The Maya Year, by Cyrus Thomas. 1894. 8⁰.
Bibliography of the Wakashan Languages, by F. C. Pilling. 1894. 8⁰.
The Pamunkey Indians of Virginia, by J. H. Pollard. 1894. 8.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report, to July 1892. 1893. 8⁰.

Surgeon General, U. S. Army in Washington:

Index Catalogue. Vol. XV. 1894. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 27. Jahrg. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Mittheilungen aus dem Vatikanischen Archive. Band II. 1894. 4⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1894. No. 5—9. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1894. No. 27—52. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 24, Heft 3—5. 1894. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Jahrg. 1894. Band 44, I. u. II. Quartal. 8⁰.

Oesterreichische Gradmessungs-Kommission in Wien:

Verhandlungen über die am 11. und 13. April 1894 abgehaltenen Sitzungen. 1894. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band IX, No. 2. 1894. 4⁰.

v. Kuffnerische Sternwarte Wien:

Publikationen. Band III. 1894. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Jahrbuch für das Studienjahr 1893/94. 1894. 8⁰.

Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1894/95. 1894. 8⁰.

Oeffentliche Vorlesungen. Sommer-Sem. 1894. Winter-Sem. 1894/95. 1894. 8⁰.

Die feierliche Inauguration des Rektors am 8. Nov. 1894. 8⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 34. Bd. Jahrg. 1893/94. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein an der Universität Wien:

Mittheilungen für das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 1847. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 39, Heft 2. 1894. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Franz Ludwig Baumann in Donaueschingen:

Geschichte des Algäus. Band III. Kempten 1894. 8⁰.

A. Brill in Tübingen:

Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen. Berlin 1893. 8⁰.

Franz Bücheler in Bonn:

Anthologia latina. Pars II, fasc. 1. Leipzig 1895. 8⁰.

Hartmann Caviezel in Chur:

Litteratura veglia (rhaeto-romanscha). 1894. 8⁰.

Carlo Cipolla in Turin:

Ricerche sull' antica biblioteca del monastero della Novalesa. 1894. 8⁰.

Salvatore de Crescenzo in Neapel:

Saggio di una scala normale del pensiero astratto. 1893. 8⁰.

R. Fresenius in Wiesbaden:

Ueber die Schwankungen im Gehalte der Mineralwasser. 1894. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Systematische Phylogenie der Protisten und Pflanzen. Th. I. Berlin 1894. 8⁰.

L. Harperath in Córdoba. (Rep. Argent.):

Die Weltbildung. Köln 1894. 8⁰.

P. de Heen in Brüssel:

5 Separatabdrücke aus dem Bulletin de l'Acad. R. des Sciences, physikalischen Inhalts. 1894. 8⁰.

Professor Hegewald in Meiningen:

Introduction au discours sur l'unité de l'éspèce humaine. 1894. 8⁰.

W. J. Hoffmann in Philadelphia:

Gshicht fun dä altä Tsaitä in Pensilfani. By W. J. Hofmann. 1894. 8⁰.

J. B. Jack in Konstanz:

Hepaticae in insulis Vitiensibus et Samoanis lectae. Sep.-Abdruck. 1894. 8⁰.

James E. Keeler in London:

On the Spectra of the Orion Nebula. s. l. 1893. 8⁰.

Friedrich Keinz in München:

Hans Sachsens Zeitgenossen und Nachfolger im Meistergesang. Nürnberg 1894. 8⁰.

Albert von Kölliker in Würzburg:

Der feinere Bau des sympathischen Nervensystems. Würzburg 1894. 8⁰.
Ueber den Fornix longus von Foral und die Riechstrahlungen im Gehirn des Kaninchens. Strassburg 1894. 8⁰.
Ueber die feinere Anatomie des sympathischen Nervensystems. Wien 1894. 8⁰.

M. E. Lemoine in Paris

4 Abhandlungen über Geometrie. 189[illegible]

G. Lorentzen in Bamberg:

Ueber die Untersuchung der Scalen eines Heliometers. 1894. 8°.

Se. Hoheit Prinz Albert von Monaco in Monaco:

Résultats des Campagnes scientifiques. fasc. VII. 1894. gr. 4°.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tome 56, No. 1. 2. Paris 1894. 8°.

Gifford Pinchot in New-York:

Biltmore Forest, the property of Mr. George W. Vanderbilt. Chicago 1893. 8°.

S. Riefler in München:

Die Präcisions-Uhren. 1894. gr. 8°.

Andreas Schmid in München:

Geschichte des Georgianums in München. Regensburg 1894. 8°.
Festbericht über die IV. Centenarfeier des Georgianums. Augsburg 1894. 8°.

August Tischner in Leipzig:

Le pouvoir grossissant de l'atmosphère. 1892. 8°.

Albrecht Weber in Berlin:

Vedische Beiträge. 1894. 4°.

Henry Wilde in London:

Ueber den Ursprung der elementaren Körper und über einige neue Beziehungen ihrer Atomgewichte. London 1892. 4°.

A. Wolfer in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. No. 84. 1894. 8°.

Namen-Register.

v. Baeyer Adolf 51, 61, 296, 402.
Bauer Gustav 343.
Bauschinger Johann (Nekrolog) 114.
van Beneden Peter J. (Nekrolog) 151.
Boltzmann Ludwig 207, 211.
Brunn Hermann 93.

de Candolle Alphonse (Nekrolog) 153.

Döhlemann Karl 41.

Fomm L. 189.

Graetz L. 189.

Hartig Robert 385.
Hertz Heinrich Rudolf (Nekrolog) 146.

Kummer Ernst Eduard (Nekrolog) 140.
v. Kupffer Carl 51.

Lindemann Ferdinand (Wahl) 401, 403.

Maurer Ludwig 297.
v. Middendorff Alexander Theodor (Nekrolog) 148.

v. Orff Karl (Wahl) 401.

v. Pettenkofer Max 395.
Planck Max 391.
Pringsheim Alfred (Wahl) 401.

Richarz F. 3.
Rüdinger Nikolaus 249.

v. Sandberger F. 231.
Scacchi Arcangelo (Nekrolog) 156.
Schütz Ignaz 273.
Seeliger Hugo 161, 257, 423.
Sohncke Leonhard 61.
Stankewitsch B. W. 63.
Steinheil Adolf (Nekrolog) 120.
Stern Moritz Abraham (Nekrolog) 142.

Tyndall John (Nekrolog) 143.

v. Voit Carl 113.

Wassmuth A. 219.
Weinschenk Ernst 383.

Sach-Register.

Ansprache in der öffentlichen Sitzung 395.

Diffusionsgleichung, Integration bei variabeln Diffusionscoefficienten 211.
Dispersion elektrischer Wellen 189.
Druckschriften eingelaufene 361, 439.

Eichenholz, Verschiedenheiten im Bau desselben 385.
Elektrodynamik, Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf dieselbe 219.
Erzlagerstätte von Goldkronach 231.

Gehirne verschiedener Hunderacen 249.
Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz Maxwells 207, 391.
Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten 61.

Halbebene, conforme Abbildung derselben 403.

Kräfte, elektrische und magnetische der Atome 3.
Kümmelöl 61, 296.

Monorhinie und Amphirhinie 51.

Ovale, Theorie derselben 93.

Polarisation, dielektrische in Flüssigkeiten 63.
Polynome, Legendre'sche 343.

Raumtransformation dritter Ordnung 41.

Saturnring, Constitution desselben 161.
Schatten eines Planeten 423.
Stern ζ Cancri 257.

Terpentinöl 51, 402.
Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen 297

Wahlen 401.
Wirbel-Integrale, Helmholtz'sche 278.

157063 bd. 23-24
3 K.b.Akademie der wissenschaften,Munich.
5m Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen classe. Jahrg.1893-4.

NAME	DATE	NAME	DATE

Stanford University Libraries
3 6105 005 431 544